

М. Г. ВАЛИШЕВ  
А. А. ПОВЗНЕР

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
СТЕРЕОТИПНОЕ

**ДОПУЩЕНО**

*Научно-методическим советом по физике  
Министерства образования и науки  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших  
учебных заведений, обучающихся  
по техническим направлениям подготовки  
и специальностям*



· САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР ·  
2010

ББК 22.3я73

В 15

**Валишев М. Г., Повзнер А. А.**

**В 15** Курс общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 576 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0820-7**

Материал, излагаемый в данном учебном пособии, приводится в краткой и доступной форме, в каждом разделе выделяются основные физические положения, формулы и законы, что позволяет наглядно проследить взаимосвязь физических явлений.

Для студентов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям технических университетов.

**ББК 22.3я73**

**Рецензенты:** кафедра общей физики Российского государственного профессионально-педагогического университета, профессор, доктор физико-математических наук *А. Д. ИВЛИЕВ*; профессор, доктор физико-математических наук *В. Е. СИДОРОВ* (Уральский государственный педагогический университет).

**Обложка**

**А. Ю. ЛАПШИН**

*Охраняется Законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2010  
© М. Г. Валишев, А. А. Повзнер, 2010  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2010

В основу данного учебного пособия положен цикл лекций, читаемых на кафедре физики Уральского государственного технического университета (УГТУ-УПИ). Целью изучения курса физики является формирование опорных знаний, позволяющих выделить основополагающие опытные законы и на их основе построить схему метода познания данного круга природных явлений, выявить тенденции развития различных разделов в будущем. Физика — наука экспериментальная, и поэтому соответствующее внимание уделено историческому аспекту ее развития и тем экспериментам, которые позволяют выявить суть новых открытий и достижений.

В данном пособии сначала рассматриваются явления, связанные с движением отдельных частиц и волн, а затем — системы, состоящие из большого числа взаимодействующих между собой классических частиц и частиц, обладающих волновыми свойствами. Такое построение учебного материала позволяет постепенно подвести к изучению самых сложных разделов физики и показать научную познаваемость окружающего мира.

Применяемый в данном учебном пособии уровень математики соответствует программе математического образования студентов младших курсов. Необходимые для изложения материала новые математические понятия вводятся постепенно, по мере необходимости. Громоздкие расчеты опускаются, но в ряде случаев для полноты картины, для создания завершенности построения материала, для вывода каких-либо законов, положений они приводятся в разделах, отмеченных звездочкой (\*).

В данном учебном пособии, согласно рекомендации Минвуза России, принята международная система единиц (СИ), ее краткое описание приведено в Приложении 1.

Авторы выражают глубокую признательность коллегам и читателям за ряд полезных советов и замечаний.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

**Предмет физики.** Все, что нас окружает (мир, природа), принято называть материей. Ей приписывают ряд наиболее общих, фундаментальных свойств. Материя:

- является объективной реальностью, существующей независимо от нас;
- познаваема, она копируется, отображается нашими органами чувств;
- существует в виде вещества и полей, которые могут взаимно превращаться друг в друга;
- существует в пространстве и во времени: это формы существования материи;
- находится в непрерывном движении.

Под движением понимают всякое изменение вообще и выделяют наиболее общие формы движения материи: физическую, химическую, биологическую и общественную. Самой простой из них является физическая. Поэтому физика как наука изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения. В физической форме движения материи принято выделять механическую, тепловую, электромагнитную и квантово-механическую, в связи с чем в курсе физики рассматривают следующие разделы — механику, молекулярную физику и термодинамику, электромагнетизм, квантовую механику, физику конденсированного состояния, физику атомного ядра и элементарных частиц.

Физика является основой всех естественных наук (например химии, биологии, географии, астрономии и т. д.), так как физическая форма движения материи входит в более сложные формы движения как их составная часть. При этом в настоящее время нет четкой границы между физикой и естественными науками, поскольку современные физические



методы исследования широко внедряются в них и возникают соответственно такие дисциплины, как физическая химия, биофизика, геофизика, астрофизика и т. д.

Общность законов и выводов физики приводит к ее непосредственному влиянию на философию как науку о роли и месте человека в современном мире, физика формирует естественнонаучную картину мира и материалистическое мировоззрение, показывая познаваемость мира и возможность использования открываемых закономерностей на благо человека.

**Физика — наука экспериментальная.** Вся история развития физики показывает, что новые идеи и законы являются следствием опыта, эксперимента. В основе каждого раздела курса физики лежат фундаментальные законы физики, которые не выводятся теоретически, но являются обобщением опытных фактов. Эти законы позволяют построить логически стройную картину описания рассматриваемого круга явлений и взаимосвязи различных разделов курса физики. К таким законам можно отнести законы Ньютона в механике, три начала в термодинамике, полную систему уравнений Максвелла в электромагнетизме, уравнение Шредингера в квантовой механике.

В основном в физике реализуется следующая схема познания, изучения явлений природы: сначала — наблюдение какого-либо нового явления в природе, проведение опытов — многократного воспроизведения данного явления в контролируемых условиях; затем — объяснение результатов опытов с помощью различных гипотез, позволяющих теоретически объяснить закономерности протекания этого явления; после экспериментальной проверки гипотеза либо отбрасывается, либо становится законом, позволяющим описать данную область явлений и подсказать новые явления, новые закономерности.

В настоящее время изложение курса физики можно существенно упростить в связи с тем, что ряд законов, открытых исторически опытным путем, выводится теоретически из фундаментальных законов физики. Например, закон электромагнитной индукции Фарадея является следствием закона сохранения энергии; законы теплового излучения можно получить на основе квантовой теории излучения. Однако в таком случае искажается реальный исторический путь ее развития.

**Физика и математика.** Любой физический образ, понятие, закон обязательно включают в себя наряду со словесным, наглядно-пространственным также и аналитическое описание. Законы физики представляют собой количественные соотношения и формулируются на математическом языке, поэтому отделить физику от математики невозможно. Широкое внедрение математического аппарата привело к делению науки на экспериментальную и теоретическую физику. Применение математических методов в теоретической физике позволило не только записывать в компактной форме различные законы в виде уравнений, но и, следуя внутренней логике математических приемов, методов, получать новые результаты, которые не являются следствием опытных наблюдений. Конечно, справедливость новых формул, гипотез, полученных на «кончике пера», проверяется экспериментом. Примерами таких открытий могут служить предсказание Максвеллом

существования электромагнитных волн, которое затем было экспериментально подтверждено Герцем, открытие античастицы — позитрона и реакции аннигиляции электрона и позитрона на основе решения уравнения, записанного Дираком.

Развитие физики, в свою очередь, стимулирует развитие математики. Изучение квантово-механической формы движения материи, физики атомного ядра и элементарных частиц, ранних этапов развития Вселенной требует разработки новых понятий и методов в математике.

**Физика и техника.** Физика оказывает существенное влияние на развитие техники, новые отрасли в которой возникают в результате открытий в различных областях физики. К наиболее ярким примерам можно отнести создание электротехники (открытие закона электромагнитной индукции), радиотехники (открытие электромагнитных волн), вычислительной техники, лазерной техники на основе достижений в физике твердого тела, ядерной энергетики (открытия реакций деления тяжелых ядер).

Развитие физики способствует решению ряда принципиальных проблем, возникающих перед техникой и требующих создания физической картины, физического объяснения тех или иных явлений.

Постоянно повышающиеся требования, предъявляемые к качеству выпускаемой продукции (экономичность ее производства, экологическая безопасность для окружающей среды и человека), требуют качественного совершенствования технологических производств, широкого внедрения методов контроля на основе новых достижений в физике. В свою очередь, техника поставляет новые, более усовершенствованные приборы и установки для физических исследований, что позволяет получать новые экспериментальные факты. Широкое внедрение вычислительной техники, вычислительных методов приводит к созданию новых направлений в физике, связанных с компьютерным моделированием процессов поведения физических систем.

**Физика и выпускник технического университета.** Внутренняя логика построения курса физики, состоящая в постоянном переходе от изучения простых физических явлений к сложным, показывающая их познаваемость и взаимосвязь, в освоении при этом физических методов исследования природных явлений, позволяет сформировать материалистическое мировоззрение, естественнонаучную картину мира.

В настоящее время возрастает роль физики в формировании научного мировоззрения и активной жизненной позиции выпускника технического университета, что связано с широким внедрением новых достижений и открытий в различных областях физики в современное производство, необходимость решения вопросов, касающихся его модернизации. На первый план выходят такие проблемы, как экономичность производства, его экологическая безопасность, повышение качества выпускаемой продукции. Все это требует от современного выпускника как организатора производства не только качественного овладения специальными знаниями, но и умения разбираться в современном состоянии физической науки с целью применения новых разработок в производстве, в технологическом процессе.

Механика — это наука о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Ее возникновение и развитие неразрывно связано с потребностями развития практики. Раньше других разделов механики под влиянием развития строительной техники начинает развиваться статика (IV век до н. э., Древняя Греция, Аристотель и другие ученые проводили изучение прямолинейного и криволинейного движений, сформулировали правила равновесия рычага и т. д.). Вплоть до XVII века происходило накопление разрозненных фактов для создания научных основ механики. Основоположителем динамики является Г. Галилей, он первым верно решил задачу о движении тел под действием сил, открыл закон инерции и принцип относительности.

Создание основ классической механики завершается трудами И. Ньютона, сформулировавшего основные законы механики (1687) и открывшего закон всемирного тяготения. В его труде «Математические начала натуральной философии» содержалась законченная система механики, законы которой управляют большинством процессов в природе.

В XVIII веке начинают интенсивно развиваться аналитические методы решения задач механики, основывающиеся на использовании дифференциального и интегрального исчисления (Л. Эйлер, И. Бернуллы, Л. Карно, Ж. Фурье, Ж. Лангранж и др.). Развитие механики привело к созданию новых разделов, таких как теория нелинейных колебаний, механика тел переменной массы и ракет, теория устойчивости движения, аэродинамика и газовая динамика.

В современной механике рассматривается теория колебаний (особенно нелинейных) и динамика твердого тела, теория устойчивости движения, а также механика тел переменной массы и динамика космических полетов. Все большее значение приобретают задачи, требующие применения вероятностных методов расчета, в которых известны лишь вероятности сил, действующих

на тело. Большой круг проблем связан с изучением движения плазмы в магнитном поле, то есть с решением одной из самых актуальных проблем современной физики — осуществлением управляемого термоядерного синтеза.

Уравнения и методы теоретической механики лежат в основе многих областей современной техники: гидравлики, сопротивления материалов, строительной механики, кинематики механизмов, динамики машин и механизмов, теории гироскопических устройств, внешней баллистики, динамики ракет, теории движения наземных, морских и воздушных транспортных средств, теории регулирования и управления движением различных объектов и др.

Механика тесно связана с другими разделами физики. Ряд понятий и методов механики при соответствующих обобщениях находят приложение в оптике, статистической физике, квантовой механике, электродинамике, теории относительности и др.

В данном разделе рассматривается механическое движение материальных тел и происходящие при этом взаимодействия между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве.

Для строгости и удобства изложения материала используют две модели твердых тел: **материальная точка (м. т.)** — тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данного движения, и **абсолютно твердое тело (а. т. т.)** — абсолютно недеформируемое тело или тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается постоянным при его движении.

Линию, по которой движется тело, называют **траекторией движения**. Для материальной точки траекторию движения можно представить в виде сложения двух видов движений — по прямой линии и по окружности или как движение по окружностям разных радиусов от нуля до бесконечности; радиус, стремящийся к бесконечности соответствует прямолинейному движению (рис. 1.1а).

Для а. т. т. вводят два понятия: **поступательное движение**, при котором любая прямая тела перемещается параллельно самой себе ( $AB$  на рис. 1.1б), и **вращательное движение вокруг неподвижной оси**, когда все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения, — она также может находиться вне тела (см.  $O$  и  $O'$ ) на рис. 1.1в.

Любое движение а. т. т. можно свести к сумме двух движений — поступательного и вращательного. При поступательном движении все точки дви-

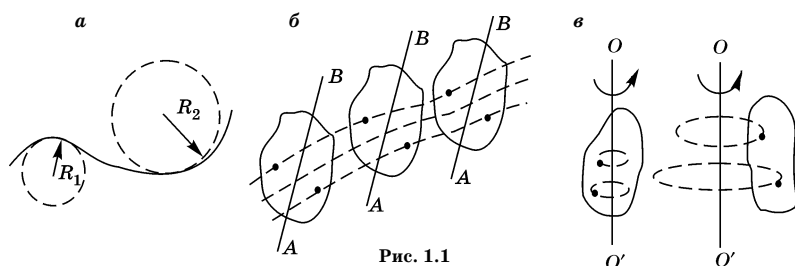


Рис. 1.1

жуются по одинаковым траекториям (рис. 1.1б), поэтому можно заменить такое движение на движение одной материальной точки — центра масс (см. далее раздел 1.2.4). Следовательно, поступательное движение а. т. т. не требует отдельного рассмотрения наряду с изучением движения м. т.

## 1.1. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

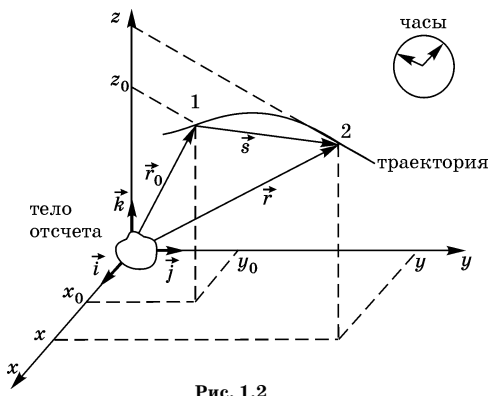


Рис. 1.2

Кинематика изучает геометрические свойства движения тел. С этой целью используют понятие **системы отсчета (СО)**, включающее тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор (часы) для измерения времени (рис. 1.2). Тогда положение тела в пространстве можно задать либо с помощью **радиус-вектора  $\vec{r}$** , проведенного из начала координат в рассматриваемую точку (для точек 1 и 2 на рис. 1.2 это векторы  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}$ ), либо с помощью координат  $x, y, z$  — проекций вектора  $\vec{r}$  на координатные оси:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — векторы, указывающие направления осей  $Ox, Oy, Oz$  и равные по модулю единице.

### 1.1.1. ПУТЬ, ПЕРЕМЕЩЕНИЕ, МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Вектор  $\vec{S}$ , соединяющий начальное и конечное положение тела (точки 1 и 2 на рис. 1.2), называют **перемещением**. Он связан с радиус-векторами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}$  следующим равенством:

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

Модуль перемещения меньше или равен **пути  $l$**  — расстоянию, пройденному телом по траектории; они совпадают в случае прямолинейного движения в одну сторону ( $l = |\vec{S}|$ ).

Для практических целей необходимо определять быстроту движения тела, поэтому вводят **мгновенную скорость** тела  $v$  в данной точке траектории, равную первой производной от радиус-вектора  $\vec{r}$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (1.3)$$

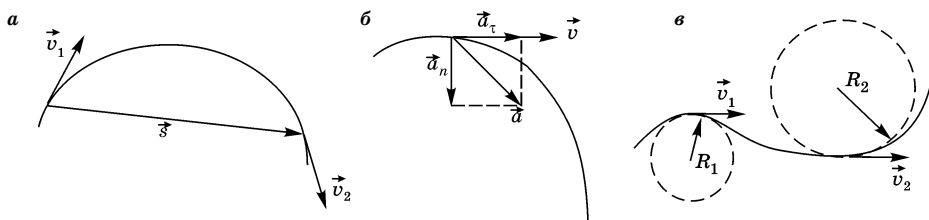


Рис. 1.3

Вектор  $\vec{v}$  в каждой точке траектории направлен по касательной к ней (рис. 1.3а).

Широкое применение находит **средняя путевая скорость**  $v_{\text{ср}}$  — скалярная физическая величина, равная отношению пути  $l$ , пройденного телом за время  $t$ , к этому времени  $t$ :

$$v_{\text{ср}} = l/t. \quad (1.4)$$

### 1.1.2. МГНОВЕННОЕ, КАСАТЕЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Быстроту изменения скорости оценивают, вводя понятие **мгновенного ускорения**  $\vec{a}$  — то есть ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости  $\vec{v}$  по времени  $t$  или второй производной от радиус-вектора  $\vec{r}$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}. \quad (1.5)$$

Проекцию вектора ускорения  $\vec{a}$  на направление касательной к траектории называют **касательным (тангенциальным) ускорением**  $\vec{a}_\tau$ , а на направление, перпендикулярное к касательной, — **нормальным (центростремительным) ускорением**  $\vec{a}_n$  (см. рис. 1.3б):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.6)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.7)$$

где  $v$  — численное значение скорости;  $R$  — **радиус кривизны траектории** в данной ее точке, он равен радиусу окружности  $R$ , вписанной в малый участок траектории вблизи этой точки (рис. 1.3в).

Касательное ускорение характеризует изменение скорости тела по ее численной величине (по модулю скорости), а нормальное ускорение — по направлению.

Приведем вывод формул (1.6) для ускорений  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ . Для этого возьмем на траектории две близко расположенные точки 1 и 2, разделенные интервалом времени  $\Delta t$  (рис. 1.4), перенесем вектор  $\vec{v}_2$  параллельно самому себе и отложим на нем отрезок, равный по модулю вектору  $\vec{v}_1$  (рис. 1.4, точка 3). Тогда вектор  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  можно представить в виде суммы двух векторов  $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$ .

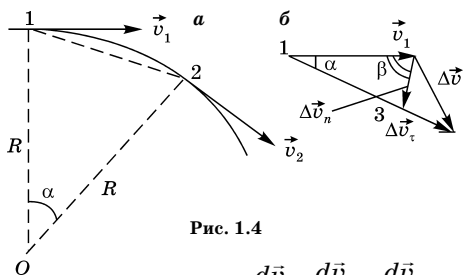


Рис. 1.4

При  $\Delta t \rightarrow 0$  углы  $\alpha$  и  $\beta$  стремятся соответственно к  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , поэтому вектор  $d\vec{v}_\tau$ , направленный по касательной к траектории, будет характеризовать изменение числового значения скорости, а вектор  $d\vec{v}_n$  будет перпендикулярен к  $\vec{v}_1$ . Следовательно,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}, \quad \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (1.8)$$

Длина дуги и расстояние по прямой между точками 1 и 2 (рис. 1.4а) при малых  $\Delta t \rightarrow dt$  будут равны  $dl_{1,2} = dS_{1,2} = vdt$ . Из подобия треугольников  $\triangle 1O2$  (рис. 1.4а) и  $\triangle 1v_13$  (рис. 1.4б) следует

$$\frac{dv_n}{v} = \frac{vdt}{R}, \quad a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

что и было записано в формулах (1.6).

### 1.1.3.

#### СХЕМА РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДИУС-ВЕКТОРА $\vec{r}$ И ВЕКТОРА СКОРОСТИ $\vec{v}$

Основной задачей кинематики является определение состояния м. т. (ее радиус-вектора  $\vec{r}$  и скорости  $\vec{v}$ ) в произвольный момент времени  $t$ . Для этого необходимо задать, во-первых, начальные условия — радиус-вектор  $\vec{r}_0$  и скорость  $\vec{v}_0$  в начальный момент времени  $t = t_0$  и, во-вторых, зависимость ускорения  $\vec{a}$  от времени  $t$ . Тогда, используя понятие интеграла (см. Прил. 1), для  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \vec{a}dt, \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}dt, \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}dt, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{v}dt, \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}dt; \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \left[ \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt \right] dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рассмотрим уравнения (1.9), (1.10) для некоторых частных случаев движений м. т.

**1. Равнопеременное движение материальной точки** — это движение м. т. с постоянным ускорением ( $\vec{a} = \text{const}$ ). При выборе начального момента времени  $t_0$  равным нулю из выражений (1.9) и (1.10) получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) позволяет, например, описать движение брошенного под углом к горизонту тела без учета сил сопротивления воздуха ( $\vec{a} = \vec{g}$ ), движение по параболической траектории.

**Равнопеременное прямолинейное движение** ( $\vec{a}_n = 0, \vec{a} = \vec{a}_\tau$ ) будет наблюдаться в тех случаях, когда векторы ускорения  $\vec{a}$  и начальной скорости  $\vec{v}_0$  будут либо параллельны друг другу, либо направлены в противоположные стороны, либо вектор  $\vec{v}_0$  будет равен нулю. В этих случаях проекция уравнений (1.11) на ось  $Ox$ , направленную вдоль линии движения тела, приводит к следующим выражениям:

$$v_x = v_{0x} + a_x t; \quad x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.12)$$

Для пути  $l$  и модуля скорости  $v$  в случаях равноускоренного (знак «+») и равнозамедленного (знак «-») прямолинейных движений можно получить

$$l = |S_x| = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 + v}{2} t = \frac{|v^2 - v_0^2|}{2a}; \quad v = v_0 \pm at. \quad (1.13)$$

На рис. 1.5 приведены построенные по уравнениям (1.12) графики зависимости от времени  $t$  проекций на ось  $Ox$  скорости  $\vec{v}(v_x)$ , перемещения  $\vec{S}(S_x = x - x_0)$  и радиус-вектора  $\vec{r}$  (координата  $x$ ) при заданных начальных значениях  $\vec{r}_0 (x_0 > 0)$ ,  $\vec{v}_0 (v_{0x} > 0)$  и  $\vec{a}$  (считается, что  $a_x = \text{const} > 0$ ). Этот случай соответствует равноускоренному движению вдоль оси  $Ox$ .

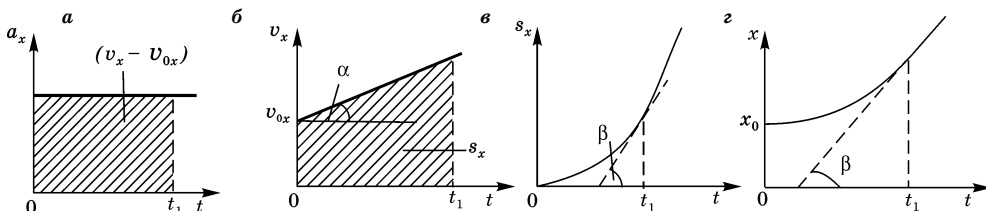


Рис. 1.5

Как видно из рис. 1.5, площади под графиком  $a_x(t)$  и  $v_x(t)$  позволяют найти в определенный момент времени  $t_1$  значения  $(v_x - v_{0x})$  и  $S_x$ , а углы наклона  $\alpha$  и  $\beta$  касательной к графикам  $v_x(t)$ ,  $S_x(t)$  и  $x(t)$  определяют проекцию ускорения  $a_x = \text{tg } \alpha$  и скорости  $v_x = \text{tg } \beta$  в этот момент времени  $t_1$ .

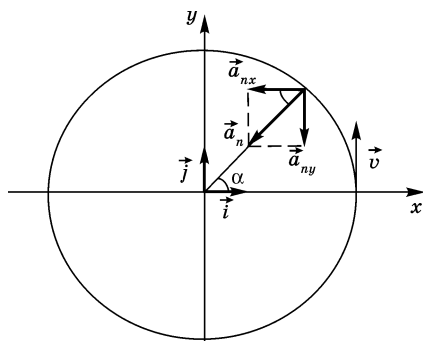


Рис. 1.6

**2. Равномерное движение материальной точки по окружности** радиуса  $R$  в плоскости  $xOy$  (начало координатных осей находится в центре окружности, рис. 1.6). Задаем начальные условия при  $t = 0$ :  $\vec{r}_0 = R\vec{i}$ ,  $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$ .

Для такого движения тангенциальное ускорение  $a_\tau$  равно нулю, а зависимость нормального ускорения  $a_n$  от времени  $t$  определяется как

$$\vec{a}_n = -|\vec{a}_n|(\cos(\frac{v_0}{R}t)\vec{i} + \sin(\frac{v_0}{R}t)\vec{j}), \quad |\vec{a}_n| = \frac{v_0^2}{R}. \quad (1.14)$$



Действительно, для положения материальной точки, соответствующей углу  $\alpha$  на рис. 1.6, можно записать формулу для  $a_n$  через проекции на оси  $x$  и  $y$ :

$$\vec{a}_n = \vec{a}_{nx} + \vec{a}_{ny},$$

причем

$$\vec{a}_{nx} = -a_n \cos \alpha \vec{i}, \quad \vec{a}_{ny} = -a_n \sin \alpha \vec{j}.$$

Длина дуги, ограниченная углом  $\alpha$ , равна  $l = \alpha R = v_0 t$ , где  $t$  — время, за которое м. т. поворачивается на угол  $\alpha$ . Тогда  $\alpha = (v_0 t)/R$ , и в итоге получается формула (1.14).

Подставляя начальные условия и выражения для  $\vec{a}_n$  в формулы (1.9) и (1.10), получим:

$$\vec{v} = -v_0 \left( \left( \sin \frac{v_0}{R} t \right) \vec{i} - \cos \left( \frac{v_0}{R} t \right) \vec{j} \right); \quad \vec{r} = -\frac{R^2}{v_0^2} \vec{a}_n. \quad (1.15)$$

Формулы (1.9) и (1.10) даже в простом случае равномерного вращения м. т. по окружности дают громоздкие выражения (1.15). Существенное упрощение описания вращательного движения материальной точки возможно при введении новых характеристик — векторов углового перемещения  $\vec{\phi}$ , угловой скорости  $\vec{\omega}$  и углового ускорения  $\vec{\epsilon}$ .

#### 1.1.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть м. т. движется со скоростью  $\vec{v}$  по окружности радиуса  $r$  вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.7а). Материальную точку с осью вращения соединяет перпендикулярный к ней вектор  $\vec{r}$ , а вектор его элементарного приращения  $d\vec{r}$  направлен по касательной к окружности.

Введем понятие **вектора элементарного углового перемещения**  $d\vec{\phi}$ : он равен по модулю углу элементарного поворота  $d\phi$ , причем  $d\phi > 0$ , направлен по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика, а именно: направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения материальной точки, тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора (рис. 1.7а).

Быстроту вращения м. т. характеризует **угловая скорость**  $\vec{\omega}$ , равная первой производной от вектора углового перемещения  $\vec{\phi}$  по времени  $t$ :

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (1.16)$$

Направления вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектора элементарного углового перемещения  $d\vec{\phi}$  совпадают.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует **вектор углового ускорения**  $\vec{\epsilon}$ , равный первой производной от угловой скорости  $\vec{\omega}$  по времени  $t$ :

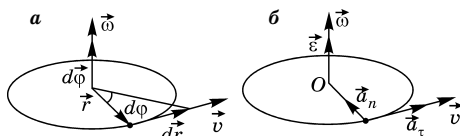


Рис. 1.7

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}. \quad (1.17)$$

В случае ускоренного вращения направления  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают (рис. 1.7б), для замедленного вращения вектора  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\omega}$  направлены в противоположные стороны ( $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ ).

Кроме приведенных выше величин, для описания вращательного движения тела используют **частоту обращения  $n$** , определяемую как число оборотов, совершаемых телом за единицу времени, и **период обращения  $T$**  как время одного полного оборота. Справедлива следующая взаимосвязь  $\omega$ ,  $n$  и  $T$ :

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T. \quad (1.18)$$

Введенные характеристики вращательного движения материальной точки применимы и для абсолютно твердого тела, так как его можно разбить на малые объемы и тем самым представить в виде совокупности точек.

Если задать начальные условия ( $t = t_0 : \phi = \bar{\phi}_0, \vec{\omega} = \bar{\omega}_0$ ) и зависимость углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  от времени  $t$ , то для векторов углового перемещения  $\vec{\phi}$  и угловой скорости  $\vec{\omega}$  можно записать:

$$\vec{\phi} = \bar{\phi}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt; \quad \vec{\omega} = \bar{\omega}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\varepsilon}(t) dt. \quad (1.19)$$

Для вращения тела с постоянным угловым ускорением формула (1.19) примет следующий вид ( $t_0 = 0$ ):

$$\vec{\omega} = \bar{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t; \quad \vec{\phi} = \bar{\phi}_0 + \bar{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2}. \quad (1.20)$$

Для углового пути  $\phi$  и модуля угловой скорости  $\omega$  в случаях равноускоренного (знак «+») и равнозамедленного (знак «-») вращения из (1.20) получим ( $\phi_0 = 0$ ):

$$\phi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{|\omega^2 - \omega_0^2|}{2\varepsilon}; \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (1.21)$$

Можно отметить, что формулы (1.21) переходят в формулы (1.13) при следующей замене:  $\phi \rightarrow l$ ,  $\omega \rightarrow v$ ,  $\varepsilon \rightarrow a = a_\tau$ . Этой аналогией можно пользоваться при записи формул для вращательного движения тел.

#### 1.1.5. ФОРМУЛЫ ВЗАИМОСВЯЗИ ЛИНЕЙНЫХ ( $\vec{v}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n$ ) И УГЛОВЫХ ( $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ ) ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Пользуясь определением векторного произведения двух векторов (см. Прил. 1) и рис. 1.7а, можно записать

$$d\vec{r} = [d\vec{\phi} \times \vec{r}]. \quad (1.22)$$

Выражение (1.22) позволяет получить следующие формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик:

1) для скоростей  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} \right] = \left[ \vec{\omega} \times \vec{r} \right];$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]; \quad v = \omega r. \quad (1.23)$$

2) для ускорений  $\vec{a}_\tau, \vec{a}_n$  и  $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{v}] = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]; a_\tau = \varepsilon r, \quad (1.24)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}], a_n = \omega v = \frac{v^2}{R} = \varepsilon^2 R. \quad (1.25)$$

Направления векторов  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  показаны на рис. 1.7б (ускоренное вращение м. т. —  $\vec{a}_\tau \uparrow \vec{v}, \vec{\varepsilon} \uparrow \vec{\omega}$ ).

## 1.2. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Решение кинематических уравнений механического движения тела помимо начальных условий требует информации об ускорении тела. Ее можно получить, рассматривая механическое взаимодействие данного тела с другими, приводящее к изменению его состояния, скорости, то есть к возникновению ускорения. Вопросы, связанные с такими взаимодействиями, и рассматриваются в динамике.

### 1.2.1. СИЛА, ИНЕРТНОСТЬ ТЕЛА, МАССА ТЕЛА

Механическое взаимодействие тела с другими телами описывают с помощью понятия **силы**  $\vec{F}$ , которая определяется как векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие данного тела с другими телами, приводящая к их деформации или к возникновению ускорения. Введение силы  $\vec{F}$  позволяет количественно описать такие взаимодействия и выявить их наиболее важные особенности. О взаимодействии данного тела с другими телами можно сказать так: на тело действует сила  $\vec{F}$ , которая сообщает ему ускорение  $\vec{a}$  или деформирует его.

В механике для характеристики различных видов взаимодействия тел вводят следующие силы: тяготения  $\vec{F}_T$  (ее частным случаем является сила тяжести  $m\vec{g}$ ), упругости  $\vec{F}_y$ , трения  $\vec{F}_{тр}$ , сопротивления  $\vec{F}_c$ , силу нормальной реакции опоры  $\vec{N}$ , вес тела  $\vec{Q}$ , силу натяжения  $\vec{F}_n$  нити и т. д. Они подробно изучаются в школьном курсе физики и здесь не рассматриваются.

Все тела изменяют свою скорость не мгновенно, а постепенно при их взаимодействии с другими телами, то есть обладают **инертностью**. Количественной характеристикой инертности тела является его **масса**  $m$ . Она определяется как мера инертности тела при его прямолинейном движении.

В качестве примера рассмотрим столкновение двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся со скоростью  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  ( $v_2 > v_1$ ) по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу. Пусть в результате

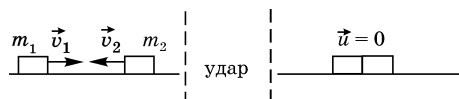


Рис. 1.8

столкновения они останавливаются (рис. 1.8). Из такого столкновения следует, что первое тело является более инертным, чем второе тело, т. е. первое тело обладает большей массой ( $m_1 > m_2$ ). Действительно, за время взаимодействия первое тело изменяет свою скорость на меньшую величину ( $|\Delta \vec{v}_1| = |\vec{0} - v_1| < |\Delta \vec{v}_2| = v_2$ ), чем второе тело.

### 1.2.2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В основе классической механики движения материальной точки лежат три закона Ньютона, являющиеся обобщением опытных фактов.

**I закон Ньютона** рассматривает движение тела в отсутствие его взаимодействия с другими телами. Согласно этому закону *тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано*.

Оказывается, что I закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета. Если выбрать систему отсчета (СО), связанную с поездом, движущимся равномерно и прямолинейно, то шарик, лежащий на гладком горизонтальном столе в купе вагона, будет находиться в покое, так как действующие на него силы тяжести и нормальной реакции опоры компенсируют друг друга. Однако если поезд будет двигаться с ускорением, то шарик начнет двигаться относительно поезда, то есть приобретет ускорение. Поэтому среди всех систем отсчета выделяют **инерциальные системы отсчета (ИСО)** как СО, в которых выполняются все три закона Ньютона.

ИСО в природе не существует, так как тела отсчета либо вращаются (СО, связанная с Землей), либо движутся прямолинейно с ускорением. Наиболее близкой к ИСО можно считать систему отсчета, связанную с Солнцем. Для многих физических явлений систему отсчета, связанную с Землей, также можно считать ИСО. В теоретическом плане ИСО существует бесконечное множество, все они движутся равномерно и прямолинейно, то есть без ускорения, или находятся в покое.

Ньютон для формулировки второго закона ввел понятие **импульса тела**  $\vec{p}$  как векторную физическую величину, характеризующую его прямолинейное движение и равную произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.26)$$

**II закон Ньютона** количественно описывает механическое взаимодействие тел, связывая между собой действующую на тело силу с изменением его импульса. Согласно этому закону *первая производная от импульса  $\vec{p}$  тела по времени  $t$  равна векторной сумме сил, действующих на тело*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.27)$$

Формула (1.27) позволяет рассматривать движение, при котором масса тела может изменяться (реактивное движение).

Если масса тела не зависит от времени, то тогда выражение (1.27) можно записать, вводя в него ускорение тела:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.28)$$

и сформулировать II закон Ньютона следующим образом: *произведение массы тела на его ускорение равно векторной сумме сил, действующих на тело.*

Можно отметить, что выражение (1.27) приводит в специальной теории относительности к релятивистски инвариантной формуле II закона Ньютона, чего нельзя сказать о формуле (1.28). В релятивистской механике формула взаимосвязи между ускорением тела и действующей на него силой существенно усложняется.

Уравнения (1.27) и (1.28) позволяют при задании начальных условий (радиус-вектора  $\vec{r}_0$  и импульса  $\vec{p}_0$  тела при  $t = t_0$ ) и сил, действующих на тело, решить основную задачу механики м. т., то есть описать ее механическое движение — однозначно определить ее радиус-вектор  $\vec{r}$  и импульс  $\vec{p}$  в последующие моменты  $t$ . Схема решения задач приведена на рис. 1.9.

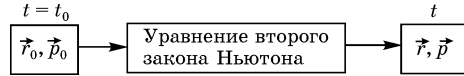


Рис. 1.9

**III закон Ньютона** важен тем, что он устанавливает дополнительные связи между силами, возникающими при взаимодействии тел, и тем самым облегчает решение уравнений (1.27) и (1.28), то есть решение задачи о механическом движении тел. Согласно этому закону силы, действующие между двумя телами, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (1.29)$$

На рис. 1.10 приведены примеры сил, рассматриваемых в III законе Ньютона. Эти силы приложены к разным телам, они одинаковой природы, это силы действия и противодействия.

Отметим, что, хотя задача описания механического движения тел решается на основе уравнений (1.27) и (1.28), ее практическая реализация сопряжена с большими сложностями. Так, в частности, во многих случаях не удается

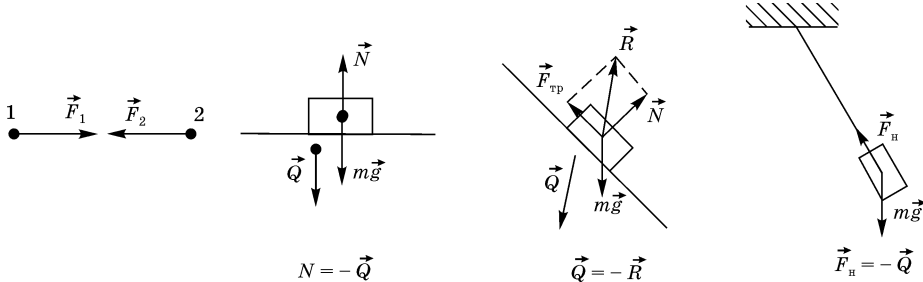


Рис. 1.10

установить все силы, действующие на тело, а для известных сил установить их зависимость от координат и времени. К тому же задача о движении трех и более тел не имеет точного решения. В связи с этим вводят дополнительные величины, такие как импульс  $\vec{p}$ , энергия  $W$  и момент импульса  $\vec{L}$  тела. Оказывается, что для этих величин выполняются законы сохранения, которые позволяют, не решая уравнения II закона Ньютона, получить неполную, но важную для практических целей информацию о движении взаимодействующих тел. К тому же эти законы сохранения являются отражением установленных на опыте фундаментальных свойств пространства и времени как форм существования материи — однородности пространства (все точки пространства эквивалентны, равноправны, из чего следует закон сохранения импульса) и его изотропности (все направления в пространстве эквивалентны, равноправны, из чего вытекает закон сохранения момента импульса) и однородности времени (все моменты времени равноправны, что приводит к закону сохранения механической энергии).

Возможно и другое, принятое в теоретической физике построение классической механики, в котором постулируются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса и на их основе выводятся законы Ньютона. Но это не меняет сути дела, так как и в том и в другом случае в основе механики лежат законы, являющиеся следствием опытных фактов.

### 1.2.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Докажем закон сохранения импульса. Для этого рассмотрим систему, состоящую из  $N$  тел (на рис. 1.11 для простоты приведена система из трех тел — материальных точек).

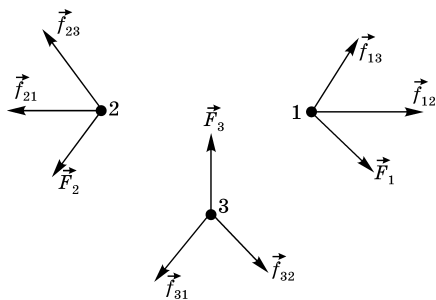


Рис. 1.11

На каждое тело системы действуют внешние силы  $\vec{F}_i$  ( $i$  — номер м. т.;  $i = 1, \dots, N$ ) со стороны не входящих в эту систему тел (м. т.) и внутренние силы  $\vec{f}_{ik}$  ( $i, k = 1, \dots, N$ ) со стороны других тел системы. Внутренние силы системы связаны между собой III законом Ньютона:

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}. \quad (1.30)$$

Запишем уравнения II закона Ньютона (1.27) для всех тел системы и затем сложим эти уравнения:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq 1} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Векторная сумма всех внутренних сил с учетом (1.30) равна нулю и поэтому

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.31)$$

где введен импульс  $\vec{p}_c$  системы как векторная сумма импульсов тел системы:  $\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$ .

Итак, согласно (1.31) векторная сумма импульсов тел системы (или импульс системы) изменяется за счет действия внешних сил.

Если взять **замкнутую систему**, то есть систему, на которую не действуют внешние силы ( $\vec{F}_i = 0$ ), то тогда выполняется **закон сохранения импульса**, согласно которому **векторная сумма импульсов тел замкнутой системы остается постоянной, или импульс  $\vec{p}_c$  замкнутой системы остается постоянным**:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \text{const}, \quad \vec{p}_c = \text{const}. \quad (1.32)$$

Реально выделить замкнутую систему достаточно трудно. Но и в незамкнутых системах в ряде случаев можно использовать закон сохранения импульса. Перечислим их.

**1. Внешние силы компенсируют друг друга.** Такую систему, например, составляют рассмотренные в 1.2.1 два тела, движущиеся по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу (рис. 1.8). В этом случае внешние силы — силы тяжести  $m_1 \vec{g}, m_2 \vec{g}$ , нормальные реакции опоры  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  — компенсируют друг друга, а возникающие при столкновении тел внутренние силы, силы деформации не могут изменить импульс системы  $\vec{p}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$ . Из этого следует, что  $m_1/m_2 = v_2/v_1$ , то есть из закона сохранения импульса можно количественно оценить соотношение масс этих тел, их инертность.

**2. Внешние силы не компенсируют друг друга, но их проекция на какую-либо ось остается равной нулю.** Хотя импульс системы изменяется, но его проекция на эту ось сохраняется. Примером может являться система, состоящая

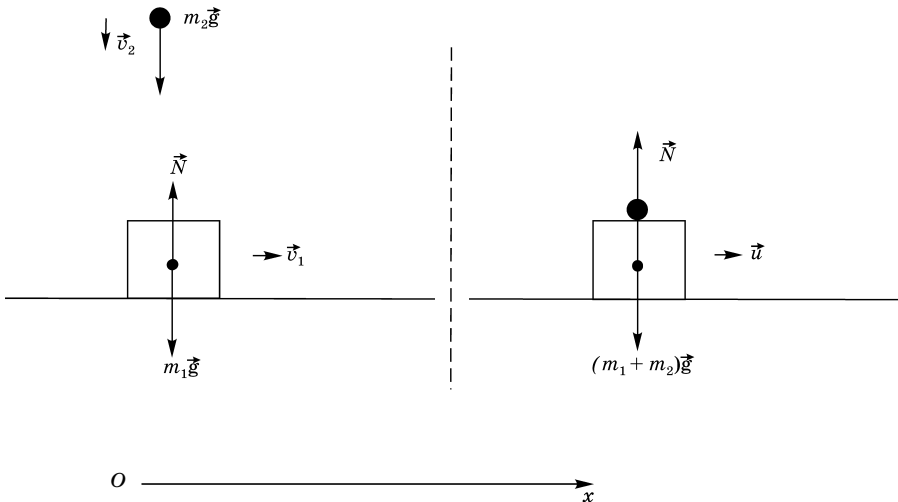


Рис. 1.12

из двух тел, одно из которых движется по гладкой поверхности со скоростью  $\vec{v}_1$ , а другое падает вертикально вниз со скоростью  $\vec{v}_2$  и испытывает абсолютное неупругое столкновение с первым телом. В результате этого они движутся с одинаковой скоростью  $\vec{u}$ , образуя единое целое (см. рис. 1.12).

Сумма внешних сил до удара ( $m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m_2\vec{g}$ ), во время и после удара ( $\vec{N} + (m_1 + m_2)\vec{g} = 0$ ) изменяется, но их проекция на ось  $Ox$  остается все время равной нулю, и поэтому  $m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$ . Такие системы называются квазизамкнутыми.

**3. Внешние силы значительно меньше по модулю внутренних сил, действующих между телами в системе ( $F_i \ll f_{ik}$ ).** Это наблюдается при сильных кратковременных взаимодействиях: удар, выстрел, разрыв снаряда и т. д. Тогда изменение импульса каждого тела системы в основном определяется внутренними силами системы

$$d\vec{p}_i = \left( \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i \right) dt = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} dt. \quad (1.33)$$

#### 1.2.4. ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Под центром масс системы понимают точку пространства, положение которой относительно какой-либо ИСО определяется радиус-вектором  $\vec{r}_c$ :

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (1.34)$$

где  $m = \sum_i m_i$  — сумма масс тел (м. т.) системы;  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го тела (м. т.) системы.

Если поместить в центр масс тело в виде материальной точки массой  $m$ , то оно будет двигаться со скоростью  $\vec{v}_c$ :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}_c}{m}. \quad (1.35)$$

Если подставить в выражение (1.35) формулу (1.31)

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i, \quad (1.36)$$

то тогда можно утверждать, что **центр масс системы** — это точка пространства, к которой приложены все силы, вызывающие по отдельности поступательное движение системы. Поэтому поступательное движение системы можно моделировать движением тела в виде м. т. массой  $m$ , помещенного в центре масс системы. Этот прием является удобным при изучении такого движения системы.

Если система является замкнутой, или внешние силы, действующие на нее, компенсируют друг друга, то ее центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно или покоиться. Поэтому в ИСО, связанной с ним, проще описать движение тел системы.



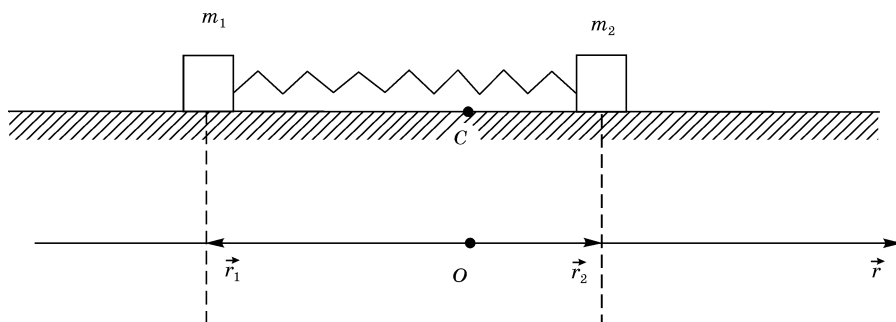


Рис. 1.13

В качестве примера рассмотрим систему двух неподвижных тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 = 2m_1$ ), скрепленных между собой сжатой в начальный момент времени пружиной. Эти тела могут скользить без трения по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 1.13).

Начало оси  $\vec{r}$  точка  $O$  совпадают с центром масс системы (точкой  $C$ ), то есть  $\vec{r}_c = 0$ . Положение тел в начальный момент времени определится векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , связанными между собой соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 = -2\vec{r}_2.$$

Если пружину отпустить, то за счет действия внутренних сил системы (силы упругости) тела придут в движение, скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , радиус-векторы  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  будут все время изменяться, но центр масс остается при этом неизменным, а импульс системы будет равным нулю:

$$\vec{p}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -2\vec{v}_2.$$

Соотношения между радиус-векторами  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  ( $\vec{r}_1 = -2\vec{r}_2$ ) и векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  сохраняются при движении тел.

Введенное выше понятие центра масс системы включает в себя как частный случай понятия центра масс и для абсолютно твердого тела. Действительно, а. т. т. можно разбить на малые объемы  $dV$  и представить в виде совокупности материальных точек, между которыми действуют внутренние силы. Отличием для абсолютно твердого тела является тот факт, что расстояния между материальными точками этого тела остаются со временем неизменными. Размеры объемов  $dV$  (м. т.) нужно выбирать такими, чтобы можно было пренебречь дискретным (атомным) строением вещества, то есть эти объемы должны содержать достаточное количество одинаковых по свойствам атомов.

Центр масс а. т. т. совпадает с его центром тяжести, но является более общим понятием, справедливым и в отсутствие внешних гравитационных полей.

Положение центра масс а. т. т. можно найти экспериментально, определяя положение его центра тяжести (см. далее 1.3.3).

## 1.3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 1.3.1. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

**Моментом импульса материальной точки** с массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$  относительно оси вращения, называют вектор  $\vec{L}$ , определяемый:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], L = rp \sin \alpha = rp, \quad (1.37)$$

где  $\vec{p}$  — импульс м. т.;  $\vec{r}$  — вектор, соединяющий материальную точку с осью вращения и перпендикулярный к этой оси (рис. 1.14а). Направлен вектор  $\vec{L}$  по оси вращения.

Запишем модуль момента импульса  $\vec{L}$  в другом виде:

$$L = rp = rmv = rm\omega r = (mr^2)\omega = I\omega, \quad (1.38)$$

здесь введена величина  $I$ , называемая **моментом инерции материальной точки относительно оси вращения**:  $I = mr^2$ .

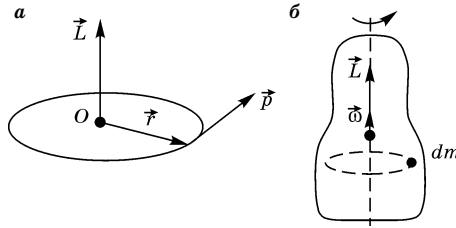


Рис. 1.14

Для а. т. т. объемом  $V$ , представляющим собой совокупность м. т. массой  $dm$ , модуль момента импульса относительно оси вращения запишется так:

$$L = \int_V dL = \int_V dm r^2 \omega = \omega \int_V dm r^2 = I\omega,$$

где

$$I = \int_V dm r^2 \quad (1.39)$$

представляет собой **момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси вращения**. В случае однородного симметричного относительно оси вращения тела (это такое тело, которое при любом повороте вокруг оси вращения совмещается само с собой) направления векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают (рис. 1.14б), и поэтому

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (1.40)$$

Для произвольного а. т. т. момент импульса  $\vec{L}$  определится формулой

$$\vec{L} = \int_V d\vec{L} = \int_V dm [\vec{r} \times \vec{v}], \quad (1.41)$$

из которой следует, что в общем случае вектора  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  не параллельны, и поэтому вектор  $\vec{L}$  не будет направлен вдоль оси вращения.

### 1.3.2. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть к материальной точке массы  $m$  приложена сила  $\vec{F}$ ; ее составляющая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, обозначена как  $\vec{F}_\perp$ . Тогда **моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси вращения** называют вектор, определяемый формулой

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad M = rF_\perp \sin \alpha = F_\perp d, \quad \alpha = (\vec{r}, \vec{F}_\perp), \quad (1.42)$$

где  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от оси вращения к м. т. (рис. 1.15, ось вращения проходит через точку  $O$  перпендикулярно к вектору  $\vec{r}$ );  $d = r \sin \alpha$  — **плечо силы** — кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения; вектор  $\vec{M}$  направлен вдоль оси вращения.

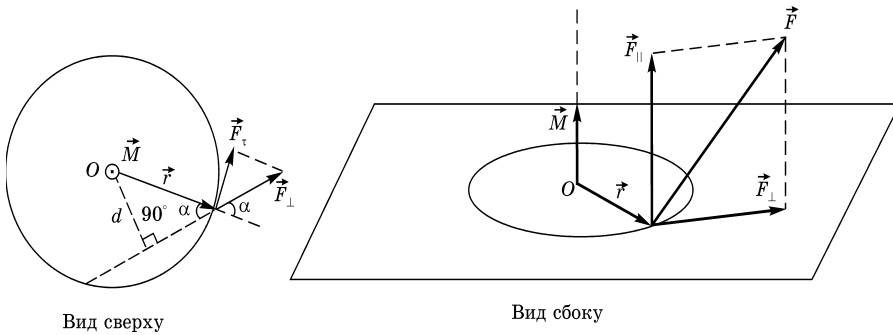


Рис. 1.15

Запишем другое выражение для модуля вектора  $\vec{M}$ , используя проекцию силы  $\vec{F}_\perp$  на направление касательной к окружности (она обозначена  $\vec{F}_\tau$ , см. рис. 1.15); именно  $\vec{F}_\tau$  и вызывает вращательное движение м. т.

$$M = rF_\perp \sin \alpha = rF_\tau = rma_\tau = r m \varepsilon r = m r^2 \varepsilon = I \varepsilon. \quad (1.43)$$

Для абсолютно твердого тела, представляющего собой совокупность м. т. массой  $dm$ , помимо векторной суммы моментов внешних сил  $\vec{M}$ , действующих на него, между точками этого тела действуют также и внутренние силы. Причем векторная сумма моментов  $\vec{M}_{ik}$  внутренних сил относительно оси вращения согласно III закону Ньютона равна нулю, и поэтому

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k(\neq i)}^N \vec{M}_{ik} = 0;$$

$$\vec{M} = \int_V d\vec{M} = \int_V dm r^2 \vec{\varepsilon} = I \vec{\varepsilon}.$$

В итоге можно записать **основной закон динамики вращательного движения для абсолютно твердого тела**, который формулируется следующим образом: произведение момента инерции тела относительно оси вращения на

вектор углового ускорения равно векторной сумме моментов действующих на тело внешних сил относительно этой оси вращения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (1.44)$$

Его также можно записать в другом виде:

$$I\vec{\varepsilon} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.45)$$

Согласно (1.45) производная по времени от вектора момента импульса тела относительно оси вращения равна векторной сумме моментов, действующих на абсолютно твердое тело внешних сил относительно этой оси вращения. Отметим, что все вектора  $d\vec{\varphi}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{L}$  являются псевдовекторами (их называют также аксиальными векторами), их направление связывают с направлением вращения тела. Они не имеют определенной точки приложения (это любая точка на оси вращения). В общем случае вектора  $\vec{M}$  и  $\vec{L}$  вводятся относительно неподвижной точки.

Напомним, что момент инерции для а. т. т. не может быть изменен внутренними силами системы ( $I = \text{const}$ ), чего нельзя сказать о системе, состоящей из нескольких а. т. т. (возникающие при этом эффекты будут рассмотрены дальше).

Уравнения (1.44) и (1.45) позволяют при задании начальных условий ( $t = t_0 : \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0, \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$ ) и действующих на абсолютно твердое тело моментов внешних сил относительно оси вращения решать задачи динамики вращательного движения а. т. т.

Отметим, что в общем случае тело может совершать вращательное движение относительно неподвижной точки (ось вращения, проходящая через эту точку, может менять свое направление в пространстве).

### 1.3.3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Момент инерции а. т. т. (1.39) является мерой инерции тела при его вращательном движении. Он зависит не только от массы  $m$ , но и от ее распределения относительно оси вращения.

Обычно момент инерции тела рассматривают относительно осей, проходящих через его **центр тяжести**. Поэтому прежде всего выясним, как можно найти его для произвольного тела. Для этого воспользуемся следующим свойством центра тяжести тела: через него проходят оси вращения, относительно которых векторная сумма моментов сил тяжести, действующих на разные части тела, равна нулю.

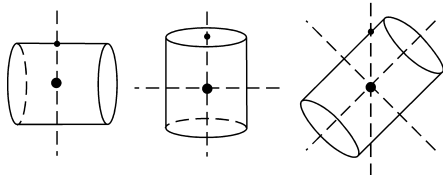


Рис. 1.16

Рассмотрим в качестве примера сплошной однородный цилиндр. Будем подвешивать его за разные точки, лежащие на его поверхности, и проводить через них вертикальные линии (рис. 1.16). Тогда в точке их пересечения будет на-

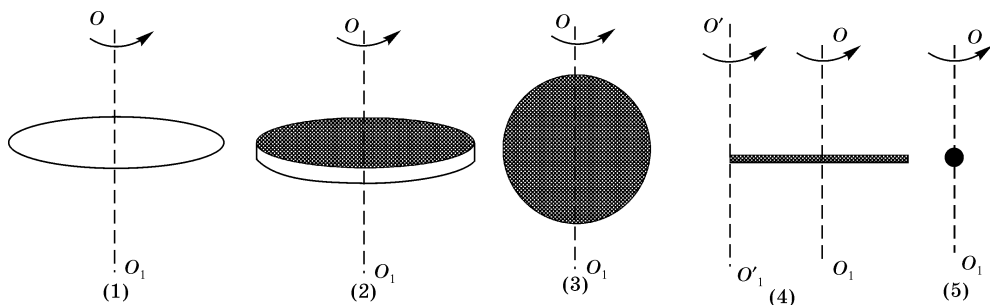


Рис. 1.17

ходиться центр тяжести (он обозначен утолщенной точкой внутри цилиндра). Такую методику можно применять и для произвольного тела.

Приведем формулы для моментов инерции  $I$  тел правильной геометрической формы относительно оси вращения  $OO_1$ , проходящей через их центр тяжести так, как показано на рис. 1.17.

**1. Обруч (или тонкостенный цилиндр) массой  $m$  и радиусом  $r$ :**

$$I = \int_V dm r^2 = r^2 \int_V dm = m r^2. \quad (1.46)$$

**2. Сплошной однородный диск (или цилиндр) массой  $m$ , радиусом  $r$  и высотой  $h$ :**

$$I = \int_V dm r^2 = \int_V \rho dV r^2 = \int_V \rho 2\pi r h dr r^2 = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = \left[ \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h} \right] = \frac{1}{2} m r^2, \quad (1.47)$$

где  $\rho$  — плотность материала диска;  $dV = 2\pi r h dr$  — элементарный объем тела, выбираемый в виде кольцевого слоя радиусом  $r$  толщиной  $dr$  и высотой  $h$ .

**3. Однородный шар с массой  $m$  и радиусом  $r$ :**

$$I = \frac{2}{5} m r^2. \quad (1.48)$$

**4. Тонкий однородный стержень с массой  $m$  и длиной  $l$ :**

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \quad (1.49)$$

**5. Материальная точка массы  $m$  ( $r = 0$ ):**

$$I = 0.$$

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться формулой **теоремы Штейнера**

$$I' = I + m a^2, \quad (1.50)$$

где  $I$ ,  $I'$  — моменты инерции тела массы  $m$  относительно двух осей — оси, проходящей через центр масс тела ( $I$ ) и параллельной ей оси ( $I'$ ), отстоящей от нее на расстояние  $a$  (рис. 1.17(4)).

Так, для оси  $O'O_1$ , проходящей через один из концов тонкого стержня (рис. 1.17(4)), можно получить

$$I' = I + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) m l^2 = \frac{1}{3} m l^2. \quad (1.51)$$

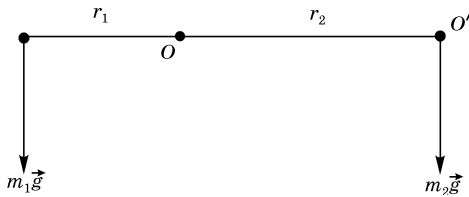


Рис. 1.18

Покажем справедливость теоремы Штейнера на примере тела, состоящего из двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , скрепленных невесомым стержнем. Положение центра тяжести такого тела (точка  $O$ ) найдем, приравняв к нулю векторную сумму моментов сил тяжести,

действующих на м. т. 1 и 2 относительно оси вращения, проходящей через точку  $O$  (ось вращения перпендикулярна плоскости рис. 1.18)

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0, M_1 - M_2 = m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0, m_2 = m_1 r_1 / r_2.$$

Согласно (1.39) моменты инерции рассматриваемого тела относительно осей вращения, проходящих через точки  $O$  ( $I$ ) и  $O'$  ( $I'$ ), запишутся таким образом:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2; I' = m_1 (r_1 + r_2)^2.$$

Найдем теперь момент инерции  $I'$  по теореме Штейнера:

$$\begin{aligned} I' &= I + (m_1 + m_2) r_2^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + (m_1 + m_2) r_2^2 = m_1 r_1^2 + m_1 \frac{r_1}{r_2} r_2^2 + m_1 r_1^2 + m_1 \frac{r_1}{r_2} r_2^2 = \\ &= m_1 (r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2) = m_1 (r_1 + r_2)^2. \end{aligned}$$

Полученные разными способами моменты инерции  $I'$  совпали, что и требовалось показать.

#### 1.3.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  взаимодействующих между собой материальных точек, вращающихся вокруг какой-либо оси. Запишем для каждой м. т. основное уравнение динамики вращательного движения (1.45), выделяя отдельно моменты внешних  $\vec{M}$  и внутренних  $\vec{M}_{ik}$  сил:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k(\neq i)} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i. \quad (1.52)$$

Просуммируем уравнение (1.52) по всем м. т. системы, введем момент импульса  $\vec{L}$  системы и учтем, что согласно III закону Ньютона векторная сумма моментов внутренних сил, действующих на м. т., относительно оси вращения, равна нулю:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i, \sum_{i=1}^N \sum_{k(\neq i)} \vec{M}_{ik} = 0.$$

Тогда (1.52) перепишется так:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i. \quad (1.53)$$

Из формулы (1.53) следует **закон сохранения момента импульса**, согласно которому момент импульса замкнутой системы остается постоянным относительно любой оси вращения

$$\sum_{i=0}^N \vec{M}_i = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const} \quad (1.54)$$

или, используя формулу (1.40),

$$\sum_i I_i \vec{\omega}_i = \text{const}, \quad (1.55)$$

где  $I_i$ ,  $\omega_i$  — момент инерции и угловая скорость вращения  $i$ -й материальной точки системы.

При вращательном движении, как и при поступательном, общая масса тел замкнутой системы остается постоянной, но при вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение массы относительно оси вращения, то есть моменты инерции тел системы. Это при неизменном моменте импульса замкнутой системы приводит к изменению угловой скорости вращения входящих в нее тел.

Приведем ряд примеров, подтверждающих это явление. Учтем, что во всех этих примерах моменты внешних сил (силы тяжести, реакции опоры) относительно вертикальной оси вращения равны нулю, и поэтому момент импульса системы остается постоянным.

**Пример 1.** При переходе человека (м. т.) массой  $m_1$  в центр платформы (однородный диск радиуса  $R$ ) массой  $m_2$  угловая скорость вращения платформы увеличивается (рис. 1.19).

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}'_2 : (m_1 R^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2) \omega_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_2;$$

$$\omega_2 = \omega_1 (m_2 + 2m_1) / m_2, \quad \omega_2 > \omega_1.$$

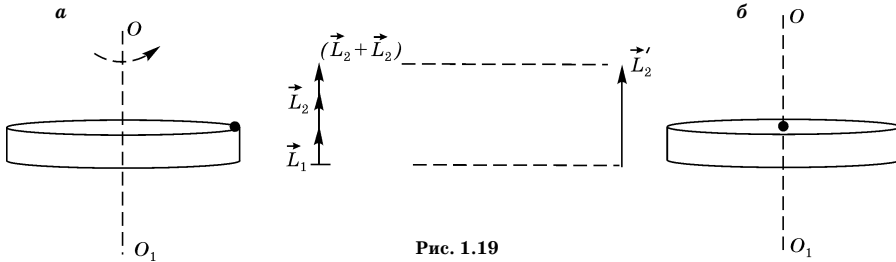


Рис. 1.19

**Пример 2.** При вращении фигуристки изменение положения ее рук приводит к изменению момента инерции фигуристки относительно вертикальной оси вращения и соответственно к изменению угловой скорости ее вращения

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 : I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Если фигуристка прижимает руки к телу, то тем самым она уменьшает свой момент инерции ( $I_2 < I_1$ ) и увеличивает угловую скорость вращения:

$$\omega_2 = \omega_1 (I_1 / I_2) > \omega_1.$$

**Пример 3. Скамья Жуковского.** Человек стоит на скамье (их общий момент инерции относительно оси вращения равен  $I_1$ ) и держит в руках колесо

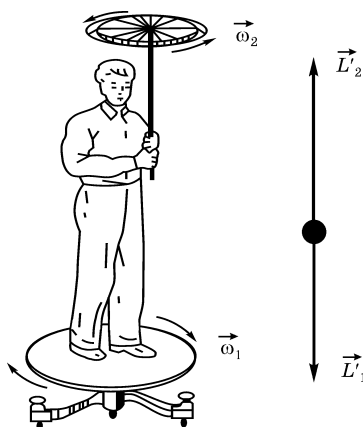


Рис. 1.20

(с моментом инерции  $I_2$ ), способное вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью вращения скамьи (рис. 1.20). Человек приводит во вращение колесо с угловой скоростью  $\omega_2$ . Тогда он со скамьей начнет вращаться в противоположную сторону с угловой скоростью  $\omega_1$ .

$$0 = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2, L'_1 = L'_2, I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \omega_1 = \omega_2 I_2 / I_1.$$

В этом опыте моменты инерции тел системы не изменяются, но внутренние силы совершают работу по изменению угловой скорости вращения входящих в систему тел.

### \*1.3.5. ГИРОСКОПЫ

Под гироскопом понимают быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может произвольно изменять свое положение в пространстве. Например, гироскопами являются детский волчок и массивный диск, закрепленный так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  (рис. 1.21а).

Применяемые в технике гироскопы обычно являются уравновешенными, то есть их центры тяжести совпадают с центром подвеса (точка  $O$ ) и поэтому моменты сил тяжести, действующих на них относительно любой оси вращения, равны нулю. В этом случае гироскоп можно рассматривать как замкнутую систему, для которой выполняется закон сохранения момента импульса.

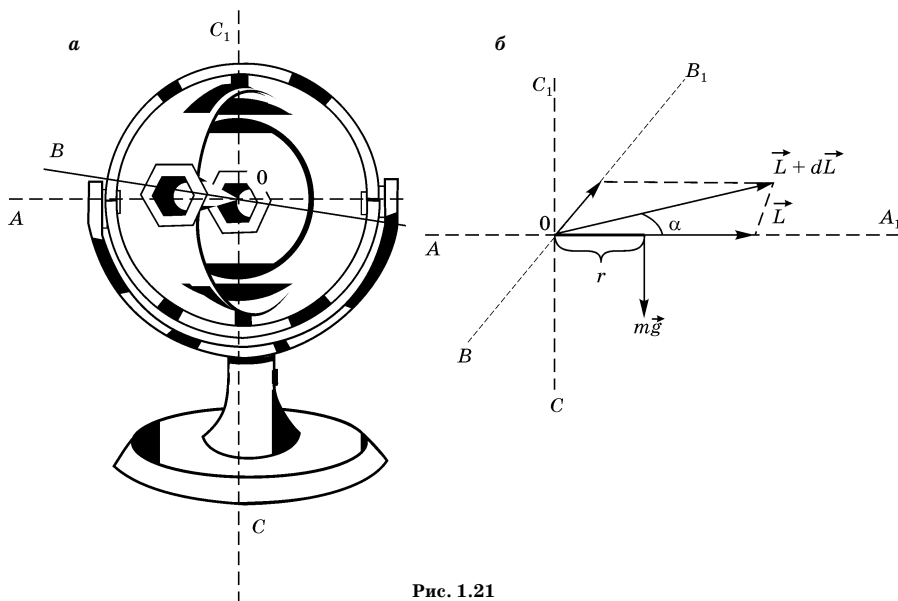


Рис. 1.21



Если раскрутить диск вокруг оси  $AA_1$  с большой угловой скоростью  $\omega$ , то возникающий при этом момент импульса  $\vec{L}$ , направленный вдоль оси вращения  $AA_1$  (рис. 1.21б), будет сохранять свое положение в пространстве и соответственно сохраняет свое направление и ось вращения. Так, например, при повороте подставки, на которой укреплен гироскоп, в ту или иную сторону, положение оси  $AA_1$  останется неизменным из-за того, что момент внешних сил относительно осей вращения будет равен нулю.

Оказывается, направление оси  $AA_1$  практически не изменится и при кратковременных внешних воздействиях, когда момент внешних сил относительно какой-либо оси будет отличным от нуля. Пусть на гироскоп в течение малого промежутка времени  $t$  будет действовать сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная на расстоянии  $r$  от точки  $O$  (рис. 1.21б). Она создаст момент силы  $\vec{M}$ , направленный вдоль оси  $BB_1$ , и согласно уравнению (1.44) приведет к приращению вектора момента импульса  $\vec{L}$ :  $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$ . Вследствие этого ось вращения изменит свое положение в пространстве и установится вдоль нового направления вектора  $(\vec{L} + \Delta\vec{L})$ . Из-за малого времени действия внешней силы и большого модуля вектора  $\vec{L}$  ( $\vec{L} \gg \Delta\vec{L}$ ) направление оси  $AA_1$  в пространстве практически не изменится.

Это свойство гироскопа сохранять первоначальное направление оси вращения при любых его перемещениях и случайных кратковременных воздействиях используется в различных навигационных приборах. В них фиксируется определенное направление оси вращения в пространстве (вертикальное направление, направление на Северный географический полюс Земли и т. д.), относительно которого затем и определяется направление движения объекта и по мере необходимости корректируются курс и местоположение.

Если внешняя сила будет действовать постоянно, то тогда поворот оси  $AA_1$  будет происходить вслед за поворотом вектора  $\vec{L}$  и гироскоп будет вращаться вокруг оси  $CC_1$  с угловой скоростью  $\omega_{\pi}$  (так называемая прецессия).

Кажущаяся на первый взгляд возможность поворота гироскопа вокруг оси  $BB_1$  под действием силы  $m\vec{g}$  опровергается основным уравнением динамики вращательного движения (1.46).

Оценим угловую скорость  $\omega_{\pi}$  прецессии. Так, на основании рис. 1.21б при малом значении угла  $\alpha$  можно записать:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \omega_{\pi} \Delta t = \frac{M \Delta t}{L}, \quad \omega_{\pi} = \frac{M}{L} = \frac{mgr}{I \omega}, \quad \omega_{\pi} = \frac{mgr}{I \omega}, \quad (1.56)$$

где  $I$  — момент инерции гироскопа.

При винтовой нарезке ствола ружья или орудия такое движение (прецессию) совершает пуля или снаряд вокруг оси вращения, направленной в каждый момент времени по скорости их движения, то есть по касательной к траектории. Это увеличивает дальность и устойчивость полета пули и снаряда, способствует попаданию их в цель лобовой частью, увеличивает точность попадания ввиду отсутствия кувыркания пули и снаряда при их полете.

### 1.3.6. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА. АНАЛОГИИ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Из рассмотренных выше особенностей поступательного и вращательного движений абсолютно твердого тела можно сделать вывод о том, что оно будет находиться относительно инерциальной системы отсчета (ИСО) в равновесии (в частности, в состоянии покоя) либо будет двигаться равномерно и прямолинейно в соответствии с движением его центра масс тогда, когда — 1) векторная сумма внешних сил, действующих на тело, будет равна нулю и 2) когда векторная сумма моментов внешних сил относительно любой точки (через них могут проходить различные оси вращения) также будет равна нулю»

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i, \text{внеш}} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \vec{M}_{i, \text{внеш}} = 0. \quad (1.57)$$

В заключение этого раздела приведем таблицу аналогий между характеристиками вращательного и поступательного движений тела (табл. 1). Она позволяет на основе известных формул поступательного движения достаточно легко записывать формулы для вращательного движения, видеть взаимосвязь между этими видами движения и способствует более успешному усвоению материала. В качестве примера использования таблицы аналогий запишем ряд формул:

$$\begin{aligned} l &= v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, v = v_0 \pm at \Rightarrow \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t; \\ \vec{p} &= m\vec{v} \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}; \\ \vec{F} &= m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \\ dA &= \vec{F}d\vec{r} = F_S dS = mv dv \Rightarrow dA = \vec{M}d\vec{\varphi} = M_Z d\varphi = I\omega d\omega; \\ W_k &= \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \end{aligned}$$

Таблица 1

**Таблица аналогий между характеристиками вращательного  
и поступательного движений тела**

| Прямолинейное движение                  | Вращательное движение                             | Формулы связи между модулями линейных и угловых характеристик |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Путь $l$                                | Угловой путь $\varphi$                            | $l = \varphi r$ , $r$ — радиус окружности                     |
| Элементарное перемещение $d\vec{r}$     | Элементарное угловое перемещение $d\vec{\varphi}$ | $dr = r d\varphi$                                             |
| Линейная скорость $\vec{v}$             | Угловая скорость $\vec{\omega}$                   | $v = \omega r$                                                |
| Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ | Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$             | $a_\tau = \varepsilon r$                                      |
| Масса тела $m$                          | Момент инерции $I$                                | $I = \int_v dm r^2$                                           |
| Сила $\vec{F}$                          | Момент силы $\vec{M}$                             | $M = r F \sin \alpha = r F_\tau$                              |
| Импульс $\vec{p}$                       | Момент импульса тела $\vec{L}$                    | $L = rp$                                                      |
| —                                       | Нормальное ускорение $\vec{a}_n$                  | $a_n = v^2/r$                                                 |

## 1.4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

Понятия энергии и работы можно рассматривать с различных точек зрения, выявляя при этом существенные аспекты их взаимосвязи с различными физическими понятиями и процессами. Наиболее общий подход связывает их с материей. Все, что нас окружает, называют материей. Она существует в непрерывном движении, постоянно происходят взаимные превращения различных форм ее движения (в частности механической, тепловой, электромагнитной, ядерной) друг в друга. Количественной мерой различных форм движения материи является энергия, а их взаимных превращений — работа.

Из неуничтожимости движения следует тот факт, что суммарная энергия всех форм движения материи в замкнутой системе не исчезает и не возникает из ничего.

В механике изменение механической энергии связано с взаимодействием тел, с работой сил, действующих на тело. Понятие работы играет важную роль в жизни человека, являясь количественной мерой производимых им усилий на обеспечение своей жизнедеятельности.

### 1.4.1. РАБОТА СИЛЫ. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Под элементарной работой  $dA$ , совершаемой силой  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{r}$ , называют величину, равную скалярному произведению  $\vec{F}$  на  $d\vec{r}$ :

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dS \cos \alpha = F_S dS, \quad (1.58)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ,  $dS = |d\vec{r}|$  — элементарный путь, пройденный точкой приложения силы;  $F_S$  — проекция силы на вектор  $d\vec{r}$  (рис. 1.22а)

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_S dS. \quad (1.59)$$

Если сила постоянна ( $\vec{F} = \text{const}$ ), то ее работа на прямолинейном участке длиной  $l$  запишется следующим образом ( $l = S$ ):

$$A_{12} = Fl \cos \alpha. \quad (1.60)$$

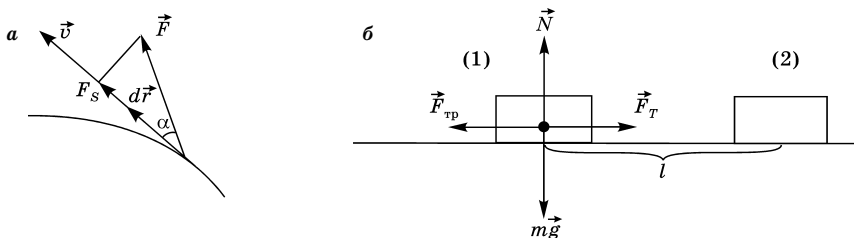


Рис. 1.22

Работа силы может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Так, работы постоянных сил, приложенных к телу (см. рис. 1.22б) на горизонтальном участке пути  $l$ :

$$A_N = A_{mg} = 0; A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}l; A_F = Fl.$$

Чтобы ввести понятие о кинетической энергии  $W_k$  тела, запишем элементарную работу  $dA$  силы  $\vec{F}$  в другом виде (см. 1.2.2):

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} = m\vec{v}(d\vec{v}_{\perp} + d\vec{v}_{\parallel}) = m\vec{v}d\vec{v}_{\perp} + m\vec{v}d\vec{v}_{\parallel} = mvdv. \quad (1.61)$$

Тогда для работы силы  $\vec{F}$ , переводящей тело из состояния (1) (скорость тела  $\vec{v}_1$ ) в состояние (2) (скорость тела  $\vec{v}_2$ ) можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k.$$

Из полученной формулы следует, что работа силы равна разности двух величин, определяющих начальное (скорость  $\vec{v}_1$ ) и конечное (скорость  $\vec{v}_2$ ) состояния тела. При этом условия перехода из состояния (1) в состояние (2) не оказывают влияния на записанное выражение. Поэтому можно ввести функцию состояния тела, его кинетическую энергию  $W_k$  как *скалярную физическую величину (СФВ), характеризующую способность тела совершать работу за счет изменения скорости его движения*

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \text{const.}$$

В этом выражении постоянную величину выбирают, предположив, что при нулевой скорости движения тела его кинетическая энергия равна нулю, поэтому

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.62)$$

Кинетическая энергия тел не зависит от того, как была достигнута данная скорость  $v$ , она является функцией состояния тела, положительной величиной, зависящей от выбора системы отсчета.

Введение  $W_k$  позволяет сформулировать теорему о кинетической энергии, согласно которой алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии тела:

$$A_1 + A_2 + \dots = \Delta W_k, \quad \sum_i dA_i = dW_k. \quad (1.63)$$

Эта теорема широко используется для анализа взаимодействия тел не только в механике, но и в других разделах курса физики, таких как электростатика, постоянный ток, электромагнетизм, колебания и волны и т. д.

### 1.4.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Возьмем а. т. т., вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис. 1.14б). Представим тело в виде совокупности м. т. массой  $dm$ , тогда для кинетической энергии тела можно записать:

$$W_k = \int dW_k = \int \frac{dmv^2}{2} = \int \frac{dm\omega^2 r^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int_V dm r^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.64)$$

Возможен случай, когда тело одновременно участвует в поступательном (плоском) и вращательном движениях (например движение цилиндра без скольжения по плоскости, рис. 1.23а). Тогда его кинетическую энергию можно рассматривать как сумму кинетических энергий поступательного движения тела со скоростью  $\vec{v}$  вместе с осью вращения, проходящей через его центр масс (точка  $O$ ), и вращательного движения тела относительно этой оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ :

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.65)$$

Для сплошного ( $I_1 = 1/2 mR^2$ ) и тонкостенного ( $I_2 = mR^2$ ) цилиндров одинаковой массы  $m$  и радиуса  $R$  кинетические энергии запишутся таким образом:

$$W_{k1} = \frac{3mv^2}{4}, \quad W_{k2} = mv^2.$$

Полученные формулы для кинетической энергии цилиндров позволяют объяснить опыт по различию времени их скатывания с наклонной плоскости высотой  $h$  и длиной  $l$  (рис. 1.23б). Согласно закону сохранения энергии (силой трения при движении цилиндров практически можно пренебречь), получим

$$mgh = \frac{3mv_1^2}{4} = mv_2^2 \Rightarrow v_2 < v_1,$$

где  $v_1, v_2$  — скорости сплошного и полого цилиндров у основания наклонной плоскости.

При скатывании цилиндров центр их масс движется равноускоренно без начальной скорости, поэтому согласно формуле (1.13) можно записать:

$$l = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{v_2 t_2}{2} \Rightarrow t_2 > t_1,$$

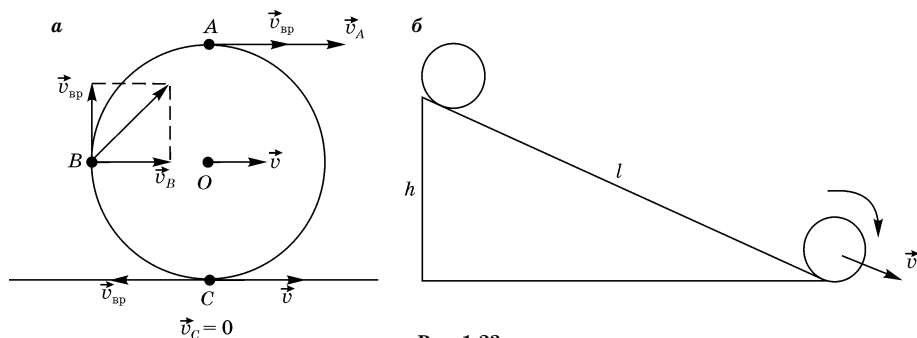


Рис. 1.23

то есть на скатывание полого цилиндра требуется большее время, чем для сплошного цилиндра.

Качественно это можно объяснить тем, что полый цилиндр является более инертным, чем сплошной (для него момент инерции относительно оси вращения больше), поэтому он медленнее изменяет свою скорость и соответственно тратит больше времени на скатывание с наклонной плоскости.

Как видно из рис. 1.23а, модули скоростей точек на поверхности цилиндра будут разными ( $v_B = 0$ ,  $v_C = \sqrt{2}v$ ,  $v_A = 2v$ ), так как эти точки участвуют одновременно и в поступательном, и во вращательном движениях со скоростями  $\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{v}$  и  $\vec{v}_{\text{вр}}$ , причем  $\vec{v}_{\text{вр}}$  для каждой точки направлена по касательной к поверхности цилиндра и равна по модулю  $v$  ( $\vec{v}_{\text{общ}} = \vec{v}_{\text{пост}} + \vec{v}_{\text{вр}} = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вр}}$ ).

Отметим, что движение цилиндра можно рассматривать и как ряд последовательных вращений вокруг мгновенной оси, проходящей через точку С (рис. 1.23а) с угловой скоростью  $\omega$ . Причем и в этом случае кинетическая энергия тела также определяется формулой (1.65).

#### 1.4.3. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ ПО ВРАЩЕНИЮ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Запишем формулу для элементарной работы силы  $\vec{F}$  по вращению тела вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.15, формула (1.45)):

$$\begin{aligned} dA &= F_S dS = F_S r d\varphi = M_Z d\varphi = (I\varepsilon) d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I\omega d\omega; \\ dA &= \vec{M} d\vec{\varphi} = M_Z d\varphi = I\omega d\omega, \end{aligned} \quad (1.66)$$

где в зависимости от направления векторов  $\vec{M}$  и  $d\vec{\varphi}$  можно получить замедленное вращение тела ( $\vec{M} \uparrow \downarrow d\vec{\varphi} \Rightarrow$  проекция на ось вращения  $M_Z < 0$ ) и ускоренное вращение тела ( $\vec{M} \uparrow \uparrow d\vec{\varphi} \Rightarrow$  проекция  $M_Z > 0$ ).

Работа внешних сил по изменению угловой скорости от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  на конечном угловом перемещении  $\Delta\varphi = (\varphi - \varphi_0)$  определится так:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k. \quad (1.67)$$

Формула (1.67) представляет собой теорему о кинетической энергии в случае вращательного движения тела.

#### 1.4.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Под **потенциальной энергией**  $W_p$  взаимодействующих тел или частей одного тела понимают СФВ, характеризующую их способность совершать работу за счет изменения взаимного расположения тел или частей одного тела. Потенциальная энергия в одинаковой степени характеризует все взаимодействующие тела или их части. При этом между ними действуют *консерватив-*

ные силы, чья работа не зависит от траектории движения тел, но определяется их начальными и конечными положениями.

При наличии только консервативных сил потенциальную энергию взаимодействия системы, состоящей из  $N$  тел (м. т.), можно представить в виде потенциальных энергий попарного их взаимодействия друг с другом и с внешними телами (с номерами от  $(N + 1)$  до  $(N + L)$ ):

$$W_{PC} = 1/2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1(k \neq i)}^N W_{pik} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{N+L} W_{pik}, \quad (1.68)$$

где  $W_{pik}$  — потенциальная энергия взаимодействия тел с номерами  $i$  и  $k$ . Коэффициент  $1/2$  связан с тем, что потенциальная энергия взаимодействия тел  $i$  и  $k$  встречается в формуле (1.68) два раза (например,  $W_{p_{12}}$  и  $W_{p_{21}}$ ). В сумме исключаются слагаемые, для которых значения  $i$  и  $k$  совпадают. Для замкнутой системы второго слагаемого, описывающего взаимодействие тел системы с внешними телами, в формуле (1.68) не будет.

Потенциальные взаимодействия обычно принято описывать посредством понятия силового поля: считается, что одно тело взаимодействует в месте своего расположения с силовым полем, созданным другими телами. Такой подход удобно использовать в том случае, когда движение одного тела (например первого) слабо влияет на движение другого (второго). Тогда можно считать, что первое тело находится в потенциальном поле, созданном вторым телом, и потенциальную энергию их взаимодействия приписать первому телу. Так, например, говорят о потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли, о потенциальной энергии заряда в электрическом поле и т. д. При этом движение тела (заряда) слабо влияет на силовое поле, в котором оно движется.

Вспомним, что обычно говорят: тело падает на Землю, а не Земля падает на тело. Этим самым отмечают тот факт, что движение тела практически не изменяет положение Земли.

Примерами консервативных сил в механике являются силы тяготения и упругости, а неконсервативных — силы трения, сопротивления, тяги, силы химических реакций, возникающих при разрыве снаряда, при выстреле и т. д.

Название «консервативные» силы связано с тем, что полная механическая энергия  $W_M$  системы тел, взаимодействующих между собой посредством только консервативных сил, сохраняется.

Выведем формулы для потенциальных энергий взаимодействия тел, между которыми действуют силы тяготения и силы упругости.

**1. Потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли.** Между телом (м. т.) массой  $m$  и Землей (однородный шар радиуса  $R_3$ ) массой  $M_3$  действует сила тяготения:

$$F_T = G \frac{mM_3}{r^2}, \quad r \geq R_3,$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $r$  — расстояние от центра Земли до тела (рис. 1.24а).

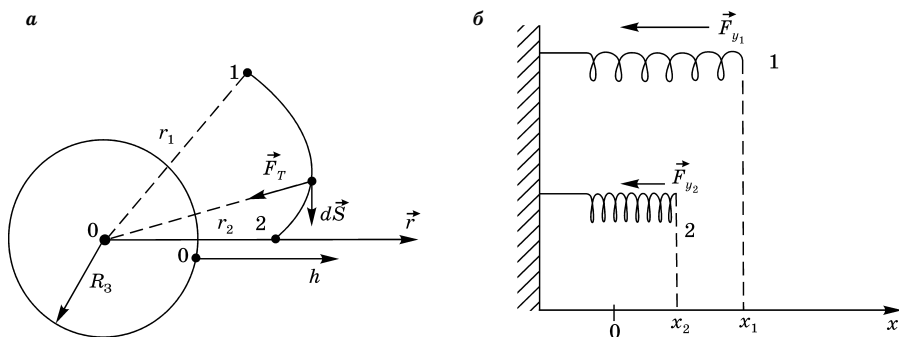


Рис 1.24

Рассчитаем работу  $A_{12}$  силы тяготения при переходе тела из точки 1 в точку 2 (они находятся соответственно на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра Земли):

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_T |dr| \cos \alpha = - \int_1^2 F_T dr = -GmM_3 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \left( -\frac{GmM_3}{r_1} \right) - \left( -\frac{GmM_3}{r_2} \right).
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

Из формулы (1.69) следует, что работа силы тяготения определяется убылью величин, зависящих только от начального и конечного положения тела и Земли. Значит, силы тяготения являются консервативными силами, а сами эти величины представляют собой потенциальные энергии гравитационного взаимодействия тела и Земли:

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r} + \text{const.} \tag{1.70}$$

Потенциальная энергия  $W_p$  определяется с точностью до постоянной величины; ее нулевой уровень отсчета выбирается произвольно для удобства решения конкретных задач. Можно этот выбор провести следующим образом: считать, что при  $r \rightarrow \infty$ ,  $W_p \rightarrow 0$ :

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r}, \quad r \geq R_3. \tag{1.71}$$

Как уже отмечалось выше, формулу (1.70) можно рассматривать как формулу потенциальной энергии тела в гравитационном поле, созданном Землей. В этом случае нулевой уровень отсчета  $W_p$  удобно выбирать на поверхности Земли ( $h = 0$ ,  $W_p = 0$ ,  $h \ll R_3$ ):

$$W_p = G \frac{mM_3}{R_3 r} (r - R_3) = mg_0 h \frac{R_3}{R_3 + h} \approx h \ll R_3 := mg_0 h, \quad h \geq 0, \tag{1.72}$$

где  $g_0 = GM_3 / R_3^2 = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения на уровне океана;  $h$  — высота тела над поверхностью Земли ( $h = 0$ ,  $r = R_3$ ).



**2. Потенциальная энергия упругодеформированного тела.** Рассмотрим работу силы упругости при сжатии пружины из состояния 1 до состояния 2 (рис. 1.24б) с координатами  $x_1$  и  $x_2$  соответственно:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_y |d\vec{s}| \cos \alpha = - \int_{x_1}^{x_2} F_y dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2}. \quad (1.73)$$

Из (1.73) следует, что сила упругости является консервативной силой, а величина  $W_p = \frac{kx^2}{2}$  — суммарная взаимная потенциальная энергия всех частей упругодеформированного тела (см. формулу (1.68)).

Обобщая формулы (1.69) и (1.73), можно сформулировать **теорему о потенциальной энергии**: *работа консервативных сил, действующих между телами или частями одного тела, равна убыли их взаимной потенциальной энергии.*

Для тела, движение которого слабо влияет на движение другого тела, создающего силовое поле, **теорему о потенциальной энергии** можно сформулировать так: *работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела в поле этих сил:*

$$\sum_i dA_{\text{конс}} = -\Delta W_p, \quad dA_{\text{конс}} = -dW_p. \quad (1.74)$$

#### 1.4.5. ФОРМУЛА СВЯЗИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ $W_p$ И КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛЫ $F_K$

Между консервативной силой  $\vec{F}_K$ , действующей между телами, и потенциальной энергией их взаимодействия  $W_p$  существуют определенные формулы взаимосвязи, найдем их. Для этого запишем выражение для элементарной работы консервативной силы вдоль произвольного направления  $\vec{r}$  ( $|d\vec{s}| = |d\vec{r}| = dr > 0$ ) и подставим его в теорему о потенциальной энергии (1.74). Тогда

$$dA_{\text{конс}} = F_{K_r} dr = -dW_p, \\ F_{K_r} = -\frac{dW_p}{dr}. \quad (1.75)$$

Выбирая направление  $\vec{r}$ , совпадающее с направлениями координатных осей, можно оценить проекции силы  $\vec{F}$  на эти оси и записать формулу взаимосвязи вектора силы  $\vec{F}_K$  и потенциальной энергии  $W_p$ :

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}, \\ \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \\ F_k = -\text{grad} W_p = -\nabla W_p, \quad |\text{grad} W_p| = |\nabla W_p| = \frac{dW_p}{dl}. \quad (1.76)$$

Направление градиента потенциальной энергии в данной точке пространства в формуле (1.76) обозначено как  $\vec{l}$  (о градиенте см. Прил. 1 (1.8)).

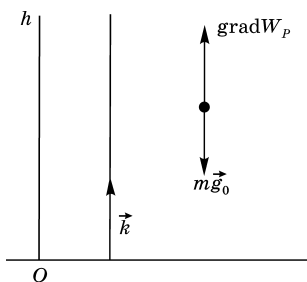


Рис. 1.25

Итак, согласно выражению (1.76) консервативная сила, действующая между телами, в каждой точке пространства равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии взаимодействия этих тел.

Проверим полученную формулу (1.76) для поля тяготения Земли ( $h \ll R_3$ ,  $\vec{F}_T = m\vec{g}_0$ , рис. 1.25). Из формулы (1.72) следует:

$$W_p = m g_0 h = m g_0 z,$$

$$\text{grad} W_p = \frac{\partial}{\partial z} (m g_0 z) \vec{k} = m g_0 \vec{k},$$

$$\vec{F}_k = m \vec{g}_0 = -m g_0 \vec{k} \Rightarrow \vec{F}_k = -\text{grad} W_p,$$

что и требовалось показать.

#### 1.4.6.

### МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

**Полной механической энергией  $W_M$**  системы тел называют сумму кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$W_M = W_k + W_p. \quad (1.77)$$

Ранее уже отмечалось, что следствием неуничтожимости движения материи является справедливость закона сохранения всех видов энергий (механической, тепловой, электромагнитной, ядерной и т. д.) для замкнутой системы:

$$W_M + W_{\text{тепл}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{яд}} + \dots = \text{const}. \quad (1.78)$$

В такой системе механическая энергия может изменяться за счет работы неконсервативных сил: они переводят ее в другие виды энергии (механическая энергия уменьшается, происходит ее диссипация, рассеяние) и, наоборот, другие виды энергии переходят в механическую энергию (она возрастает).

Покажем это, используя теоремы о кинетической энергии (1.63) и потенциальной энергии (1.74):

$$\Delta W_M = \Delta(W_k + W_p) = \Delta W_k + \Delta W_p = (A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}) + (-A_{\text{конс}}) = A_{\text{неконс}},$$

$$\Delta W_M = A_{\text{неконс}}. \quad (1.79)$$

Среди всех неконсервативных сил выделяют **диссипативные силы**, приводящие к уменьшению механической энергии системы. К ним, например, относят силы трения и сопротивления. Так, например, шарик, катящийся по горизонтальной поверхности, с течением времени останавливается из-за того, что работа силы трения переводит часть его механической энергии в тепловую:

$$\Delta W_M = \Delta W_k + \Delta W_p = \Delta W_k = A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l < 0.$$

Если же в замкнутой системе действуют только консервативные силы (такая система называется **замкнутой консервативной системой** — з. к. с.), то тогда в ней выполняется **закон сохранения механической энергии**, который гласит: *механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной* —  $W_M = \text{const}$ .

Если такая система, между телами которой действуют только консервативные силы, находится во внешнем поле консервативных сил (открытая консервативная система — о. к. с.), то и для нее выполняется закон сохранения механической энергии:  $W_M = \text{const}$ . Это связано с тем, что потенциальная энергия системы является суммой парных потенциальных энергий взаимодействий тел друг с другом (1.68) независимо от того, входят эти тела в состав системы или нет, и поэтому теорема о потенциальной энергии (1.74) будет справедлива и в этом случае. Так, например, падение тела из состояния покоя в поле тяготения Земли в отсутствие сил сопротивления воздуха можно рассматривать в двух системах. Одна из них является открытой консервативной системой, включающей в себя только падающее тело (тогда падение тела происходит во внешнем силовом поле, созданном Землей и тело обладает потенциальной энергией в этом поле). Вторая система является замкнутой консервативной системой, она включает в себя тело и Землю.

Можно отметить, что формула, связывающая изменения механической энергии замкнутой системы с работой внутренних неконсервативных сил (1.79), применима и для вращательного движения. Например, при вращении фигуристки ее момент импульса относительно вертикальной оси вращения остается постоянным ( $\vec{L} = \text{const}$ ), а момент инерции зависит от положения ее рук ( $I$  изменяется), и поэтому ее кинетическая энергия  $W_k = I\omega^2/2 = L^2/2I$  будет изменяться за счет работы неконсервативных внутренних сил системы.

#### 1.4.7. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Обсудим кратко значение записанных выше формул (1.75) и (1.76). В квантовой механике при изучении движения частиц малой массы (микрочастиц) вместо действующих на них сил задают потенциальную энергию частиц во внешнем потенциальном поле (говорят, задают вид потенциального поля), в котором они движутся. График зависимости потенциальной энергии частицы от координат называют **потенциальной кривой**. Использование выражений (1.75) и (1.76) позволяет на основе заданного вида потенциальной кривой изучать характер движения и взаимодействия частиц и тем самым предлагать модели объяснения различных физических свойств веществ.

В качестве примера на рис. 1.26 приведена потенциальная кривая взаимодействия двух частиц (молекул) в зависимости от расстояния между ними — одна частица закреплена в начале оси  $r$  ( $r = 0$ ) и считается неподвижной, а другая — на расстоянии  $r$  от нее. Тогда согласно формуле (1.75) проекция результирующей силы на ось  $r$  в какой-либо точке оси  $r$  будет равна тангенсу угла наклона касательной к графику  $W_p(r)$ :  $F_{kr} = -\text{tg } \alpha$ .

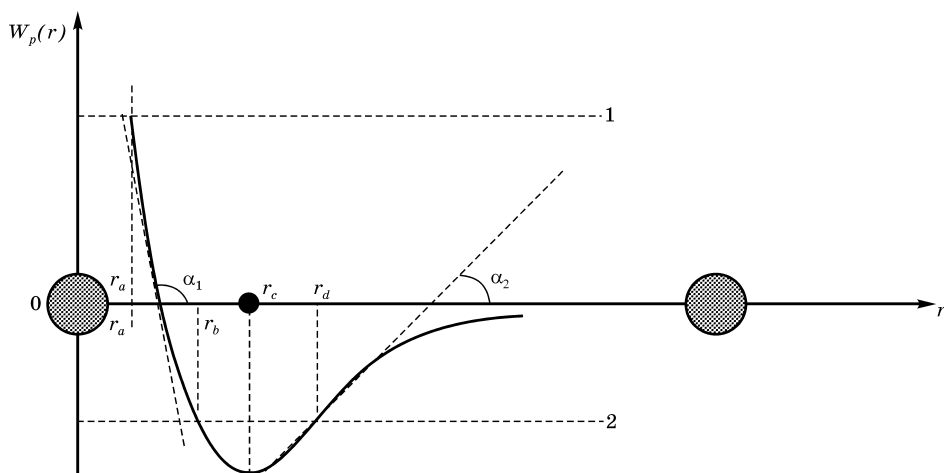


Рис. 1.26

**В первом случае** полная механическая энергия частицы является положительной, что соответствует движению частицы в реальных газах. Как видно из рис. 1.26, движение частицы будет поступательным от одного столкновения до другого. На расстояниях  $r > r_c$  действующая на частицу результирующая сила будет силой притяжения ( $r = r_d, F_{kr} = -\text{tg}\alpha_2 > 0$ ), а при  $r < r_c$  — силой отталкивания ( $r = r_a, F_{kr} = -\text{tg}\alpha_1 > 0$ ). При  $r = r_a$  механическая энергия частицы будет равна ее потенциальной энергии, то есть кинетическая энергия частицы обращается в ноль и частица сталкивается с другой частицей, в результате чего меняет направление движения (частица налетает на потенциальный барьер и отражается, отскакивает от него).

**Во втором случае** полная механическая энергия частицы отрицательна, и, как следует из рис. 1.26, в жидкостях и твердых телах частица совершает колебательное движение в ограниченной области пространства ( $r_b \leq r \leq r_d$ ), в потенциальной яме, созданной взаимодействием частиц. Расстояние  $r = r_c$  соответствует положению устойчивого равновесия (потенциальная энергия частицы будет наименьшей).

Движение частицы вдоль оси  $r$  от  $r = r_b$  за счет сил отталкивания будет ускоренным ( $F_{kr} = -\text{tg}\alpha > 0$ ), оно переходит в замедленное движение при  $r > r_c$  за счет сил притяжения. Точкам  $r = r_b$  и  $r = r_d$  соответствуют точки поворота в движении частицы.

При увеличении температуры жидкости или твердого тела полная механическая энергия частицы возрастает, амплитуда ее колебаний увеличивается и за счет несимметричности потенциальной кривой происходит тепловое расширение жидкостей и твердых тел.

Задавая различные виды потенциальных кривых, например для электронов в твердом теле, можно прийти к хорошо известным моделям описания электронного газа — модели свободных электронов, приближения сильной и слабой связи, которые широко используются для объяснения различных свойств веществ.

**1.4.8.**  
**ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА**  
**И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К АНАЛИЗУ**  
**АБСОЛЮТНО УПРУГОГО**  
**И НЕУПРУГОГО СТОЛКНОВЕНИЙ**

Как уже отмечалось ранее, законы сохранения позволяют получить важную информацию о взаимодействии тел без детального решения II закона Ньютона. Рассмотрим ряд важных для практики примеров.

**1. Абсолютно неупругий удар** — это удар, в результате которого тела после соударения движутся вместе как единое целое. Пусть движущееся со скоростью  $\vec{v}_1$  тело массы  $m_1$  сталкивается с движущимся со скоростью  $\vec{v}_2$  телом массы  $m_2$ , в результате чего их скорость оказывается равной  $\vec{u}$  (рис. 1.27).

Если эти тела образуют замкнутую систему, то для нее можно записать закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

из которого следует, что скорость  $\vec{u}$  тел после удара составит:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad u = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \alpha}. \quad (1.80)$$

При таком ударе возникают неконсервативные силы (силы сопротивления), которые переводят часть механической энергии соударяющихся тел в тепловую энергию:

$$\begin{aligned} A_{\text{сопр}} &= \Delta W_M = \Delta W_K = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (1.81)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ .

В качестве примера рассмотрим взаимодействие молота (масса  $m_1$ , скорость в момент удара  $\vec{v}_1$ ) и наковальни (масса  $m_2 \gg m_1$ ,  $\vec{v}_2 = 0$ ) при ковке куска металла. Из формул (1.80) и (1.81) получим:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad A_{\text{сопр}} = \Delta W_M = -\frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}; \\ \eta &= \frac{|\Delta W_M|}{W_{M1}} = \frac{|A_{\text{сопр}}|}{W_{M1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Как следует из выражения (1.82), КПД удара  $\eta$  тем выше, чем больше различие в массах наковальни и молота. В этом случае большая доля механической

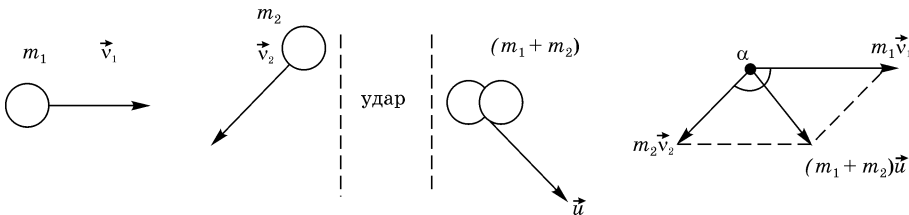


Рис. 1.27

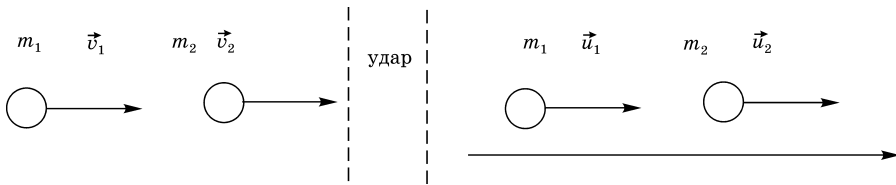


Рис. 1.28

энергии молота переходит во внутреннюю энергию куска металла, идет на его деформацию.

**2. Абсолютно упругий центральный удар** — это удар, при котором, помимо закона сохранения импульса, выполняется также и закон сохранения механической энергии. При таком ударе деформации тел, возникающие в момент соударения, после столкновения полностью исчезают. При центральном ударе тела до и после соударения движутся по одной прямой.

Пусть движущееся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $\vec{v}_1$  тело массы  $m_1$  сталкивается с движущимся вдоль ( $v_1 > v_2$ ) или против оси  $Ox$  со скоростью  $\vec{v}_2$  телом массы  $m_2$ , в результате чего их скорости оказываются равными  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  (рис. 1.28). Используя для замкнутой системы, состоящей из двух тел, законы сохранения импульса и механической энергии, найдем проекции скоростей  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  тел на ось  $Ox$  после их соударения:

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \Rightarrow m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1(v_1 - u_{1X})(v_1 + u_{1X}) = m_2(u_{2X} - v_{2X})(u_{2X} + v_{2X});$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \Rightarrow m_1(v_1 - u_{1X}) = m_2(u_{2X} - v_{2X}). \quad (**)$$

Учитывая выражение (\*), можно упростить формулу (\*):

$$v_1 + u_{1X} = u_{2X} + v_{2X} \Rightarrow u_{2X} = u_{1X} + v_1 - v_{2X}.$$

Подставляя  $u_{2X}$  в (\*\*), получим:

$$m_1(v_1 - u_{1X}) = m_2(u_{1X} + v_1 - v_{2X} - v_{2X}),$$

$$u_{1X} = \frac{2m_2 v_{2X} + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_{2X} = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_{2X}}{m_1 + m_2}. \quad (1.83)$$

Рассмотрим ряд важных для практики частных случаев использования формул (1.83).

**Пример 1.** Два тела одинаковой массы ( $m_1 = m_2$ ), движущиеся вдоль оси  $ox$  со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  ( $v_1 > v_2$ ) навстречу друг другу ( $v_{1X} = v_1$ ,  $v_{2X} = -v_2$ ), испытывают упругое соударение, в результате которого согласно формулам (1.83) происходит обмен их скоростями:  $u_{1X} = v_{2X} = -v_2$ ,  $u_{2X} = v_1$ . При  $v_2 = 0$  получим, что скорость первого тела за одно соударение снизится до нуля:  $u_{1X} = 0$ .

В ядерных реакторах необходимо проводить эффективное уменьшение скорости нейтронов, возникающих при реакциях деления, от скоростей порядка  $1 \cdot 10^7$  м/с до скоростей, соответствующих скорости их теплового дви-

жения при температуре  $T = 300 \text{ К}$  ( $\approx 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ). Как следует из рассмотренного примера, для этого необходимо заставить нейтроны испытывать соударения с близкими по массе атомами водорода, входящими в состав воды  $\text{H}_2\text{O}$  (скорость атомов водорода можно считать практически равной нулю по сравнению со скоростью нейтронов). Однако из-за большой потери нейтронов, связанных с протеканием при таких столкновениях реакций образования атомов тяжелого водорода ( ${}^2_1\text{H}$ ), используют в качестве замедлителя тяжелую воду ( $\text{D}_2\text{O}$ ). При этом требуется порядка 10 столкновений для требуемого замедления скорости нейтронов.

**Пример 2.** Тело массы  $m_1$ , движущееся со скоростью  $\vec{v}_1$ , упруго ударяется о неподвижное тело, масса которого существенно больше  $m_1$  ( $\vec{v}_2 = 0$ ,  $m_2 \gg m_1$ ). Согласно формулам (1.83) после столкновения первое тело будет двигаться в обратном направлении с той же по модулю скоростью, а второе тело практически останется неподвижным ( $u_{1X} = -v_1$ ,  $u_{2X} \approx 0$ ). Такое столкновение происходит при лобовом ударе молекулы о стенку сосуда. При этом молекула упруго (без потери скорости) отскакивает обратно, а стенка остается практически неподвижной. Результаты столкновения молекулы со стенкой сосуда используются при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории для давления идеального газа.

Если же стенка (поршень) будет двигаться вдоль оси  $ox$  со скоростью  $\vec{v}_2$ , то, как следует из формул (1.83), в результате столкновения молекула теряет часть своей скорости ( $u_{1X} = -v_1 + 2v_2$ ,  $v_1 \gg v_2$ ), а скорость поршня останется неизменной ( $u_{2X} = v_2$ ). Это означает, что расширение газа, возникающее при движении поршня, в отсутствие теплопередачи (отсутствуют внешние источники увеличения средней скорости теплового движения молекул) приводит к его охлаждению (средние скорости движения молекул уменьшаются), так как работа газа происходит за счет уменьшения его внутренней энергии.

## 1.5. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Среди революционных открытий в физике в конце XIX — начале XX века: В. Рентген открыл новый вид излучения (1895), А. С. Попов изобрел радио (1896), Дж. Томсон открыл элементарный электрический заряд (1897), А. Беккерель открыл естественную радиоактивность урана (1896) — выделяется высказанная в 1900 г. чуждая классической физике квантовая гипотеза М. Планка, согласно которой атомы излучают электромагнитные волны не непрерывно, а отдельными порциями энергии (квантами). Началом развития современной физики считают 1905 г., когда А. Эйнштейном была создана специальная теория относительности, превратившая идеи М. Планка в теорию квантов света. Так было положено начало новой физической картины мира — квантово-релятивистской.

Специальная теория относительности (С. Т. О.) изучает свойства пространства и времени как двух форм существования материи в инерциальных системах отсчета. Обычно для удобства выбирают две ИСО — неподвижную  $K$

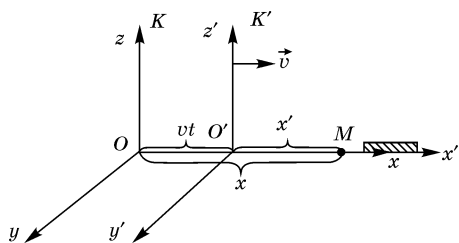


Рис. 1.29

с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью  $\vec{v}$  вдоль совпадающих осей  $Ox$  и  $O'x'$  систему отсчета  $K'$  (оси  $Oy$  и  $O'y'$ ,  $Oz$  и  $O'z'$  при движении остаются параллельными) (см. рис. 1.29). В начальный момент времени ( $t = 0$ ) начала координат этих систем отсчета — точки  $O$  и  $O'$  совпадают.

Отметим общие свойства пространства и времени, подтвержденные опытными фактами и не зависящие от рассматриваемых теоретических моделей: пространство является однородным и изотропным, а время является однородным.

### 1.5.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

В классической механике считается, что предельная скорость передачи взаимодействий в природе может быть бесконечно большой ( $v_{\text{пред}} = \infty$ ), что приводит к **дополнительным свойствам пространства и времени**: пространство и время абсолютны, не связаны друг с другом; время течет одинаково во всех ИСО ( $t = t'$ ); пространство и время не зависят от наличия вещества, пространство является пустымместилищем материальных тел.

Дополнительные свойства пространства и времени, возникающие в классической механике, позволяют получить преобразования Галилея — это формулы, связывающие координаты и время одного и того же события в разных ИСО. Под событием понимают любое явление (выстрел из ружья, рождение частицы и т. д.), происходящее в одной точке пространства в какой-либо момент времени.

Пусть в точке  $M$  (рис. 1.29) происходит какое-либо событие, координаты и время которого в СО  $K$  —  $(x, y, z, t)$ , а в СО  $K'$  —  $(x', y', z', t')$ . Учитывая расположение точки  $M$  (рис. 1.29) и дополнительные свойства пространства и времени, запишем преобразования Галилея:

$$\text{Переход из } K' \text{ в } K: \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y', z = z' \\ t = t' \end{cases}. \text{ Переход из } K \text{ в } K': \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y, z' = z \\ t' = t \end{cases}. \quad (1.84)$$

В заключение отметим важный принцип, существенно упрощающий описание механических явлений в разных ИСО. Это **принцип относительности Галилея**, он является следствием опытных фактов и утверждает равноправие всех ИСО по отношению к происходящим в них механическим явлениям.

Приведем различные эквивалентные формулировки этого принципа относительности:

- 1) никакими механическими опытами, находясь внутри ИСО, нельзя установить, движется она равномерно и прямолинейно или покоится;
- 2) все законы механики выглядят, записываются одинаково во всех ИСО;



3) все механические явления протекают одинаково во всех ИСО;

4) все законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Под инвариантной величиной понимают величину, принимающую одинаковое значение во всех ИСО; инвариантная формула записывается одинаково во всех ИСО.

Покажем, что II закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея, то есть записывается одинаково во всех инерциальных системах отсчета: СО  $K$ :  $F = ma$ , СО  $K'$ :  $F' = m'a'$ . Для этого рассмотрим, как преобразуются масса и ускорение при переходе из одной системы отсчета в другую. В классической механике масса тела является инвариантной величиной ( $m = m'$ ), ход времени во всех ИСО одинаков ( $t = t'$ ) и закон сложения скоростей выглядит таким образом:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - vt)}{dt} = u_x - v, \quad (1.85)$$

где считается, что тело движется в СО  $K$  и  $K'$  со скоростями  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$ , направленными вдоль осей  $Ox$  и  $O'x'$ . Тогда можно записать:

$$F' = m'a' = m \frac{du'_x}{dt'} = m \frac{d(u_x - v)}{dt} = m \frac{du_x}{dt} = ma = F,$$

что и требовалось показать.

### 1.5.2.

#### ПОСТУЛАТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ОПЫТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПОСТУЛАТОВ

Специальная теория относительности была создана А. Эйнштейном в 1905 г. В ее основу положены два постулата — принцип относительности Эйнштейна и постулат о постоянстве скорости света в вакууме.

До начала XX в. считалось, что все физические явления можно свести к механическим явлениям и поэтому принцип относительности Галилея оправдывал себя, позволяя упростить объяснение (описание) опытных фактов. После открытия электромагнитных волн, квантовой механики, ядерной физики оказалось, что разнообразные формы движения материи не сводятся к механическому движению, и поэтому вполне естественно принцип относительности Галилея распространили на всю совокупность физических явлений. Это было сделано А. Эйнштейном и подтверждается всеми имеющимися опытными фактами.

Приведем несколько эквивалентных формулировок **первого постулата** специальной теории относительности (**принципа относительности Эйнштейна**):

1) никакими физическими опытами, находясь внутри ИСО, нельзя установить, движется она равномерно и прямолинейно или покоится;

2) все законы физики выглядят, записываются одинаково во всех ИСО;

3) все физические явления протекают одинаково во всех ИСО;

4) все законы физики инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Из четвертой формулировки первого постулата следует, что преобразования Галилея в специальной теории относительности заменяются на преобразования Лоренца.

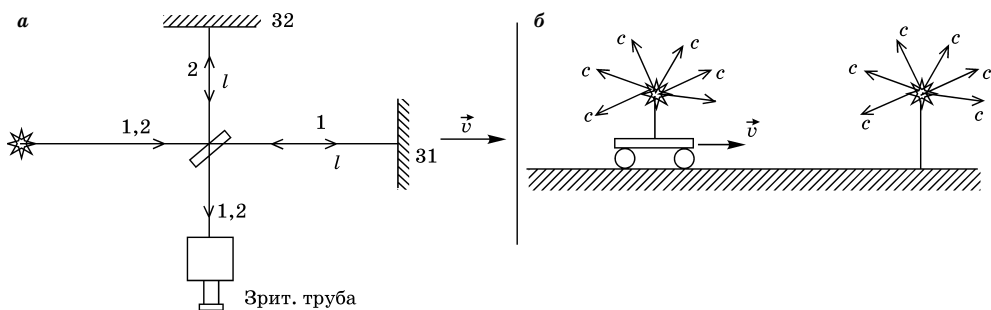


Рис. 1.30

Согласно **второму постулату С. Т. О.** скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источника и приемника света. Этот постулат является необычным с точки зрения классической механики, но он был подтвержден многими опытами, среди которых наиболее известным является опыт Майкельсона и Морли: свет от источника делился на два луча, они отражались от взаимно перпендикулярных зеркал, расположенных на одинаковом расстоянии  $l$  от точки разделения лучей, и затем попадали в зрительную трубу, в которой наблюдалась картина интерференции (рис. 1.30а).

Луч 1 в неподвижной ИСО (например связанной с Солнцем) проходил расстояние  $l$  сначала вдоль, а затем против скорости движения Земли ( $v \cong 30$  км/с). Луч 2 за счет движения зеркала 2 распространялся по гипотенузе треугольника со сторонами  $l$  и  $(v \cdot t_2/2)$ . Для времени  $t_1, t_2$  движения лучей 1 и 2 относительно неподвижной ИСО можно получить

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}, \quad t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

При выводе учитывался закон сложения скоростей в классической механике (1.85), а также неизменность с точки зрения классической механики расстояний до зеркал в неподвижной и движущейся ИСО.

Из полученных формул следует, что  $\Delta t = (t_2 - t_1) < 0$ . Если ориентацию установки изменить на  $90^\circ$  (лучи поменяются местами), то тогда

$$\Delta t = (t'_2 - t'_1) = (t_1 - t_2) > 0,$$

и поэтому оптическая разность хода лучей должна измениться и соответственно должна сместиться картина интерференции. Но этого в опыте не наблюдалось, то есть время распространения света в обоих направлениях было одинаковым:  $t_1 = t_2$ . Отсюда следует вывод, что к скорости света в вакууме не применим классический закон сложения скоростей и она не зависит от движения источника и приемника света — скорость света одинакова во всех направлениях; свет, испускаемый по всем направлениям подвижным и неподвижным источниками, будет иметь одинаковую скорость  $v = c$  (рис. 1.30б).

Следствием второго постулата С. Т. О. является тот факт, что предельная скорость передачи взаимодействий в природе является конечной и равной скорости света в вакууме. Второй постулат приводит к новым дополнительным свойствам пространства и времени в С. Т. О.

**1.5.3.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА.  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА  
ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ  
В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Общие свойства пространства и времени применимы и для С. Т. О., поэтому преобразования Лоренца, как и преобразования Галилея, будут линейными по координатам и времени. Добавится только коэффициент  $\alpha$ , учитывающий второй постулат С. Т. О. и зависящий от скорости движения тела и скорости света в вакууме. Итак, запишем преобразования Лоренца:

$$\text{Переход из } K' \text{ в } K: \begin{cases} x = \alpha(x' + v \cdot t') \\ y = y', z = z' \\ t = \alpha(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases} \quad \text{Переход из } K \text{ в } K': \begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ y' = y, z' = z \\ t' = \alpha(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad (1.86)$$

Коэффициент  $\alpha$  можно найти следующим образом: в начальный момент времени  $t = 0$  из начала координат систем отсчета  $K$  и  $K'$  (точки  $O$  и  $O'$ ) посылают световой сигнал. Из второго постулата С. Т. О. для координаты точки, которой достиг сигнал, можно записать  $x = ct$ ,  $x' = ct'$ , и поэтому:

$$\left. \begin{aligned} ct &= \alpha(ct' + vt') = \alpha t'(c + v) \\ ct' &= \alpha(ct - vt) = \alpha t(c - v) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 tt' = \alpha^2 tt' (c^2 - v^2), \quad (1.87)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Формулы для преобразования времени в (1.86) можно получить из выражений для преобразования координат. Действительно,

$$x = \alpha(x' + vt') = \alpha[\alpha(x - vt) + vt'] = \alpha^2 x - \alpha^2 vt + \alpha vt' \Rightarrow t' = \alpha(t - \frac{v}{c^2}x).$$

При малых скоростях движения тел  $v \ll c$  коэффициент  $\alpha \rightarrow 1$ , следовательно, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Поэтому говорят, что *классическая механика — это механика малых скоростей движения тел, а релятивистская механика — механика скоростей движения тел, близких к скорости света в вакууме*. Релятивистская механика включает в себя как частный случай ( $v \ll c$ ) классическую механику.

Из формул для преобразования времени (1.86) следуют **дополнительные свойства пространства и времени в С. Т. О.** Во-первых, так как в формулы для преобразования времени входят координаты, это означает, что пространство и время как две формы существования материи существуют в неразрывном единстве. Во-вторых,  $t \neq t'$ , то есть время течет по-разному в разных ИСО. Эти свойства пространства и времени приводят к необычным с обычной точки зрения эффектам как в кинематике, так и в динамике, они будут рассмотрены далее.

# 1.5.4. КИНЕМАТИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## 1.5.4.1. ПОНЯТИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ ДВУХ СОБЫТИЙ

Пусть в СО  $K'$  в разных точках пространства ( $x'_1 \neq x'_2$ ) происходят одновременно ( $t'_1 = t'_2$ ) два события. Необходимо выяснить, будут ли эти события одновременными в СО  $K$  — то есть чему будет равна разность времен ( $t_2 - t_1$ )?

Для ответа на этот вопрос используем преобразования Лоренца:

$$t_2 - t_1 = \alpha(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2) - \alpha(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1) = \alpha \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) \neq 0,$$

то есть эти события не будут одновременными в СО  $K$ . Следовательно, **понятие одновременности двух событий является относительным** — события, происходящие одновременно в одной ИСО, не будут одновременными в других ИСО. Только в частном случае  $x'_1 = x'_2$  события будут одновременными во всех ИСО.

В классической механике  $v \ll c$  и поэтому  $t_2 = t_1$ , то есть понятие одновременности двух событий является абсолютным — они будут одновременными во всех ИСО.

## 1.5.4.2. ПОНЯТИЕ ДЛИНЫ ПРЕДМЕТА

Пусть в СО  $K'$  вдоль оси  $O'x'$  располагается неподвижный стержень, длина которого может быть найдена как разность координат его концов  $l' = x'_1 - x'_2$  (см. рис. 1.29). Необходимо определить длину этого стержня в СО  $K$ , относительно которой он движется со скоростью  $v$  ( $l = (x_2 - x_1) = ?$ ).

Для определения длины  $l$  стержня используем преобразования Лоренца и укажем метод определения длины  $l$  движущегося стержня: необходимо в СО  $K$  одновременно зафиксировать координаты концов стержня ( $t_1 = t_2$ ), в результате чего можно получить

$$l' = x'_2 - x'_1 = \alpha(x_2 - vt_2) - \alpha(x_1 - vt_1) = \alpha(x_2 - x_1) = l\alpha, \quad (1.88)$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

В формуле (1.88) через  $l_0$  обозначена **собственная длина стержня**, это длина стержня в той ИСО, относительно которой он неподвижен (в рассматриваемом случае  $l_0 = l'$ ). Собственная длина предмета является инвариантом С. Т. О. Из этой формулы следует, что: 1) при движении предметов происходит сокращение продольных, направленных вдоль скорости размеров предметов; поперечные, перпендикулярные к скорости движения размеры тел не изменяются; 2) собственная длина предмета  $l_0$  является наибольшей из всех возможных длин предмета.

Итак, длина предмета является понятием относительным, то есть зависит от выбора ИСО. В классической механике данное понятие является абсолютным, одинаковым во всех ИСО, так как  $v \ll c$ .

1.5.4.3.  
ПОНЯТИЕ ПРОМЕЖУТКА ВРЕМЕНИ  
МЕЖДУ ДВУМЯ СОБЫТИЯМИ

Пусть в СО  $K'$  в одной точке пространства ( $x'_1 = x'_2$ ) происходят два события или протекает какой-либо процесс. Промежуток времени  $\Delta t' = (t'_2 - t'_1)$  в СО  $K'$  можно измерить одними часами, находящимися в этой точке пространства. Чему равняется этот промежуток времени в СО  $K$  ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ), относительно которой эти события происходят в разных точках оси  $Ox$  ( $x_1 \neq x_2$ )?

Вполне понятно, что промежуток времени  $\Delta t$  нужно измерять двумя часами, расположенными в разных точках оси  $Ox$  — в одной точке ( $x = x_1$ ) находятся часы, измеряющие время одного события ( $t = t_1$ ) или начало процесса, а во второй ( $x = x_2$ ) — часы, измеряющие время другого события ( $t = t_1$ ) или окончание процесса.

Для определения  $\Delta t$  используем преобразования Лоренца:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \alpha(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) - \alpha(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1) = \alpha(t'_2 - t'_1) = \alpha\Delta t',$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.89)$$

где  $\Delta t_0$  — **собственный промежуток времени**, он измеряется одними часами в той ИСО, относительно которой события происходят в одной точке пространства, это инвариант С. Т. О.

Из формулы (1.89) следует, что: 1)  $\Delta t > \Delta t_0$ , т. е. *в движущейся ИСО происходит замедление хода времени, движущиеся часы идут медленнее покоящихся*; 2)  $\Delta t_0 \leq \Delta t$ , то есть собственный промежуток времени между двумя событиями является наименьшим из всех возможных промежутков времени для этих событий.

Замедление хода времени в движущейся системе отсчета подтверждается экспериментами с участием нестабильных элементарных частиц, рождающихся в ядерных реакциях со скоростями, близкими к скорости света в вакууме (например,  $v = 0,99$  с). В этом случае время их жизни до распада существенно различается в СО  $K'$ , связанной с ними (собственное время  $\Delta t_0$ , равное, например,  $\Delta t_0 = 25$  нс), и в СО  $K$ , связанной с Землей (время жизни  $\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 7,09\Delta t_0$ ). Это приводит к тому, что с учетом замедления времени частица пролетает в СО  $K$  до распада значительно большее расстояние ( $l = v \Delta t = 52$  м), чем без учета этого эффекта ( $l' = v\Delta t_0 = 7,4$  м).

Такие частицы регистрируют на расстояниях  $l$  от места их рождения, значительно превышающих  $l'$ . Отметим, что в СО  $K'$ , связанной с частицей, расстояние  $l'$  проходит Земля мимо неподвижной частицы за время ее жизни  $\Delta t_0$ .

В силу равноправия всех ИСО замедление времени в С. Т. О. носит относительный характер. Наблюдатель, находящийся на Земле, отметит, что движения космонавта в ракете, движущейся со скоростью  $v$ , близкой к скорости света, будут замедленными по сравнению с его движениями. То же самое скажет космонавт, наблюдая за человеком на Земле. И они оба будут правы, так как космонавт может считать систему отсчета, связанную с ним, неподвижной, а систему отсчета, связанную с Землей, движущейся со скоростью  $v$  в обратном направлении.

1.5.4.4.  
РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Пусть вдоль совпадающих осей  $Ox$  и  $O'x'$  систем отсчета  $K$  и  $K'$  в их положительном направлении с постоянной скоростью движется тело. Проекции вектора скорости на координатные оси в СО  $K$  и  $K'$  соответственно равны:

$$\text{С. О. } K': \vec{u}' = (u'_x = dx'/dt', u'_y = 0, u'_z = 0);$$

$$\text{С. О. } K: \vec{u} = (u_x = dx/dt, u_y = 0, u_z = 0).$$

Необходимо найти формулы связи между  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$ ; в данном случае между  $u_x$  и  $u'_x$ . Для этого в преобразованиях Лоренца (1.86) возьмем бесконечно малые (элементарные) приращения координат и времени:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha(dx' + vdt'), dt = \alpha(dl' + \frac{v}{c^2}dx') \Rightarrow \\ \Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} &= \frac{\alpha(dx' + vdt')}{\alpha(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} = \frac{dx'/dt' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (1.90)$$

Аналогично можно получить обратную формулу связи

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \quad (1.91)$$

Формулы (1.90) и (1.91) представляют собой закон сложения скоростей в релятивистской механике. При малых скоростях движения тел ( $v \ll c$ ) эти формулы переходят в закон сложения скоростей классической механики (1.85).

Из закона сложения скоростей (1.90) и (1.91) следует, как это и должно быть согласно второму постулату С. Т. О., что скорость движения тел не может быть больше скорости света в вакууме ( $v \leq c$ ). Приведем в подтверждение этому факту два примера:

**Пример 1.** Пусть световой сигнал в СО  $K'$  распространяется вдоль оси  $O'x'$ , т. е.  $u'_x = c$ . Тогда согласно формуле (1.91)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{c + v}{1 + (v/c^2)c} = c,$$

что и должно было получиться.

**Пример 2.** Пусть ядро, двигаясь со скоростью 0,5 с относительно ускорителя, испускает в направлении своего движения электрон, который относительно ядра движется со скоростью 0,8 с. Найдем скорость электрона относительно ускорителя.

Для того чтобы использовать закон сложения скоростей (1.91), свяжем систему отсчета  $K'$  с ядром, а систему отсчета  $K$  с ускорителем и направим оси  $Ox$  и  $O'x'$  вдоль направления движения ядра и электрона. Тогда  $v = 0,5$  с,

$u'_x = 0,8 \text{ с}$ , а скорость электрона относительно ускорителя найдем следующим образом:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0,8 \text{ с} + 0,5 \text{ с}}{1 + \frac{0,8 \text{ с}}{c^2} 0,5 \text{ с}} = \frac{1,3}{1,4} \text{ с} = 0,93 \text{ с} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

т. е. получаем, что  $u_x < c$ .

Для произвольного направления движения тел формулы (1.90) и (1.91) усложняются, но всегда скорость тела во всех ИСО не будет превышать скорости света в вакууме.

### 1.5.5. ДИНАМИКА С. Т. О.

#### 1.5.5.1. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС И МАССА ТЕЛА

Оказывается, что II закон Ньютона в виде (1.28) не является релятивистски инвариантным, то есть не удовлетворяет первому постулату С. Т. О. преобразованиям Лоренца. Получить релятивистски инвариантную формулу закона из выражения (1.28) не удастся из-за усложнения в С. Т. О. взаимосвязи между действующей на тело силой и ускорением тела, они в общем случае даже не совпадают по направлению. Это можно сделать на основе формулы (1.27), используя для импульса частицы вместо формулы (1.26) другое выражение.

В С. Т. О. импульс тела, движущегося в СО  $K$  со скоростью  $\vec{u}$ , запишется следующим образом:

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt_0}, \quad (1.92)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, определяющий положение тела в СО  $K$ ;  $dt_0$  — бесконечно малый (элементарный) промежуток времени, отсчитанный по часам СО, связанной с этим телом, то есть он является собственным промежутком времени;  $m_0$  — **масса покоя тела** — это масса, измеренная в той ИСО, где тело неподвижно, это инвариант С. Т. О.

Вводя согласно выражению (1.89) промежуток времени  $dt$ , измеренный в СО  $K$ ,

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

и учитывая, что  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ , для импульса  $\vec{p}$  тела в СО  $K$ , получим

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m\vec{u}, \quad (1.93)$$

где введена **релятивистская масса тела  $m$** , зависящая от скорости его движения:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (1.94)$$

В итоге для II закона Ньютона в СО  $K$  запишем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) = \vec{F}. \quad (1.95)$$

Эта формула является релятивистски инвариантной, то есть она записывается так же и в СО  $K'$ :

$$\frac{d}{dt'} \left( \frac{m_0 \vec{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right) = \vec{F}'. \quad (1.96)$$

Из формулы (1.94) следует, что релятивистская масса  $m$  тела возрастает с увеличением скорости его движения. Тела с отличной от нуля массой покоя ( $m_0 \neq 0$ ) не могут двигаться со скоростью света в вакууме, так как это приводит к бесконечно большой массе тела — при  $v = c$ ,  $m = m_0/0 = \infty$ . Однако существуют частицы с нулевой массой покоя, движущиеся со скоростью  $v = c$ . В этом случае в формуле (1.94) возникает неопределенность ( $m = 0/0$ ), которая не противоречит существованию таких частиц. Ярким примером, подтверждающим этот факт, является существование фотонов-квантов электромагнитного поля.

#### 1.5.5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пусть на тело, движущееся в СО  $K$  со скоростью  $\vec{u}$ , действует сила  $\vec{F}$ . Запишем теорему о кинетической энергии для этого тела:

$$dW_k = dA = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{u} dt = \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{u} \right) dt. \quad (1.97)$$

Перепишем полученную формулу в другом виде. Для этого преобразуем выражение (1.95):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right).$$

Умножим обе части полученного равенства скалярно на вектор  $\vec{u}$  и учтем, что  $\vec{u} d\vec{u} = u du$  и  $\vec{u} \vec{u} = u^2$ :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \vec{u} = \frac{m_0 u (du/dt)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{u^2}{c^2} \frac{m_0 u (du/dt)}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (1.98)$$

С учетом этого выражения формула (1.97) примет вид

$$dW_k = d(m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2}),$$

откуда следует:

$$W_k = m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} + \text{const}.$$

Постоянная в этом уравнении выбирается из условия равенства нулю кинетической энергии неподвижного тела:  $\vec{u} = 0$ ,  $W_k = 0$ , то есть  $\text{const} = -m_0 c^2$ , и в релятивистской механике для кинетической энергии тела получается окончательное выражение

$$W_k = m_0 c^2 (1 / \sqrt{1 - u^2/c^2} - 1). \quad (1.99)$$

При малых скоростях движения тела ( $u \ll c$ ) первое слагаемое, приведенное в скобках в формуле (1.99), можно разложить в ряд и ограничиться пер-



выми двумя его членами, что приводит к хорошо известному в классической механике выражению для кинетической энергии тела:

$$W_k = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 u^2}{2}.$$

### 1.5.5.3 ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ ТЕЛА

Перепишем формулу (1.99) в следующем виде:

$$W_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m c^2.$$

Анализируя это соотношение, Эйнштейн предположил, что полная энергия тела должна складываться из энергии его движения (кинетической) и энергии покоящегося тела (внутренней). Поэтому он отождествил второе слагаемое в этой формуле с внутренней энергией тела и назвал ее **энергией покоя тела**  $W_0$ , а сумму  $(W_k + m_0 c^2)$  — **полной энергией тела**  $W$ :

$$W_0 = m_0 c^2; \quad (1.100)$$

$$W = m c^2. \quad (1.101)$$

Нужно отметить, что энергия покоя  $W_0$  и полная энергия  $W$  не включают в себя потенциальной энергии тела во внешних полях.

Формула (1.101) выражает закон взаимосвязи, пропорциональности массы и энергии тела, согласно которому *полная энергия тела равна произведению релятивистской массы тела на квадрат скорости света в вакууме*. В соответствии с ним любое изменение энергии тела сопровождается изменением его массы и наоборот:

$$\Delta m = \Delta W / c^2. \quad (1.102)$$

Формулы (1.100)–(1.102) нашли свое подтверждение во многих экспериментальных фактах, особенно в области физики атомного ядра и элементарных частиц. Протекание ядерных реакций сопровождается выделением или поглощением энергии  $W$ , расчет которой по формуле  $W = \Delta m c^2$  (где  $\Delta m$  — разность суммы масс покоя исходных ядер и элементарных частиц и продуктов реакции) приводит к согласию с экспериментом.

Также подтверждается формула для энергии связи атомного ядра  $W_{CB} = \Delta m c^2$ , где  $\Delta m$  — дефект массы атомного ядра.

Из выражения (1.100) следует, что любое тело обладает колоссальным запасом энергии. Так, энергии покоя тела массой  $m_0 = 1$  кг хватило бы на то, чтобы лампа мощностью 70 Вт непрерывно светила бы 40,7 млн лет. Однако существуют ограничения на возможность полного использования этой энергии. Так, при протекании ядерных реакций такое ограничение устанавливает закон сохранения массового числа (числа нуклонов) или закон сохранения барионного заряда. Поэтому можно максимально извлечь лишь несколько процентов от энергии покоя участвующих в реакции ядер. Существенно меньший процент этой энергии высвобождается при химическом горении различных веществ.

Максимальное извлечение энергии покоя возможно при аннигиляции — реакциях взаимодействия частиц и античастиц. Так, при встрече электрона и позитрона они исчезают и образуются два (реже — три) гамма-кванта:  $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$ , то есть материя в виде вещества переходит полностью в полевую форму ее существования, а энергия такой ядерной реакции:  $W_p = 2m_{0эл}c^2$ .

Практическое использование таких реакций маловероятно из-за отсутствия антивещества в окружающем нас мире.

Из выражений для импульса (1.93) и энергии покоя (1.100) можно получить полезные формулы связи между ними:

$$\vec{p} = \frac{W}{c^2} \vec{u}; \quad (1.103)$$

$$W = c\sqrt{p^2 + W_0^2/c^2} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \quad (1.104)$$

Для частиц с нулевой массой покоя (например для фотона) из этих выражений следует, что

$$p = \frac{W_\phi}{c} = \frac{h\nu}{c}, \quad (1.105)$$

где энергия фотона, соответствующего электромагнитному излучению частоты  $\nu$  рассчитывается по формуле:  $W_\phi = h\nu$ ;  $h$  — постоянная Планка.

### 1.5.6. РОЛЬ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В СОВРЕМЕННОЙ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОЙ КАРТИНЕ МИРА

В отличие от теоретических моделей и теорий, предлагаемых для объяснения конкретных физических явлений, специальная теория относительности затрагивает наиболее общие представления о материи и формах ее существования — пространства и времени. Она наполняет эти понятия новым содержанием и дает более реалистичную картину мира. То, что раньше считалось незыблемым, абсолютным, оказалось изменяющимся, относительным: пространство и время взаимосвязаны, время течет по-разному в разных ИСО, понятия — длина предмета, одновременность двух событий, промежуток времени между событиями — являются относительными и т. д. Но это не означает, что все в природе относительно: С. Т. О. предложила вместо старого новый набор инвариантных, абсолютных величин, таких как:

- 1) скорость света в вакууме  $c$ ;
- 2) собственная длина предмета  $l_0$ ;
- 3) собственный промежуток времени между двумя событиями  $\Delta t_0$ ;
- 4) масса покоя тела  $m_0$ ;
- 5) энергия покоя тела  $W_0$ ;
- 6) причинно-следственная связь;
- 7) электрический заряд  $q$ ;
- 8) пространственно-временной интервал  $\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$ ;
- 9) величина  $(W^2 - c^2p^2)$ .

Последние (8-й и 9-й) инварианты С. Т. О. связаны с модулями четырехмерного радиус-вектора и четырехмерного вектора-энергии импульса в че-

тырехмерном пространстве координат и времени — пространство и время в С. Т. О. взаимосвязаны, и поэтому вводится такое пространство. В этом пространстве при переходе от одной ИСО к другой, то есть при преобразованиях Лоренца происходит поворот этих векторов, при котором составляющие векторов изменяются, а их модули остаются неизменными.

Конечно, в повседневной жизни скорости движения различных тел существенно меньше скорости света в вакууме, и поэтому в основном используются формулы классической механики. Но для частиц малой массы (микрочастиц — электрона, нейтрона, протона, атомов) при анализе их движения необходимо учитывать релятивистские эффекты, и это подтверждает справедливость теории.

Логическим завершением С. Т. О. явилось создание А. Эйнштейном в 1916 году общей теории относительности (О. Т. О.) — учения о влиянии тел, их полей тяготения на свойства пространства и времени. В основе этой теории лежит принцип эквивалентности инертной и гравитационной массы тела. Согласно этому принципу масса тела, определяемая II законом Ньютона (инертная масса) и законом всемирного тяготения (гравитационная масса) эквивалентны. Это означает, что, находясь в лифте, человек не может сказать, почему он давит на его пол: либо лифт неподвижен и находится во внешнем поле тяготения, либо лифт движется равноускоренно в отсутствие внешних гравитационных полей. Этот принцип позволил учесть в уравнениях движения наличие тел, полей тяготения как фактор, искривляющий пространство и время.

Решение этих сложных уравнений привело, в частности, к созданию модели расширяющейся Вселенной, подтвержденной рядом косвенных доказательств — разбегание галактик от определенного центра, реликтовое излучение и т. д. Также был предсказан ряд конкретных фактов, впоследствии обнаруженных: искривление траектории световых лучей вблизи массивных тел, замедление хода времени в гравитационных полях, открытие черных дыр, в которые может превратиться звезда, израсходовав запас своего термоядерного горючего.

Общая теория относительности и механика движения частиц малой массы, квантовая механика являются в настоящее время наиболее современными теориями, находящимися на передовом крае познания естественнонаучной картины мира.

## \*1.6. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Пусть относительно ИСО под действием сил  $\sum \vec{F}_i$  тело движется с ускорением  $\vec{a}$  :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i.$$

Если рассмотреть движение такого тела относительно неинерциальной системы отсчета (НИСО) — пусть эта система отсчета движется относительно ИСО с ускорением  $\vec{a}_0$  , — то его ускорение  $\vec{a}'$  будет другим, оно отличается от ускорения  $\vec{a}$  на величину  $\vec{a}_0$  :  $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$ .

Запишем II закон Ньютона для тела относительно НИСО:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_0.$$

Как видно из этой формулы, для выполнения II закона Ньютона относительно НИСО (согласно II закону Ньютона сумма всех сил, действующих на тело, сообщает ему ускорение  $\vec{a}'$ ) необходимо ввести дополнительные силы, их называют силами инерции  $\vec{F}_u$ :

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0.$$

Эти силы не связаны с взаимодействием тел, а обусловлены ускоренным движением НИСО. Тогда для НИСО можно записать:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_u.$$

Если в НИСО тело будет неподвижно, то в соответствии со II законом Ньютона сумма сил, действующих на него с учетом силы инерции  $\vec{F}_u$ , также будет равна нулю:

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_u = 0.$$

Приведем пример. На гладкой тележке находится шарик, привязанный к пружине. При движении тележки с ускорением  $\vec{a}_0$  на шарик будет действовать сила упругости  $\vec{F}_y$ , которая сообщает ему ускорение  $\vec{a}_0$  ( $\vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_0$ ), что соответствует II закону Ньютона, записанному относительно неподвижной ИСО:  $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_y = m\vec{a}_0$  (рис. 1.31а)

В НИСО, связанной с тележкой, относительно которой шарик будет неподвижен ( $\vec{a}' = 0$ ), сумма сил, действующих на шарик, будет также равна нулю в соответствии с основным законом динамики:  $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_y + \vec{F}_u = 0$  (рис. 1.31б).

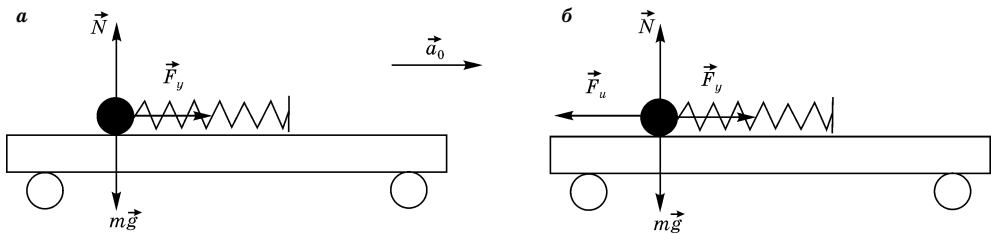


Рис. 1.31

Таким образом, введение сил инерции позволяет описывать движение тел как в ИСО, так и в НИСО по одним и тем же уравнениям динамики.

Представляет интерес рассмотреть еще один пример — НИСО, вращающаяся с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

Пусть надетый на стержень шарик, прикрепленный к центру диска пружиной, вращается вместе с диском вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис. 1.32а).

При определенной угловой скорости вращения  $\vec{\omega}$  шарик остановится на каком-то расстоянии  $R$  от оси вращения. Относительно ИСО нормальное ус-

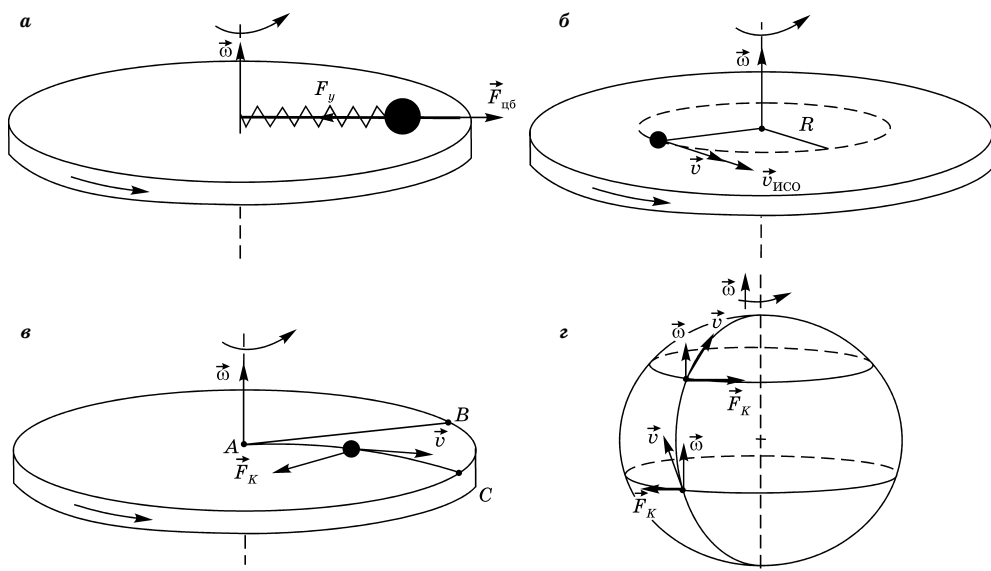


Рис. 1.32

корение  $a_n = \omega^2 R$  шарiku сообщает сила упругости пружины ( $\vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_n$ ), а относительно диска (НИСО) шарик находится в состоянии покоя под действием двух сил — силы упругости  $\vec{F}_y$  и силы инерции, которую в данном случае называют центробежной силой  $\vec{F}_{цб}$  ( $\vec{F}_y + \vec{F}_{цб} = 0$ ). Центробежная сила направлена от оси вращения по радиусу, и ее значение по модулю

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2 R. \quad (1.106)$$

Эта сила зависит от угловой скорости вращения диска и от расстояния  $R$  до оси вращения.

Из формулы (1.106) следует, что центробежные силы могут достигать больших значений, это обстоятельство широко используется в центробежных приборах и установках, таких как насосы, сепараторы, центрифуги и т. д.

Центробежные силы необходимо учитывать при проектировании турбин, электродвигателей, винтов самолетов и т. д. Небольшая разбалансировка, смещение центра тяжести от оси вращения, может привести к большим нагрузкам на подшипники, на ось вращения, вследствие чего возможно быстрое изнашивание и разрушение таких устройств.

С примерами проявления сил инерции можно встретиться и при торможении или ускорении поезда, и при его движении на повороте — в этих случаях под действием сил инерции пассажиры отклоняются вперед, назад или в сторону, их прижимает к спинке сиденья или они отклоняются от нее.

Приведем еще один пример силы инерции. Оказывается, что если тело будет двигаться относительно вращающейся системы отсчета (НИСО), то на него будет действовать дополнительная сила, сила инерции, которая получила название силы Кориолиса  $\vec{F}_K$ . Покажем это. Пусть тело движется по поверхности диска по окружности радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Если диск будет неподвижным, то на тело будет действовать центростремительная

сила ( $F_{\text{цс}} = mv^2/R$ , рис. 1.32б). Если диск будет вращаться, то в ИСО (она связана с неподвижным наблюдателем) происходит сложение скорости  $v$  с линейными скоростями  $\omega R$  точек диска (в данном случае, приведенном на рис. 1.32б, направление этих скоростей будет одинаковым) и, следовательно,  $v_{\text{ИСО}} = v + \omega R$ . Поэтому в ИСО для силы, действующей в горизонтальном направлении, получим

$$F_{\text{ИСО}} = m(v + \omega R)^2/R = mv^2/R + 2mv\omega + m\omega^2 R.$$

В НИСО (вращающийся диск) на тело действует сила  $F_{\text{цс}}$ , которую можно представить в следующем виде:

$$F_{\text{НИСО}} = F_{\text{цс}} = mv^2/R = F_{\text{ИСО}} - 2mv\omega - m\omega^2 R.$$

Из этой формулы следует, что в НИСО два последних слагаемых представляют собой силы инерции (они отсутствуют в ИСО), одна из которых является центробежной силой, а другая как раз и представляет собой силу Кориолиса. Для нее в общем случае можно записать следующую формулу:

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]. \quad (1.107)$$

Из выражения (1.107) следует, что сила  $\vec{F}_K$  будет перпендикулярна к оси вращения НИСО, а также к скорости движения тела. Это означает, что сила  $\vec{F}_K$  приводит к отклонению тела от прямолинейного движения. Если, например, сообщить телу скорость  $\vec{v}$ , направленную вдоль радиуса (рис. 1.32в), то оно будет перемещаться не по радиусу  $AB$ , а по кривой  $AC$ .

Вращение Земли приводит к тому, что свободно падающее тело отклоняется в Северном полушарии вправо, а в Южном — влево от направления своего движения. Однако вследствие медленного вращения Земли эффекты, связанные с силой Кориолиса, незначительны. Они заметны при длительных процессах, к которым можно отнести, например, более сильное подмывание правых берегов рек в Северном полушарии и левых берегов рек в Южном полушарии — рек, текущих в меридиональном направлении (рис. 1.32г).

В заключение этого раздела сделаем ряд замечаний относительно сил инерции:

1. Необходимо помнить, что силы инерции являются внешними по отношению к НИСО, и поэтому в них не выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса.

2. Силы инерции, так же как и силы тяготения, сообщают телам независимо от их массы одинаковые ускорения. Поэтому, как уже было отмечено в разделе 1.5.6, человек, находящийся в лифте, не может сказать, почему он давит на его пол: либо лифт неподвижен и находится во внешнем поле тяготения, либо лифт находится в поле сил инерции (движется равноускоренно) в отсутствии внешнего гравитационного поля. Это позволило Эйнштейну сформулировать принцип эквивалентности, согласно которому поле тяготения в небольшой области пространства и времени по своему проявлению тождественно ускоренной системе отсчета. Этот принцип, доказанный экспериментально с большой точностью, лег в основу создания общей теории относительности Эйнштейна.

## 1.7. ГИДРОМЕХАНИКА

### 1.7.1. УСЛОВИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Гидромеханика изучает условия равновесия и течения (перемещения в пространстве) жидкостей и газов, которые рассматриваются как непрерывные сплошные среды, не имеющие внутреннего строения.

Течение жидкости принято изображать с помощью линий тока — это линии, в каждой точке которых векторы скоростей  $\vec{v}$  частиц жидкости направлены по касательной к ним. Для стационарного течения жидкости скорости ее частиц со временем не изменяются, и поэтому расположение линий тока также остается постоянным (рис. 1.33а).

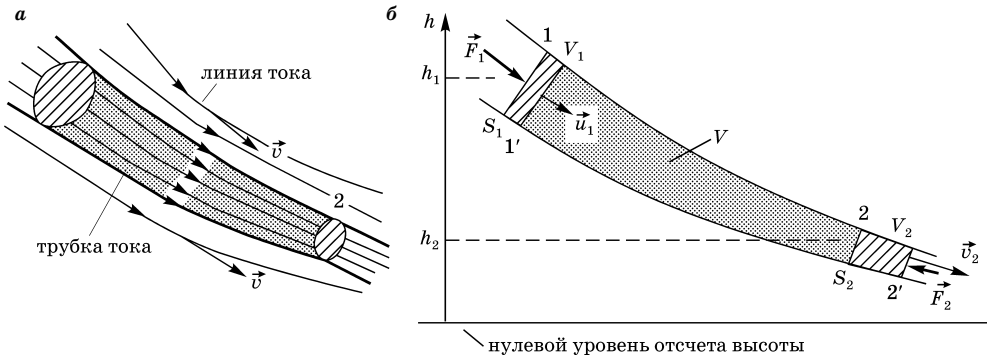


Рис. 1.33

В этих условиях удобно ввести понятие трубки тока. Для этого в плоскости, перпендикулярной к линиям тока, выделяют внутри жидкости замкнутый контур и проводят через его точки линии тока, они и будут ограничивать объем жидкости, называемый трубкой тока (рис. 1.33а).

Жидкость, заключенная внутри трубки тока, течет, не выходя за его пределы, перемешивание жидкости соседних трубок отсутствует. Причем для идеальной жидкости отсутствует и внутреннее трение между соседними трубками тока, а также и со стенками трубы, по которой она течет.

Для несжимаемой жидкости (ее плотность во всех точках одинакова и не зависит от времени,  $\rho = \text{const}$ ) в условиях стационарного течения за равные промежутки времени через сечения 1 и 2 трубки тока пройдут одинаковые объемы жидкостей ( $V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$ , рис. 1.33б), что приводит к выполнению условия неразрывности потока жидкости:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (1.108).$$

### 1.7.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости по трубке тока. Под действием сил давления  $\vec{F}$ , действующих внутри жидкости, большой объем  $V$ , находящийся между сечениями 1 и 2, будет перемещаться и через

малый промежуток времени займет положение между сечениями 1' и 2' (рис. 1.33б). При таком перемещении состояние большей части объема  $V$  между сечениями не изменяется. Поэтому в условиях стационарного течения жидкости изменение энергии выделенного большого объема  $V$  будет связано только с изменениями энергии, происходящими в малых объемах  $V_1$  и  $V_2$  (они заключены соответственно между сечениями 1 и 1', а также сечениями 2 и 2', рис. 1.33б).

Изменение кинетической энергии этих объемов  $V_1$  и  $V_2$  определяется работой сил тяжести и сил давления, действующих на выделенные объемы со стороны соседних слоев жидкости. Причем работу совершают только силы давления  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , перпендикулярные к сечениям 1 и 2' трубки тока (остальные силы будут перпендикулярными к скорости движения жидкости и поэтому работу не совершают).

Учитывая незначительность объемов  $V_1$  и  $V_2$ , можно записать:

$$\Delta W_K = m_2 v_2^2 / 2 - m_1 v_1^2 / 2 = (m_1 g h_1 - m_2 g h_2) + (F_1 l_1 - F_2 l_2). \quad (1.109)$$

Введем в это уравнение плотность жидкости ( $\rho = m_1/V_1 = m_2/V_2$ ,  $m_1 = m_2$ ,  $V_1 = V_2$ ) и давление, оказываемое жидкостью на сечения 1 и 2' объемов  $V_1$  и  $V_2$ , ( $p_1 = F_1/S_1$ ,  $p_2 = F_2/S_2$ ):

$$\rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2 = \rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1.$$

С учетом произвольности выбираемого объема и сечений в трубке тока окончательно можно записать следующее уравнение:

$$\rho v^2 / 2 + \rho g h + p = \text{const}, \quad (1.110)$$

которое получило название уравнения Бернулли.

Уравнение Бернулли справедливо для любых точек внутри жидкости, расположенных вдоль определенной линии тока. При переходе от одной линии к другой изменяются значения постоянной.

Отдельные слагаемые в уравнении Бернулли имеют размерность давления. Причем принято называть давление  $\rho g h$  гидростатическим (оно обусловлено весом жидкости и, в частности, определяет ее давление на глубине  $h$ ), давление  $p$  — статическим (оно не связано с движением жидкости, его можно обозначить как  $p = p_{\text{стат}}$ ) и давление  $\rho v^2 / 2$  — динамическим (оно связано с движением жидкости).

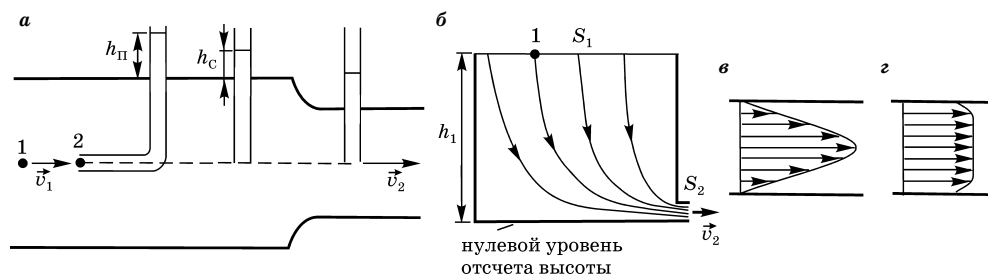


Рис. 1.34



Эти давления можно измерять с помощью приборов, называемых манометрами. В частности, для горизонтальной трубки тока (она располагается вдоль линии тока 1–2,  $\rho gh_2 = \rho gh_1$ ) полное давление внутри жидкости ( $p_{\text{полн}} = \rho v^2/2 + p$ ) можно измерять с помощью изогнутой трубки, открытый конец которой направлен горизонтально вдоль линии тока (рис. 1.34а). Тогда для одной линии тока в точках 1 (движение жидкости здесь невозмущено, скорость жидкости равна  $\vec{v}_1$ ) и 2 (скорость жидкости  $\vec{v}_2 = 0$ ) полное давление будет одинаковым ( $p_{\text{полн}2} = p_{\text{полн}1} = \rho v_1^2/2 + p_{\text{стат}}$ ). Поэтому высота поднятия  $h_{\text{П}}$  жидкости в манометрической трубке будет определять полное давление  $p_{\text{полн}1}$  (рис. 1.34а).

Для вертикальной трубки, открытый нижний конец которой параллелен линиям тока, высота поднятия  $h_{\text{С}}$  жидкости в манометрической трубке будет определяться только статическим давлением  $p_{\text{стат}}$ . Это позволяет по измерениям  $h_{\text{П}}$  и  $h_{\text{С}}$  определять скорость протекания жидкости

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot (p_{\text{полн}1} - p_{\text{стат}}) / \rho}.$$

В узких частях трубы скорость движения жидкости возрастает (формула (1.110)), что приводит к понижению статического давления жидкости (рис. 1.34а). Если скорость движения жидкости будет достаточно велика для того, чтобы статическое давление стало меньше атмосферного давления ( $p_{\text{стат}} = (\text{const} - \rho v^2/2) < p_{\text{атм}}$ ), это приведет к тому, что поток жидкости приобретет всасывающее действие. Такое же явление можно наблюдать и для потока газа. На этом явлении основано действие водоструйного насоса, пульверизатора распылителя и т. д.

### 1.7.3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Данное уравнение используют для анализа течения жидкостей, для которых внутреннее трение является малым (работа сил трения по модулю значительно меньше работ сил, входящих в формулу (1.109)). В технических приложениях широко применяют обобщенное уравнение Бернулли. Его можно получить из уравнения (1.109), для этого в него дополнительно вводят работу сил трения и преодоления гидростатических сопротивлений, а также механическую работу жидкости или газа (работу компрессора или турбин).

Уравнение Бернулли применяют также для определения скорости истечения жидкости через узкое отверстие в широком сосуде. В качестве примера найдем, с какой скоростью вытекает вода из широкого открытого бака через малое отверстие, сделанное на боковой стене бака у самого его дна (высота столба воды в баке равна  $h$ , рис. 1.34б) Используем для этого уравнение Бернулли. Площадь открытой поверхности воды в баке значительно превышает площадь поверхности отверстия ( $S_1 \gg S_2$ ). Следовательно, для произвольной линии тока скорость частиц жидкости в точке 1 и 2 значительно отличаются друг от друга ( $v_2 \gg v_1 \approx 0$ ). Запишем уравнение Бернулли для точек 1 и 2 произвольно выбранной линии тока. Учитывая, что статическое

давление в точках 1 и 2 одинаково и равно атмосферному давлению  $p_1 \approx p_2 = p_{\text{атм}}$ , на основании формулы (1.110) можно записать:

$$\rho gh_1 = \rho v_2^2 / 2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (1.111)$$

Из (1.111) следует, что скорость, с которой жидкость вытекает из отверстия, равна скорости тела, при его свободном падении с высоты  $h_1$ .

#### 1.7.4. ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

При течении реальной жидкости нельзя пренебрегать силами внутреннего трения, которые действуют между соседними слоями жидкостей (это явление называют также вязкостью и оно рассматривается в разделе, посвященном явлениям переноса). Эти силы направлены по касательной к поверхности различных слоев жидкости, они замедляют скорость течения быстро движущихся слоев и ускоряют движение медленно движущихся слоев. Для слоя жидкости, примыкающего непосредственно к стенкам трубы, скорость течения практически равна нулю. Затем по мере продвижения в глубь трубы скорость слоев жидкости нарастает и принимает максимальное значение в середине трубы (рис. 1.34а).

При ламинарном течении жидкости все сечение трубы можно разбить на отдельные концентрические слои. Жидкость в них течет с определенной скоростью, перемешивания различных слоев жидкости не происходит. В этом случае распределение скоростей по сечению круглой трубы имеет параболический характер (рис. 1.34б). При некоторой предельной скорости течения жидкости ее движение принимает турбулентный (вихревой) характер, при котором происходит перемешивание жидкостей различных слоев (возникают вихревые течения). За счет этого распределение скорости внутри жидкости изменяется, становится более равномерным — около краев трубы оно быстро нарастает и в остальных сечениях трубы принимает постоянное значение (рис. 1.34г).

**Электростатика** — раздел электродинамики, в котором изучается взаимодействие неподвижных электрических зарядов. Такое взаимодействие осуществляется посредством электростатического поля. В XVII веке и первой половине XVIII века исследователи проводили многочисленные опыты с наэлектризованными телами, были построены первые электростатические машины, основанные на электризации трением. С изобретением первого конденсатора — лейденской банки — в 1745 г. появилась возможность накапливать большие электрические заряды. Это позволило в 1750 г. Б. Франклину установить закон сохранения электрического заряда.

После открытия в 1785 г. закона взаимодействия неподвижных электрических зарядов (закон Кулона) началось количественное изучение электрических явлений с помощью изобретенных в то время приборов (электроскопов и электрометров).

В 1830 г. К. Гаусс сформулировал основную теорему электростатики. Отметим, что теорема о циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и теорема Гаусса для электростатического поля являются частным случаем уравнений Максвелла. В 1874 г. Дж. Стоней высказал мысль о дискретности электрического заряда и вычислил его величину.

В настоящее время типичными задачами электростатики являются описание распределения зарядов на поверхности проводников, вычисление энергии проводников по их известным зарядам или потенциалам.

В этом разделе изучается одна из сторон единого электромагнитного поля — электростатическое поле неподвижных зарядов. В основе такого рассмотрения лежит установленный экспериментально закон Кулона, идея близкодействия и принцип суперпозиции электростатических полей.

## 2.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН КУЛОНА

В отличие от гравитационного, в электромагнитное взаимодействие вступают не все тела и частицы. Тем из них, которые участвуют в таких взаимодействиях, приписывается новое свойство — **электрический заряд**. Он может быть положительным или отрицательным, отражая тот факт, что электромагнитное взаимодействие может быть в виде взаимного притяжения разноименных зарядов или отталкивания одноименных зарядов. Итак, *электрический заряд характеризует способность тел вступать в электромагнитные взаимодействия, а его величина определяет интенсивность этих взаимодействий.*

В природе в свободном состоянии существуют частицы, имеющие минимальный по модулю заряд, равный  $q_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Поэтому заряды всех тел и частиц, вступающих в электромагнитные взаимодействия, состоят из целого числа таких зарядов

$$Q = \pm N q_{\min}, \quad (2.1)$$

где  $N$  — целое число. В этом заключается **дискретность электрического заряда**. Заряд электрона считается отрицательным, что позволяет достаточно просто установить знаки зарядов других частиц.

В замкнутых системах выполняется **закон сохранения электрического заряда**, который формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма электрических зарядов частиц замкнутой системы остается постоянной*:

$$q_1 + q_2 + \dots = \text{const}. \quad (2.2)$$

Этот закон позволяет анализировать процессы, происходящие в замкнутых системах при изменении в них числа частиц.

Введение электрического заряда позволило сформулировать **закон Кулона**: *силы, с которыми взаимодействуют два неподвижных точечных заряда в вакууме, прямо пропорциональны произведению их зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними; силы направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды* (рис. 2.1а):

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad F_1 = F_2 = F_K = \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.3)$$

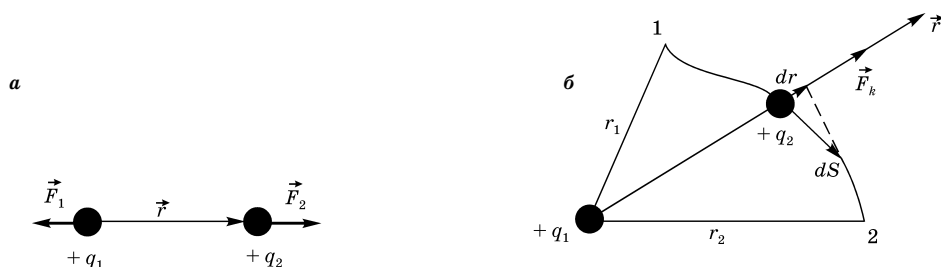


Рис. 2.1

Входящая в формулу (2.3) величина  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  называется электрической постоянной, она нужна при записи формулы закона в международной системе единиц СИ.

Этот закон был экспериментально установлен в 1785 г. французским ученым Ш. Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов. Этот закон был открыт английским ученым Г. Кавендишем ранее, в 70-х гг. XVIII века, но его труды были опубликованы лишь в 1879 г.

Известно, что по сравнению с вакуумом сила взаимодействия между зарядами в среде ослабевает, и поэтому в формулу закона Кулона вводят новую характеристику — **относительную диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$** .

$$\vec{F}_k = \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (2.4)$$

Параметр  $\epsilon$  описывает ослабление силы взаимодействия зарядов в среде, он показывает, во сколько раз модуль силы  $\vec{F}_{k0}$  взаимодействия зарядов в вакууме больше модуля силы  $\vec{F}_k$  взаимодействия зарядов в среде ( $\epsilon = F_{k0}/F_k$ ). Для вакуума  $\epsilon = 1$ , для всех сред  $\epsilon > 1$ , но с достаточной степенью точности при проведении многих расчетов можно принять  $\epsilon$  для газов равную единице. Эквивалентное определение  $\epsilon$  с учетом введения понятия напряженности электрического поля дается далее в разделе 2.12.3 (формула (2.53)).

## 2.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством электростатического поля: *взаимодействуют не заряды, а один заряд в месте своего расположения взаимодействует с полем, созданным другим зарядом*. В этом заключается **идея близкодействия** — идея передачи взаимодействий через материальную среду, через поле.

Покажем, что электростатическое поле является потенциальным. Для этого рассчитаем работу кулоновской силы при перемещении точечного положительного заряда  $q_2$  из точки 1 в точку 2 (рис. 2.1б) в электростатическом поле, созданном положительным точечным зарядом  $q_1$ :

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \vec{F}_k d\vec{s} = \int_1^2 F_k dl \cos \alpha = \int_1^2 F_k dr = \\ &= \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как видно из формулы (2.5), в окончательное выражение входят величины, описывающие только начальное и конечное положение заряда  $q_2$ , то есть работа сил поля не зависит от пути перехода из точки 1 в точку 2. Это означает, что кулоновская сила будет консервативной, а электрическое поле — потенциальным. В таком поле заряд обладает потенциальной энергией  $W_p$  —

это может быть  $W_p$  точечного заряда  $q_2$  в электрическом поле заряда  $q_1$ , или заряда  $q_1$  в электрическом поле заряда  $q_2$ , или двух взаимодействующих точечных зарядов.

На основе формулы (2.5) для  $W_p$  можно записать следующее выражение:

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \text{const.} \quad (2.6 \text{ а})$$

Как видно из выражения (2.6 а),  $W_p$  определяется с точностью до постоянной величины. Ее выбор осуществляется наиболее удобным для решения задач способом. В данном случае для электрического поля точечного заряда принято выбирать const так, чтобы на бесконечно большом расстоянии между зарядами  $r \rightarrow \infty$  их взаимная потенциальная энергия обращалась в ноль:  $W_p = 0$ . Следовательно,

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (2.6 \text{ б})$$

### 2.3. ВЕКТОР НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{E}$ И ПОТЕНЦИАЛ $\phi$ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАСЧЕТ $\vec{E}$ И $\phi$ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Итак, на точечный заряд  $q$ , помещенный в электростатическое поле, действует кулоновская сила  $\vec{F}_k$  и заряд  $q$  обладает в этом поле потенциальной энергией  $W_p$ . Для расчета этих величин вводят две характеристики поля — вектор напряженности  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$ . Зная эти величины в каждой точке поля, можно оценить  $\vec{F}_k$  и  $W_p$  по формулам:

$$\vec{F}_k = q\vec{E}, \quad W_p = q\phi. \quad (2.7)$$

Для произвольного электрического поля можно  $\vec{E}$  и  $\phi$  определить экспериментально. Для этого в каждую точку поля следует помещать пробный положительный заряд  $q_0$ , найти опытным путем  $\vec{F}_k$  и  $W_p$ , а затем рассчитать  $\vec{E}$  и  $\phi$  по формулам:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_k}{q_0}, \quad \phi = \frac{W_p}{q_0}. \quad (2.8)$$

Выражения (2.8) являются формулами-определениями характеристик  $\vec{E}$  и  $\phi$  электростатического поля, а именно:  $\vec{E}$  — векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой поля и равная отношению кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда;  $\phi$  — скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой поля и равная отношению потенциальной энергии пробного заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.

При известном распределении зарядов, создающих электрическое поле, можно достаточно просто рассчитать  $\vec{E}$  и  $\phi$  на основе закона Кулона и принципа суперпозиции. В этом разделе на основе закона Кулона приводятся оценки характеристик  $\vec{E}$  и  $\phi$  поля, созданного точечным зарядом.

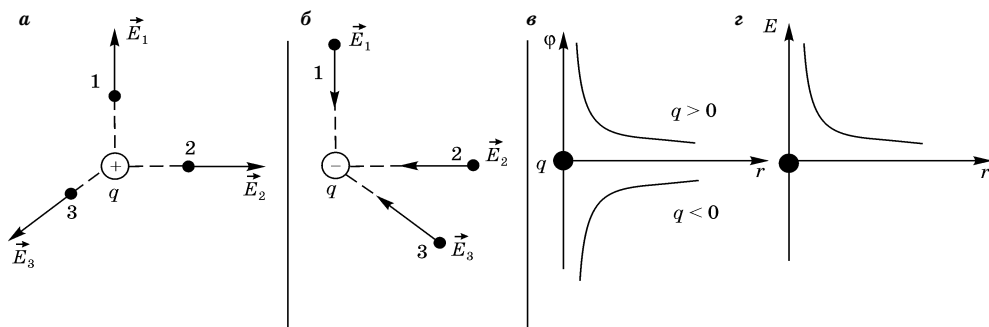


Рис. 2.2

Допустим, что точечный заряд  $q_1$  создает электрическое поле, а точечный заряд  $q_2$  находится в этом поле. Тогда из формул (2.3), (2.6), (2.7) следует

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r} \Rightarrow \vec{E}_{\text{т.з.}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}; E_{\text{т.з.}} = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}; \quad (2.9)$$

$$W_p = q_2 \phi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Rightarrow \phi_{\text{т.з.}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) определяют вектор напряженности  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  поля точечного заряда.

Согласно формулам (2.6б) и (2.8) нулевой уровень потенциала  $\phi$  электростатического поля точечного заряда выбирается на бесконечно большом расстоянии от него ( $r \rightarrow \infty$ ,  $\phi \rightarrow 0$ ).

На рис. 2.2 показаны направления векторов  $\vec{E}$  в разных точках поля точечного заряда (рис. 2.2а, б) и приведены графики зависимости модуля  $\vec{E}$  и потенциала  $\phi$  от расстояния  $r$  до заряда (рис. 2.2в, г).

Отметим, что направление вектора  $\vec{E}$  в данной точке поля совпадает с направлением кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд  $q_0$ , помещенный в данную точку. Нужно также помнить, что потенциал  $\phi$  является алгебраической величиной ( $\phi > 0$ ,  $\phi < 0$ ), и чем меньше расстояние до положительного заряда, создающего поле, тем больше  $\phi$  (образно говоря, происходит подъем на потенциальную горку), и соответственно, чем ближе к отрицательному заряду, тем меньше  $\phi$  (происходит спуск в потенциальную яму).

## 2.4. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА $\vec{E}$ И $\phi$ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

Для расчета  $\vec{E}$  и  $\phi$  поля, созданного системой зарядов или макроскопическим заряженным телом, используют принцип суперпозиции. Он заключается в следующем: вектор напряженности  $\vec{E}$  (потенциал  $\phi$ ) электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен векторной сумме напряженностей

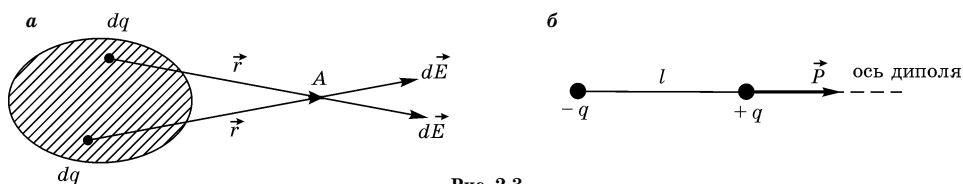


Рис. 2.3

(алгебраической сумме потенциалов) полей, созданных каждым зарядом в отдельности ( $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots; \varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (2.11)$$

В случае макроскопического заряженного тела для оценки  $\vec{E}$  и  $\varphi$  в какой-либо точке  $A$  (рис. 2.3а) разбивают тело на малые объемы (их можно рассматривать как точечные заряды  $dq$ ). Затем находят по формулам (2.9) и (2.10) векторы  $d\vec{E}$  и потенциалы  $d\varphi$  от этих зарядов в точке  $A$  и проводят суммирование всех  $d\vec{E}$  и  $d\varphi$ , то есть берут интеграл по объему тела  $V$ :

$$\vec{E}_A = \int_V d\vec{E}; \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}; \quad (2.12)$$

$$\varphi_A = \int_V d\varphi; \quad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (2.13)$$

Принцип суперпозиции позволяет также рассчитывать потенциальную энергию взаимодействия зарядов. Так, для системы точечных зарядов  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) можно записать

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (2.14)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал поля, созданного всеми зарядами, кроме  $i$ -го заряда, в месте расположения  $i$ -го заряда; коэффициент  $1/2$  означает, что взаимодействие двух зарядов в сумме учитывается дважды.

Рассмотрим ряд конкретных примеров расчета электростатических полей по формулам (2.12) и (2.13).

**1. Поле диполя.** Под электрическим диполем понимают электронейтральную систему близко расположенных двух точечных зарядов, отстоящих друг от друга на расстояние  $l$  (рис. 2.3б). Для описания электрического поля, созданного диполем, вводят понятие дипольного момента  $\vec{p}$ . Это вектор, направленный по прямой от заряда  $(-q)$  к заряду  $(+q)$ , то есть по оси диполя, и равный по модулю произведению модуля одного из зарядов на расстояние  $l$  между ними:

$$p = |q|l. \quad (2.15)$$

Обычно при описании поля диполя рассматривают точки, находящиеся на расстоянии  $r$ , значительно превышающем расстояние  $l$  между зарядами диполя ( $r \gg l$ ).

Рассчитаем модуль вектора  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$  в точках  $A, B, C$ , отстоящих от центра диполя (точка  $O$ ) на расстоянии  $r$ ; линии  $OA, OB$  и  $OC$  составляют с осью диполя углы  $0^\circ, 90^\circ$  и произвольный угол  $\alpha$  (рис. 2.4).



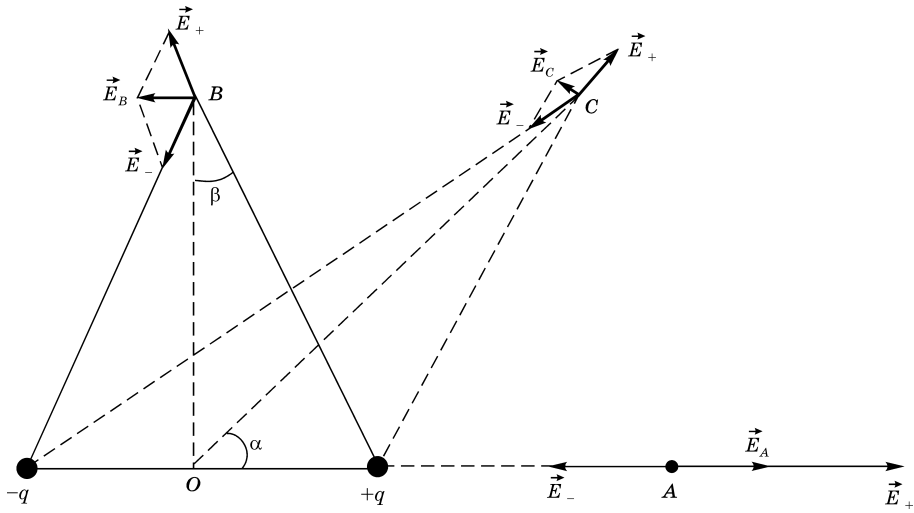


Рис. 2.4

Используя принцип суперпозиции (2.9), (2.10), найдем направление и модули векторов  $\vec{E}_A, \vec{E}_B, \vec{E}_C$ , а также потенциалы  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  в этих точках.

**Точка А:**  $\alpha = 0$

$$E_A = E_+ - E_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right) = [r \gg l] = \frac{2p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3};$$

$$\varphi_a = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - l/2} - \frac{1}{r + l/2} \right) = [r \gg l] = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

**Точка В:**  $\alpha = 90^\circ$

$$E_+ = E_- ,$$

$$E_B = 2E_+ \sin \beta = 2E_+ \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (r^2 + (l/2)^2)} \frac{l}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} =$$

$$= [r \gg l] = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3};$$

$$\varphi_B = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} \right) = 0.$$

Для точки С, расположенной под произвольным углом  $\alpha$ , можно получить общее выражение, включающее в себя частные случаи для точек А и В:

$$E_C = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad \varphi_C = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cos \alpha. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) следует, что модуль вектора напряженности  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$  поля диполя на расстояниях  $r \gg l$  определяются модулем его

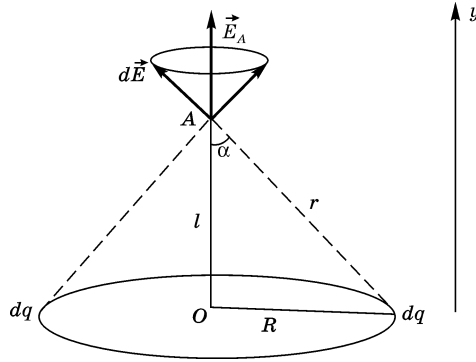


Рис. 2.5

дипольного момента  $\vec{p}$ , причем  $E$  и  $\varphi$  уменьшаются в зависимости от расстояния  $r$  быстрее, чем для поля точечного заряда (формулы (2.9), (2.10)).

**2. Электрическое поле на оси равномерно заряженного кольца.** Пусть равномерно заряженное по длине кольцо радиусом  $R$  несет заряд  $q$ . Найдём направление и модуль вектора  $\vec{E}$ , а также потенциал  $\varphi$  поля кольца в точке  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $l$  от его центра (рис. 2.5).

Для этого разбиваем кольцо на малые участки — точечные заряды  $dq$ , определяем направление векторов  $d\vec{E}$  от всех зарядов  $dq$  в точке  $A$  и используем для расчета  $E_A$  формулу (2.12). Из симметрии задачи видно, что все векторы  $d\vec{E}$  образуют конус векторов с углом  $\alpha$  при его вершине и суммарный вектор  $\vec{E}_A$  будет направлен вдоль оси, вверх. Тогда

$$\vec{E}_A = \int d\vec{E};$$

$$Oy: E_A = \int dE \cos \alpha = \int \frac{dq \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{\cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \int dq = \frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}};$$

$$\varphi_A = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{R^2 + l^2}}.$$

Итак,

$$E_A = \frac{ql}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}}; \quad \varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{R^2 + l^2}}. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17), в частности, следует, что в центре кольца в точке  $O$  ( $l = 0$ ):

$$E_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}. \quad (2.18)$$

На расстояниях  $l$ , значительно превышающих радиус  $R$  кольца ( $l \gg R$ ), его можно рассматривать как материальную точку, а электрическое поле кольца — как поле точечного заряда. Действительно, пренебрегая в формулах (2.17)  $R^2$  по сравнению с  $l^2$ , получим:

$$l \gg R: E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l^2}, \quad \varphi_a = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l}.$$

## 2.5. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ФОРМУЛА СВЯЗИ ВЕКТОРА $\vec{E}$ И ПОТЕНЦИАЛА $\phi$

Запишем формулы для работы сил электростатического поля по перемещению точного заряда из точки 1 в точку 2. Учитывая выражения (2.5) и (2.7), получим:

$$A_{12} = q \int_1^2 E dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, d\vec{l}); \quad (2.19 \text{ а})$$

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\phi_1 - \phi_2), \quad (2.19 \text{ б})$$

где  $d\vec{l}$  — вектор элементарного перемещения.

Величину  $(\phi_1 - \phi_2)$  называют **разностью потенциалов**, она характеризует работу сил электростатического поля по перемещению заряда из одной точки поля в другую и равна отношению этой работы к величине переносимого заряда:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{A_{12}}{q}. \quad (2.20)$$

Отметим, что разность потенциалов можно найти опытным путем, а сам потенциал, подобно потенциальной энергии, определяется с точностью до произвольной постоянной величины.

Из выражений (2.19), (2.20) можно получить интегральную формулу связи  $\vec{E}$  и  $\phi$ , в которую входят две точки поля:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha. \quad (2.21)$$

Дифференциальную формулу связи  $\vec{E}$  и  $\phi$ , справедливую для малой окрестности какой-либо точки поля, можно вывести из выражений для элементарной работы:

$$\begin{aligned} dA &= qE dl \cos \alpha = qE_l dl = -q d\phi; \\ E_l &= -\frac{d\phi}{dl}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $E_l$  — проекция вектора  $\vec{E}$  на направление  $\vec{l}$  в пространстве.

В наиболее общем векторном виде выражение, связывающее  $\vec{E}$  и  $\phi$ , записывается из полученного в механике соотношения между консервативной силой и потенциальной энергией:

$$\begin{aligned} \vec{F}_k &= q\vec{E} = -\text{grad} W_p = -\text{grad}(q\phi); \\ \vec{E} &= -\text{grad} \phi = -\nabla \phi, \quad E_l = -\frac{d\phi}{dl}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Итак, в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  равен по модулю и противоположен по направлению вектору градиента потенциала, т. е. вектор  $\vec{E}$  в каждой точке указывает направление наиболее быстрого убывания потенциала (см. рис. 2.6а).

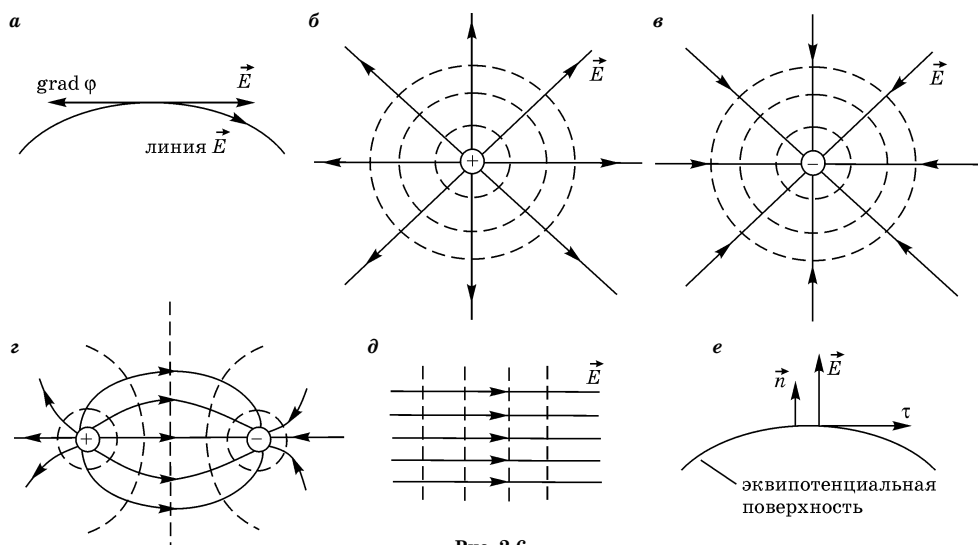


Рис. 2.6

Следует отметить, что при описании электростатического поля можно было бы ограничиться введением только одной характеристики поля — вектора  $\vec{E}$ . Действительно, через него можно определить потенциальную энергию заряда, работу по его перемещению, не вводя понятие потенциала. Но понятие потенциала является удобным с точки зрения практического применения электростатических полей.

## 2.6. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

**1. Линии вектора  $\vec{E}$ .** Для графического изображения электростатических полей используют линии вектора  $\vec{E}$  — они проводятся так, чтобы в каждой точке вектор  $\vec{E}$  был направлен по касательной к ним (рис. 2.6). Линии вектора  $\vec{E}$  нигде не пересекаются, они начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность. Примеры графического изображения полей точечных зарядов приведены на рис. 2.6б, в, г.

Для одного точечного заряда линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие или входящие в него. В случае однородного электрического поля (рис. 2.6д), в каждой точке которого вектор  $\vec{E}$  одинаков и по модулю, и по направлению, линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, параллельные друг другу и отстоящие друг от друга на одинаковом расстоянии.

Графическое изображение полей с помощью линий  $\vec{E}$  позволяет наглядно видеть направление кулоновской силы, действующей на точечный заряд, помещенный в данную точку поля, что удобно для качественного анализа поведения заряда.

Обычно линии  $\vec{E}$  проводят так, чтобы их густота в каждой точке поля определяла числовое значение вектора  $\vec{E}$ . Под густотой линий  $\vec{E}$  понимают

количество линий, пронизывающих перпендикулярную к ним плоскую поверхность фиксированной площади. Поэтому по степени близости друг к другу линий  $\vec{E}$  можно судить об изменении модуля вектора  $\vec{E}$  и соответственно об изменении модуля кулоновской силы, действующей на заряженную частицу в электрическом поле.

**2. Эквипотенциальные поверхности.** Эквипотенциальная поверхность — это поверхность равного потенциала, в каждой точке поверхности потенциал  $\varphi$  будет одинаковым. Поэтому элементарная работа по перемещению заряда  $q$  по такой поверхности будет равна нулю:  $dA = -dq\varphi = 0$ . Соответственно вектор  $\vec{E}$  в каждой точке поверхности будет перпендикулярен к ней, то есть будет направлен по вектору нормали  $\vec{n}$  (рис. 2.6e). Действительно, если бы это было не так, то тогда существовала бы составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_\tau$ ), направленная по касательной к поверхности, и, следовательно, потенциал в разных точках поверхности был бы разным

$$E_\tau = -\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq \text{const},$$

что противоречит определению эквипотенциальной поверхности.

На рис. 2.6 приведено графическое изображение электрических полей с помощью эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) для точечного заряда (рис. 2.6б, в — это сферы, в центре которых находится точечный заряд), для поля, созданного одновременно отрицательным и положительным зарядами (рис. 2.6г), для однородного электрического поля (рис. 2.6д) — это плоскости, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ .

Условились проводить эквипотенциальные поверхности так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была одинаковой. Это позволяет наглядно видеть изменение потенциальной энергии заряда при его движении в электрическом поле.

Тот факт, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке, позволяет достаточно просто переходить от графического изображения электрического поля с помощью линий  $\vec{E}$  к эквипотенциальным поверхностям и наоборот. Так, проведя на рис. 2.6б, в, г, д пунктирные линии, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ , можно получить графическое изображение поля с помощью эквипотенциальных поверхностей в плоскости рисунка.

## 2.7. ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА $\vec{E}$ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА $\vec{E}$

Понятие циркуляции и потока для произвольного поля вектора  $\vec{a}$  даны в Прил. 1. Поэтому здесь запишем их сразу (без пояснения) для вектора  $\vec{E}$  электростатического поля.

Возьмем произвольный контур  $\Gamma$  и произвольную поверхность  $S$  в неоднородном электростатическом поле (см. рис. 2.7а, б).

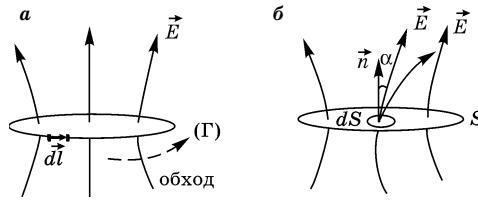


Рис. 2.7

Тогда циркуляцией вектора  $\vec{E}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  называют интеграл вида

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} E dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, d\vec{l}), \quad (2.24)$$

а потоком  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$  следующее выражение:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, \vec{n}). \quad (2.25)$$

Входящие в эти формулы векторы  $d\vec{l}$  и  $d\vec{S}$  определяются следующим образом. По модулю они равны элементарной длине  $dl$  контура  $\Gamma$  и площади  $dS$  элементарной площадки поверхности  $S$ . Направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением обхода контура  $\Gamma$ , а вектор  $d\vec{S}$  направлен по вектору нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  (рис. 2.7).

В случае электростатического поля циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру ( $\Gamma$ ) в соответствии с формулой (2.20) будет равна нулю:

$$\oint_{(r)} \vec{E} d\vec{l} = \frac{A_{\text{круг}}}{q} = \varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} = 0, \quad (2.26 \text{ а})$$

где  $A_{\text{круг}}$  — работа сил поля по перемещению точечного заряда  $q$  по этому контуру.

Как отмечено в Прил. 1, этот факт является признаком потенциальности электростатического поля, то есть *если циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна нулю, то это поле является потенциальным*. Следовательно, электрические заряды в электростатическом поле обладают потенциальной энергией.

Уравнение (2.26 а) в дифференциальной форме, справедливой для малой окрестности какой-либо точки электростатического поля, можно записать следующим образом (см. Прил. 1):

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad [\vec{V} \times \vec{E}] = 0. \quad (2.26 \text{ б})$$

Если учесть, что густота линий  $\vec{E}$  определяет модуль вектора  $\vec{E}$  в данной точке поля, то тогда поток вектора  $\vec{E}$  будет численно равен количеству  $N$  линий  $\vec{E}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

На рис. 2.8 приведены примеры расчета потока  $\Phi_E$  через различные поверхности  $S$  (рис. 2.8а, б, в; поверхность  $S$  — плоская; рис. 2.8г;  $S$  — замкнутая поверхность). В последнем случае поток  $\Phi_E$  через замкнутую поверх-

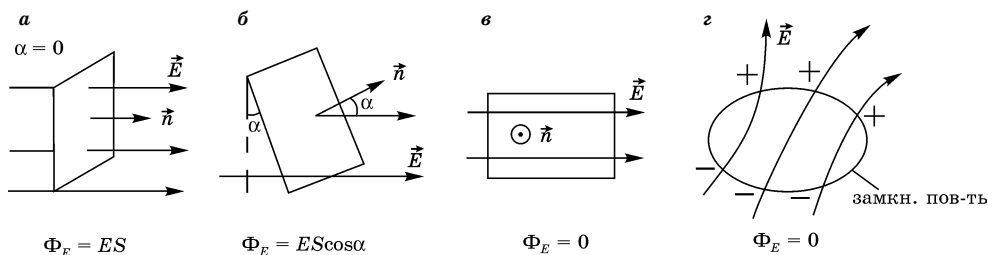


Рис. 2.8

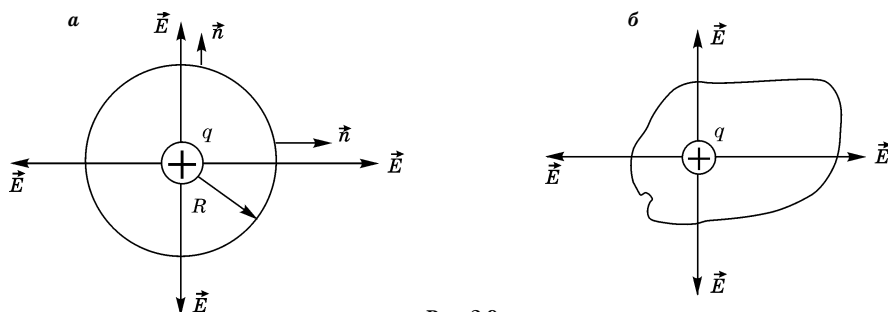


Рис. 2.9

ность равен нулю, так как количество линий  $\vec{E}$ , входящих ( $N_+$ ) и выходящих ( $N_-$ ) из нее, одинаково, но они берутся с противоположными знаками ( $\cos \alpha_+ > 0$ ,  $\cos \alpha_- < 0$ ).

Для вектора  $\vec{E}$  можно сформулировать теорему Гаусса, определяющую поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность.

**Теорема Гаусса в отсутствии диэлектрика** (вакуум) формулируется следующим образом: поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов  $q_\Sigma$ , охватываемых этой поверхностью и деленной на  $\epsilon_0$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.27)$$

Эта теорема является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции для электростатических полей.

Покажем справедливость теоремы для случая поля точечного заряда. Пусть замкнутая поверхность представляет собой сферу радиусом  $R$ , в центре которой находится точечный положительный заряд  $q$  (рис. 2.9а).

Тогда

$$\oint_S E dS \cos \alpha = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS \cos 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = q / \epsilon_0.$$

Полученный результат не изменится, если вместо сферы выбрать произвольную замкнутую поверхность (рис. 2.9б), так как поток вектора  $\vec{E}$  численно равен количеству линий  $\vec{E}$ , пронизывающих поверхность, а число таких линий  $\vec{E}$  в случаях (а) и (б) одинаково.

Подобные рассуждения с использованием принципа суперпозиции электростатических полей можно привести и в случае нескольких зарядов, попадающих внутрь замкнутой поверхности, что и подтверждает теорему Гаусса.

**Теорема Гаусса для вектора  $\vec{E}$  в присутствии диэлектрика.** В этом случае, помимо свободных зарядов  $q_\Sigma$ , необходимо также учитывать и связанные заряды  $q'$ , появляющиеся на противоположных гранях диэлектрика при его поляризации во внешнем электрическом поле (см. раздел 2.12). Поэтому теорема Гаусса запишется таким образом:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_\Sigma + q'}{\epsilon_0}, \quad (2.28)$$

в правую часть формулы входит алгебраическая сумма свободных и связанных зарядов, охватываемых поверхностью  $S$ .

Из формулы (2.28) вытекает **физический смысл теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$** : источниками электростатического поля вектора  $\vec{E}$  являются свободные и связанные заряды.

Можно учесть наличие диэлектрика в формуле (2.28) не только введением связанных зарядов  $q'$ , но и относительной диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$ , что является более удобным при практических расчетах. Наиболее просто это возможно в случаях симметричного расположения зарядов и диэлектрика (например осевой или сферической симметрии или в случае изотропного однородного диэлектрика). Тогда параметр  $\epsilon$  остается постоянной величиной, не зависящей от рассматриваемой внутри диэлектрика точки. Так, можно записать (см. раздел 2.12):

$$\frac{q_\Sigma + q}{\epsilon_0} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Тогда теорема Гаусса для вектора  $\vec{E}$  запишется так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (2.29)$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится поверхность  $S$ .

Отметим, что формула (2.29) применяется при решении задач на этот раздел, а также для большинства встречающихся на практике случаев.

В заключение запишем дифференциальную форму теоремы Гаусса, справедливую для любой малой окрестности какой-либо точки поля. С учетом формулы (П. 1.18) Прил. 1 получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \rho / \epsilon \epsilon_0, \quad (2.30)$$

где введена объемная плотность  $\rho$  свободных электрических зарядов

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (2.31)$$

то есть это заряд, содержащийся в единице объема.



## 2.8. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В случае электростатических полей, обладающих той или иной симметрией (осевая и сферическая симметрия, однородное поле), теорема Гаусса позволяет достаточно просто получить выражение для модуля вектора  $\vec{E}$ . При применении теоремы Гаусса выделяют следующие этапы:

1) из симметрии распределения зарядов определяют направление вектора  $\vec{E}$  в каждой точке поля;

2) выбирают произвольную замкнутую поверхность и рассчитывают поток вектора  $\vec{E}$  через нее. Поверхность должна содержать внутри себя заряд (часть заряда), создающий поле, и отражать симметрию поля (цилиндр, сфера);

3) рассчитывают заряд, попадающий внутрь поверхности;

4) применяют теорему Гаусса для определения модуля вектора  $\vec{E}$ .

Рассмотрим конкретные примеры применения теоремы Гаусса.

**Пример 1.** Электрическое поле равномерно заряженной по поверхности бесконечно протяженной плоскости. Поле плоского конденсатора.

*1-й этап.* Введем поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . Для этого на заряженной поверхности вблизи какой-либо ее точки выбирают элементарную площадку площадью  $dS$ , содержащую заряд  $dq$ , и рассчитывают  $\sigma$  по формуле

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (2.32)$$

то есть  $\sigma$  представляет собой заряд, приходящийся на единицу поверхности. Если плоскость заряжена равномерно, то тогда во всех ее точках  $\sigma$  будет одинаковой ( $\sigma = \text{const}$ ), и поэтому поле такой бесконечно протяженной плоскости является однородным — линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, перпендикулярные к ней; во всех точках поля модуль  $\vec{E}$  одинаков (рис. 2.10а).

*2-й этап.* Выбираем замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к плоскости (рис. 2.10а). Тогда поток  $\Phi_E$  через боковую поверхность будет равен нулю ( $\alpha = 90^\circ$ , линии  $\vec{E}$  не пересекают боковой поверхности), и поэтому остается поток только через основания площади  $S_1 = S_2 = S$ :

$$\Phi_e = \oint_s E dS \cos \alpha = \int_{S_1} E dS \cos \alpha + \int_{S_2} E dS \cos \alpha = 2ES.$$

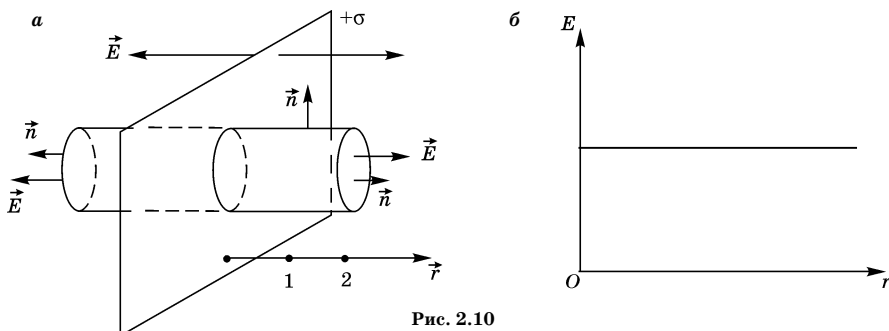


Рис. 2.10

3-й этап. Рассчитаем заряд плоскости, попадающий внутрь цилиндра:

$$q_{\Sigma} = \int_S dq = \int_S \sigma dS = \sigma S.$$

4-й этап. Применяем теорему Гаусса (2.29) для расчета модуля вектора  $\vec{E}$ :

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon \varepsilon_0}; \quad (2.33)$$

здесь учтен случай отрицательно заряженной плоскости.

На рис. 2.10б приведен график зависимости модуля вектора  $\vec{E}$  для поля плоскости в зависимости от расстояния  $r$  от нее.

Формула (2.33) позволяет найти разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от плоскости (рис. 2.10а):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = \pm E(r_2 - r_1) = \pm \frac{|\sigma|}{2\varepsilon \varepsilon_0} (r_2 - r_1), \quad (2.34)$$

знак «+» берется для положительно заряженной плоскости.

Формула (2.33) также позволяет провести расчет поля плоского конденсатора как поля двух параллельных плоскостей с равными по модулю и противоположными по знаку поверхностными плотностями зарядов (рис. 2.11а).

Используя принцип суперпозиции электростатических полей, можно сделать вывод о том, что поле конденсатора существует между его пластинами (рис. 2.11б), а модуль вектора  $\vec{E}$  этого поля

$$E = E_+ + E_- = \frac{|\sigma|}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{|q|}{S \varepsilon \varepsilon_0}, \quad (2.35)$$

где  $|q|$  — модуль заряда одной из пластин конденсатора площади  $S$ .

Оценим разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (или напряжение  $U$ ) между обкладками конденсатора, находящимися на расстоянии  $d$  друг от друга. Для этого используем формулы (2.21) и (2.35):

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = Ed = \frac{|\sigma|}{\varepsilon \varepsilon_0} d = \frac{q}{s \varepsilon \varepsilon_0} d. \quad (2.36)$$

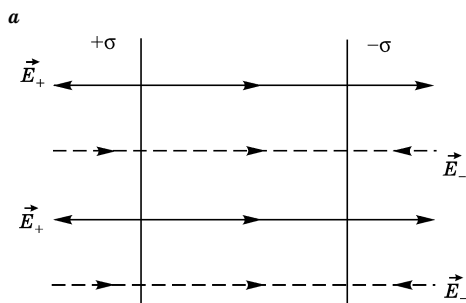
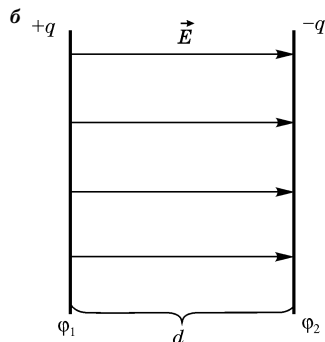


Рис. 2.11



**Пример 2.** Поле равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нити.

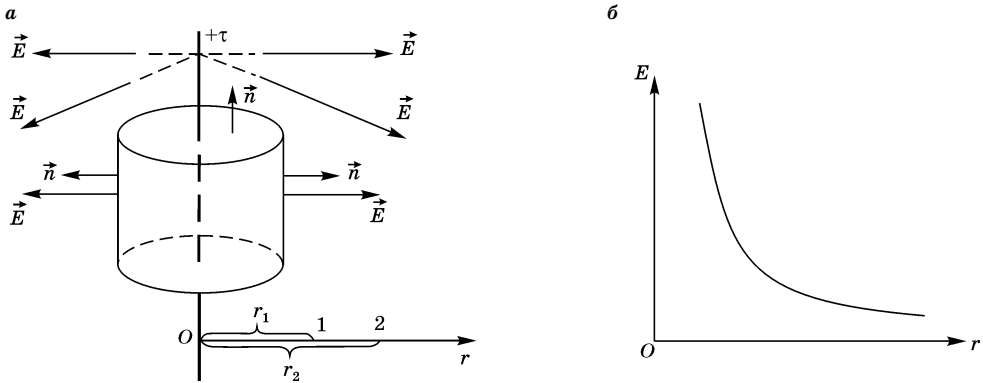


Рис. 2.12

*1-й этап.* Введем линейную плотность  $\tau$  заряда нити. Для этого на заряженной нити выбираем элемент длины  $dl$ , содержащий заряд  $dq$ , и рассчитываем  $\tau$  по формуле

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad (2.37)$$

то есть  $\tau$  представляет собой заряд, приходящийся на единицу длины нити.

Для равномерно заряженной нити во всех ее точках  $\tau$  будет одинаковой ( $\tau = \text{const}$ ), поэтому поле такой нити обладает осевой симметрией: линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие из нити и лежащие в плоскостях, перпендикулярных к ней (рис. 2.12а). На одинаковых расстояниях от нити, то есть на цилиндрических поверхностях, модуль  $\vec{E}$  будет одинаковым.

*2-й этап.* Выбираем замкнутую поверхность в виде цилиндра, имеющего высоту  $H$  и радиус  $r$ , ось цилиндра совпадает с нитью. Поток  $\Phi_E$  через основания цилиндра равен нулю ( $\alpha = 90^\circ$ ), поэтому остается поток только через боковую поверхность:

$$\Phi_E = \oint E dS \cos \alpha = \int_{S_{\text{бок}}} E dS \cos \alpha = E S_{\text{бок}} = E 2\pi r H.$$

*3-й этап.* Рассчитываем заряд отрезка нити длины  $H$ , попадающий внутрь цилиндра:

$$q_{\Sigma} = \int dq = \int \tau \cdot dl = \tau \cdot H.$$

*4-й этап.* Применяем теорему Гаусса для расчета модуля вектора  $\vec{E}$ :

$$E 2\pi r H = \frac{\tau \cdot H}{\epsilon \epsilon_0},$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r}. \quad (2.38)$$

Формула (2.38) позволяет оценить разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от нити (рис. 2.12а):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_1^2 E dl \cos \alpha = [dl = dr, \alpha = 0] = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.39)$$

На рис. 2.12б приведен график зависимости модуля вектора  $\vec{E}$  для поля нити от расстояния  $r$ .

**Пример 3.** Поле равномерно заряженной по поверхности сферы (заряженной металлической сферы или шара) радиуса  $R$  и заряда  $q$ .

*1-й этап.* Поле такой сферы обладает сферической симметрией — линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие из центра положительно заряженной сферы заряда  $q$  (рис. 2.13а). Причем на одинаковом расстоянии от центра сферы, то есть на сферических поверхностях, модуль  $\vec{E}$  будет одинаковым.

*2-й этап.* Выбираем вспомогательную замкнутую поверхность в виде сферы, имеющей радиус  $r > R$ . Рассчитаем поток  $\Phi_E$  через эту замкнутую поверхность:

$$r > R: \Phi_e = \oint_S E dS \cos \alpha = E \oint_S dS = E 4\pi r^2.$$

*3-й этап.*  $q_\Sigma = q$ .

*4-й этап.*

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Аналогичный расчет для  $r < R$  свидетельствует о том, что внутри сферы нет электрического поля, так как в этом случае внутрь вспомогательной поверхности, имеющей радиус  $r$ , заряд  $q$  не попадает ( $q_\Sigma = 0$ ).

$$r < R: E = 0.$$

Из записанных выше формул для вектора  $\vec{E}$  следует, что внутри сферы поле отсутствует, а за ее пределами оно совпадает с полем точечного заря-

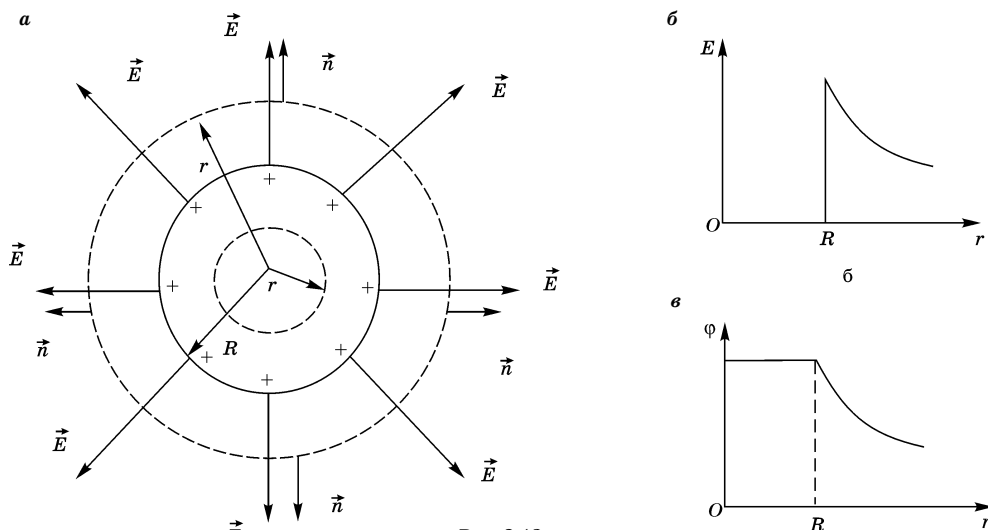


Рис. 2.13

да  $q$ , помещенного в центр сферы. Это позволяет сразу же записать формулы и для потенциала поля сферы:

$$r < R: \varphi_{\text{сф}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad E = 0; \quad (2.40 \text{ а})$$

$$r \geq R: \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (2.40 \text{ б})$$

Графики зависимости  $E$  и  $\varphi$  от расстояния  $r$  от центра сферы приведены на рис. 2.13в, б.

Как видно из формул (2.40), на поверхности сферы ( $r = R$ ) справедливы следующие равенства:

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{\sigma \cdot R}{\epsilon\epsilon_0}, \quad E_{\text{сф}} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \varphi_{\text{сф}} / R, \quad (2.41)$$

где в формулы введена поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

В заключение отметим, что графики зависимости потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  для электростатических полей, создаваемых нитью и плоскостью, не приводятся в связи с тем, что не удастся выбрать нулевой уровень отсчета потенциала, поэтому были записаны только формулы для разности потенциалов между двумя точками поля.

## 2.9. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 2.9.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗБЫТОЧНОГО ЗАРЯДА НА ПРОВОДНИКАХ В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

К проводникам относятся вещества, проводящие электрический ток; в них имеются свободные заряды, которые способны перемещаться по проводнику под действием внешнего электрического поля. В металлических проводниках свободными зарядами являются электроны, они образуют газ, заполняющий кристаллическую решетку положительно заряженных ионов.

Рассмотрим, что произойдет, если проводнику сообщить избыточный заряд. При этом положительному заряду металлического проводника соответствует недостаток свободных электронов, а отрицательному заряду — их избыток.

В условиях равновесия избыточного заряда справедливы следующие утверждения.

1. Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а объем проводника и его поверхность являются эквипотенциальными:

$$E_{\text{вн}} = 0, \quad \varphi_{\text{вн}} = \text{const}. \quad (2.42)$$

Действительно, если равенства (2.42) не выполняются, то тогда свободные заряды в проводнике будут перемещаться, так как работа сил электрического поля не будет равна нулю ( $dA = qEdl \cos \alpha = -qd\varphi \neq 0$ ). Это противоречит

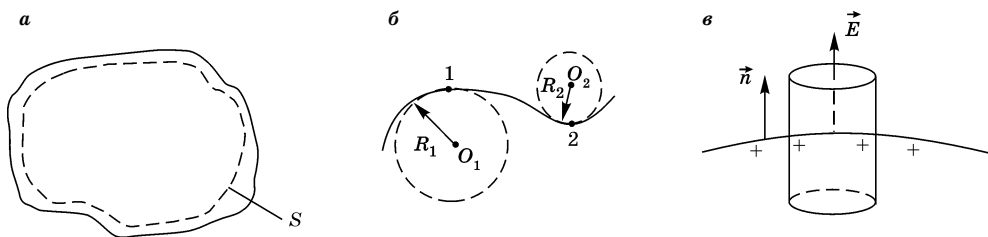


Рис. 2.14

условию равновесия избыточного заряда: в условиях равновесия они должны быть неподвижными.

2. Избыточный заряд распределяется только по внешней поверхности проводника, так как из-за кулоновского отталкивания одноименных зарядов они стараются разойтись на максимально возможные расстояния. Это утверждение можно доказать, используя теорему Гаусса. Выберем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность (рис. 2.14а) и рассчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через нее в условиях равновесия. Учтем, что связанных зарядов в металле не возникает ( $q' = 0$ ), и поэтому из формулы (2.42) следует

$$\oint_S \vec{E}_{\text{вн}} dS \cos \alpha = [E_{\text{вн}} = 0] = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{\Sigma} = 0,$$

то есть внутри такой поверхности избыточного заряда нет, так как этот заряд одного знака. Следовательно, он располагается только на внешней поверхности проводника.

3. Распределение избыточного заряда по внешней поверхности проводника является неравномерным: модуль вектора  $\vec{E}$  и поверхностная плотность заряда  $\sigma$  больше в тех точках поверхности проводника, где ее кривизна больше.

Кривизну поверхности в какой-либо ее точке можно определить радиусом  $R$  вписанной вблизи этой точки сферы, а именно кривизна поверхности обратно пропорциональна  $R$ .

Докажем третье утверждение. Для этого отметим, что выводы об электрическом поле равномерно заряженной по поверхности сферы, сделанные в разделе 2.8, справедливы и в случае заряженной металлической сферы или шара, так как кривизна поверхности во всех ее точках одинакова, то есть избыточный заряд распределяется по ней равномерно.

Если учесть, что поверхность проводника можно представить в виде совокупности разных участков вписанных в нее сфер (рис. 2.14б) и использовать формулы (2.41) для напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  на поверхности сферы, то тогда можно записать:

$$\varphi_{\text{поверх}} = \varphi_{\text{сф1}} = \varphi_{\text{сф2}} : \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma_{12} \cdot R_2}{\varepsilon \varepsilon_0} \Rightarrow \sigma \sim \frac{1}{R}; \quad (2.43 \text{ а})$$

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{\sigma \cdot R}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad E_{\text{пов}} = E_{\text{сф}} = \varphi_{\text{сф}} / R = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.43 \text{ б})$$

Согласно формуле (2.43 б) модуль вектора  $\vec{E}$  вблизи какой-либо точки поверхности заряженного проводника пропорционален поверхностной плот-

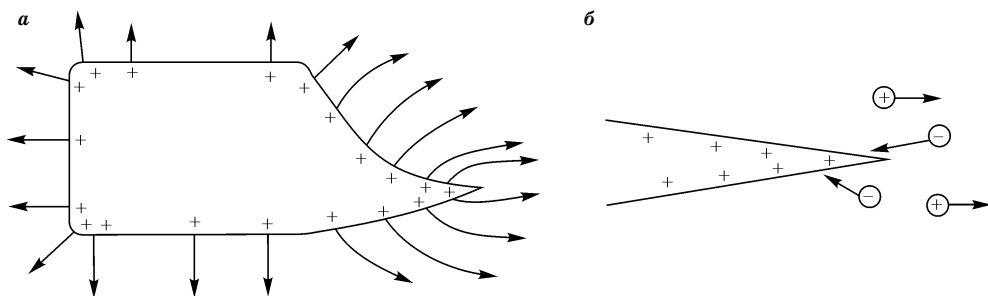


Рис. 2.15

ности заряда  $\sigma$  в этой точке. Формулу (2.43 б) можно получить на основе теоремы Гаусса, выбирая вспомогательную замкнутую поверхность в виде цилиндра малого объема, образующая которого перпендикулярна к поверхности проводника (рис. 2.14в). Для этого следует учесть, что в пределах цилиндра электрическое поле будет однородным, и использовать формулу (2.29).

На рис. 2.15а приведено графическое изображение с помощью линий  $\vec{E}$  электрического поля заряженного проводника сложной формы.

Нужно учесть, что линии  $\vec{E}$  во всех точках перпендикулярны к поверхности металла, так как она является эквипотенциальной поверхностью.

Вблизи острия модуль вектора  $\vec{E}$  может превысить значение, соответствующее ионизации молекул воздуха (при атмосферном давлении  $E_{\text{иониз}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ ), что приводит к возникновению **стекания зарядов**, сопровождающегося **электрическим ветром**. Образующиеся при ионизации молекул электроны движутся к острию и компенсируют на нем часть заряда, равновесие зарядов на проводнике нарушается, и к острию подходят заряды с других участков поверхности проводника (рис. 2.15б). Это движение продолжается до тех пор, пока модуль напряженности электрического поля вблизи острия будет превышать  $E_{\text{иониз}}$ . В то же время положительно заряженные ионы молекул воздуха движутся в противоположном направлении от острия, при этом они увлекают за собой нейтральные молекулы.

Тот факт, что избыточные заряды в состоянии равновесия находятся только на внешней поверхности проводника, позволяет создать устройства, способные накапливать большие заряды и достигать разности потенциалов в несколько миллионов вольт. К ним можно отнести **электростатический генератор Ван-де-Граафа** (рис. 2.16). Он представляет собой металлическую сферу (1), закрепленную на изолирующей колонне (2). На металлическую щетку (3) поступает положительный заряд от источника напряжения (4) в несколько десятков киловольт.

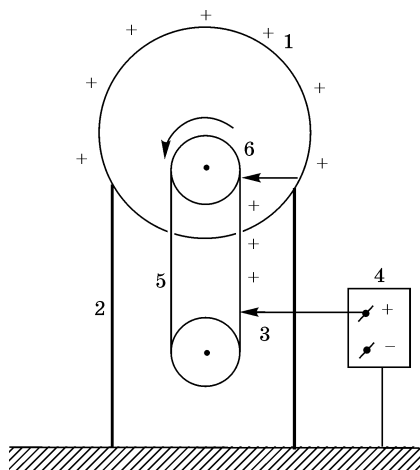


Рис. 2.16

Вблизи остриев щетки напряженность электрического поля превышает  $E_{\text{иониз}}$  молекул воздуха (радиус острия щетки  $r \sim 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\varphi \sim 10^4$  В,  $E = \varphi/r \sim 1 \cdot 10^7$  В/м), и заряд стекает на диэлектрический транспортер (5) — движущуюся замкнутую ленту из прорезиненной ткани. Эта лента подает заряд внутрь металлической сферы, где он стекает на щетку и сразу поступает на внешнюю поверхность сферы.

Максимально достижимая разность потенциалов  $U_{\text{макс}}$  в таком устройстве ограничивается явлением стекания заряда с поверхности сферы, то есть возникновением разряда в воздухе при  $E_{\text{сф}} \geq E_{\text{иониз}}$ . Величина  $U_{\text{макс}}$  составляет порядка 10 мегавольт при радиусе сферы  $R = 4$  м:

$$\uparrow R \Rightarrow \uparrow U_{\text{макс}} \approx \varphi_{\text{сф}} = E_{\text{сф}} \cdot R \leq E_{\text{иониз}} \cdot R = 3 \cdot 10^6 \cdot 4 \approx 1,2 \cdot 10^7 \text{ эВ.}$$

Электрические генераторы подобного типа используются главным образом в высоковольтных ускорителях заряженных частиц, а также в слаботочной высоковольтной технике.

### 2.9.2. НЕЗАРЯЖЕННЫЙ ПРОВОДНИК ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Поместим во внешнее электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$  незаряженный проводник (рис. 2.17а, начальный момент времени  $t = 0$ ).

Под действием сил поля свободные заряды в проводнике приходят в движение и на его противоположных сторонах появляются **индуцированные заряды** (такое явление получило название электростатической индукции). Они в условиях равновесия создают свое поле  $\vec{E}'$ , которое компенсирует внешнее электрическое поле внутри проводника ( $\vec{E}_{\text{внутри}} = \vec{E}' + \vec{E}_0 = 0$ ,  $\varphi_{\text{внутри}} = \text{const}$ ), и искажают внешнее поле снаружи, вблизи поверхности (рис. 2.17б).

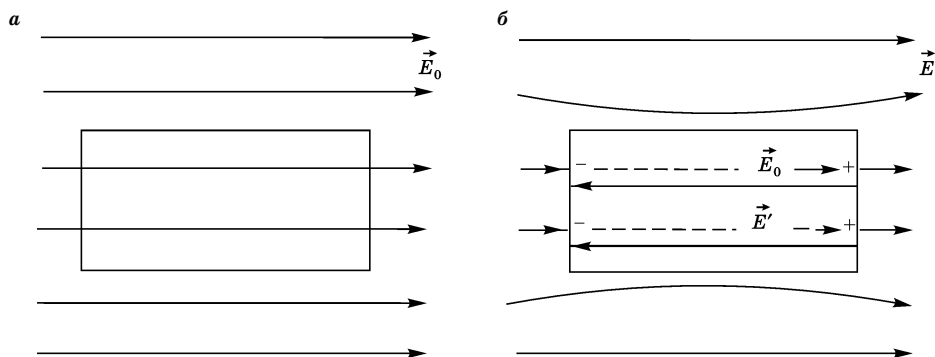


Рис. 2.17

Итак, внешнее электрическое поле не проникает внутрь металла. Это позволяет использовать металлическую оболочку, сплошную или в виде сетки, для защиты (экранировки) различных приборов от внешних электрических полей.



## 2.10. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ КОНДЕНСАТОРА

Рассмотрим уединенный проводник, в окружающем пространстве которого нет других тел — диэлектриков ( $\varepsilon = 1$ , вакуум) или проводников. Из формул электростатики (2.39)–(2.41) следует, что заряд  $q$  проводника и его потенциал  $\varphi$  (он в условиях равновесия одинаковый внутри и на поверхности проводника) будут пропорциональны друг другу ( $q \sim \varphi$ ). Поэтому коэффициент пропорциональности между ними

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (2.44)$$

не будет зависеть ни от  $q$  и ни от  $\varphi$ , он называется **электроемкостью проводника**. Электроемкость проводника характеризует его способность накапливать заряды и зависит только от геометрических размеров проводника и диэлектрических свойств окружающей среды  $\varepsilon$ . Действительно, в случае металлической сферы с учетом формул (2.40) можно записать:

$$C_{\text{сф}} = \frac{q}{\varphi_{\text{сф}}} = \frac{q}{\left( \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \right)} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \quad (2.45)$$

Электроемкость уединенного проводника является достаточно малой величиной. Так, если рассматривать планету Земля как проводящий шар радиуса  $R = 6400$  км, то тогда ее электроемкость составит всего 711 мкФ.

Оказывается, что наличие вблизи уединенного проводника каких-либо тел (проводники или диэлектрики) увеличивает его электроемкость.

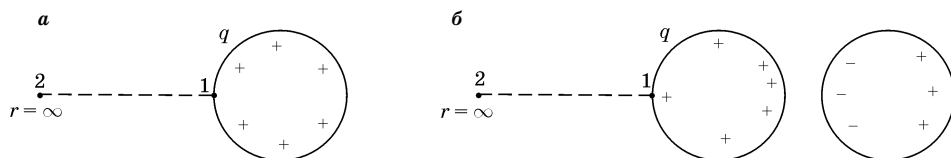


Рис. 2.18

Действительно, если, например, к положительно заряженному проводнику (рис. 2.18а) поднести незаряженный металлический проводник, то за счет перераспределения заряда на проводниках (рис. 2.18б) электрическое поле в пространстве ослабевает, то есть на линии 1–2 модуль вектора  $\vec{E}$  будет уменьшаться и поэтому потенциал поверхности заряженного проводника

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \int_1^2 E dl \cos \alpha$$

также будет уменьшаться, что при постоянном заряде проводника приводит к увеличению его электроемкости:

$$q = \text{const}, \quad \varphi \downarrow \Rightarrow \uparrow C = \frac{q}{\varphi}.$$

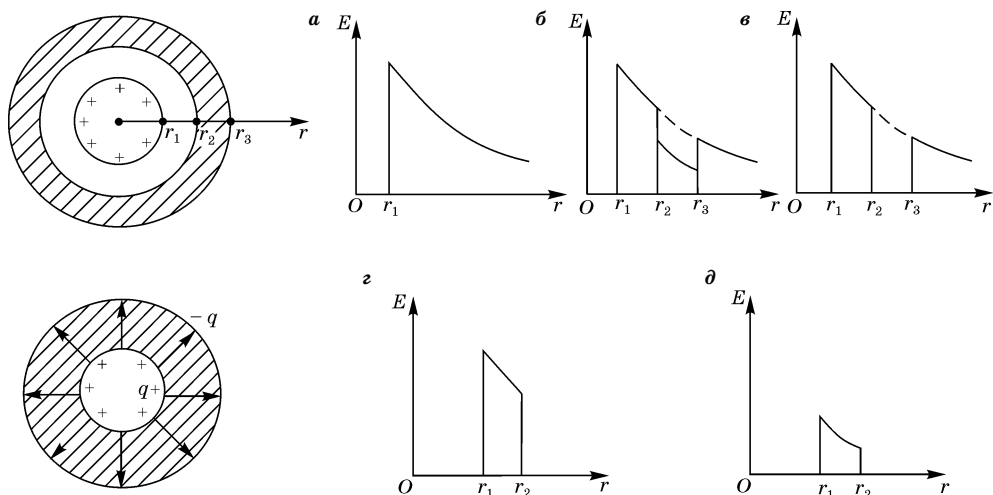


Рис. 2.19

Покажем на конкретном примере заряженной проводящей сферы радиуса  $r_1$ , как происходит ослабление электрического поля и потенциала сферы при наличии в окружающем ее пространстве каких-либо тел.

В отсутствие других тел зависимость модуля напряженности электрического поля сферы от расстояния  $r$  приведена на графике (рис. 2.19а). Рис. 2.19 иллюстрирует, как последовательно ослабляется электрическое поле сферы для различных случаев размещения вокруг нее тел, а именно сферу окружают:

- 1) шаровым слоем из диэлектрика ( $r_2 < r < r_3$ , рис. 2.19б);
  - 2) заменяют шаровой слой из диэлектрика шаровым слоем из металла ( $r_2 < r < r_3$ , рис. 2.19в);
  - 3) металлической сферой радиуса  $r_2$ , несущей заряд, равный по модулю заряду сферы радиуса  $r_1$ , но противоположный ему по знаку (рис. 2.19г);
  - 4) заполняют пространство между сферами диэлектриком (рис. 2.19д).
- Случаи (з) и (д) соответствуют сферическому конденсатору.

Как следует из рис. 2.19, наибольший эффект увеличения емкости проводника достигается для конденсаторов, представляющих собой две металлические пластины, разделенные слоем диэлектрика. На пластины (обкладки) подают заряды, одинаковые по модулю и противоположные по знаку. Форма обкладок конденсатора обеспечивает существование электрического поля только в пространстве между ними. Это позволяет устранить влияние на емкость конденсатора окружающих его тел.

На рис. 2.20 приведено схематическое изображение плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

Емкость конденсатора вводится по формуле

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (2.46)$$

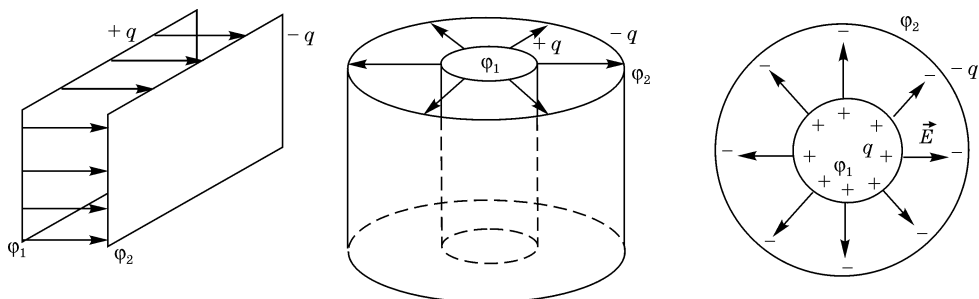


Рис. 2.20

где  $q$  — заряд положительно заряженной пластины конденсатора,  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов между его обкладками.

Емкость конденсатора, как и емкость уединенного проводника, зависит только от его геометрических размеров и диэлектрических свойств среды между его пластинами.

Запишем формулы для емкости конденсаторов различного вида.

**1. Плоский конденсатор.** Используя полученную ранее для разности потенциалов формулу (2.36), получим

$$C_{\text{сф}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\left(\frac{q}{S\epsilon\epsilon_0}d\right)} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (2.47)$$

где  $S$  — площадь одной пластины конденсатора,  $d$  — расстояние между ними,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора.

**2. Цилиндрический конденсатор.** Радиусы обкладок конденсатора обозначим  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), а длину цилиндра —  $H$ . Электрическое поле такого конденсатора обладает осевой симметрией и, согласно теореме Гаусса, определяется зарядом внутренней обкладки (цилиндра), напряженность этого поля рассчитывается по формуле (2.38). Используя выражение (2.39), для разности потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) запишем:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\tau(\ln(R_2/R_1))/(2\pi\epsilon\epsilon_0)} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.48)$$

**3. Сферический конденсатор.** Радиусы обкладок обозначим  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Электрическое поле конденсатора обладает сферической симметрией и, согласно теореме Гаусса, определяется зарядом только внутренней сферы. Учитывая формулу (2.40) для потенциала поля сферы, можно рассчитать разность потенциалов между обкладками конденсатора и его емкость:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{q/(4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1) - q/(4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}. \quad (2.49)$$

## 2.11. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА И КОНДЕНСАТОРА. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Выведем формулу для энергии  $W$  заряженного проводника. Для этого рассмотрим работу внешних сил по увеличению заряда проводника от  $q_1 = 0$  (энергия проводника  $W_1 = 0$ , его потенциал  $\varphi_1 = 0$ ) до  $q_2$  (энергия  $W_2$ , потенциал  $\varphi_2$ ), а именно будем малыми порциями  $dq$  перемещать заряд из бесконечности ( $\varphi_\infty = 0$ ) на поверхность проводника. При этом работа внешней силы  $A_{\text{вн}}$  будет совершаться против кулоновской силы отталкивания одноименных зарядов  $A_{\text{кул}}$  и поэтому

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} dA_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} (\varphi_\infty - \varphi) dq = \int_0^{q_2} \frac{q}{C} dq = \frac{q_2^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$ .

Итак, для энергии заряженного уединенного проводника можно записать

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (2.50)$$

Аналогично можно получить формулу для энергии  $W$  заряженного конденсатора. Запишем работу внешних сил по перемещению малых порций заряда  $dq$  с одной пластины конденсатора на другую из состояния 1 (конденсатор не заряжен, заряд пластин  $q = 0$ , энергия конденсатора  $W_1 = 0$ ) в состояние 2 (энергия  $W_2$ , заряд положительной обкладки  $q_2 = q$ ).

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} dA_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} (\varphi_1 - \varphi_2) dq = -\int_0^{q_2} \left(-\frac{q}{C}\right) dq = \frac{q^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$ , так как заряд перемещается от отрицательно заряженной обкладки, где находится точка 1, к положительно заряженной обкладке, на которой находится точка 2. В итоге энергия заряженного конденсатора запишется следующим образом:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \quad (2.51)$$

Оставаясь в рамках электростатики, нельзя однозначно ответить на вопрос о происхождении энергии заряженного проводника (конденсатора) — это энергия его зарядов или энергия электростатического поля в окружающем проводник пространстве. И только из рассмотрения полной системы уравнения Максвелла был сделан вывод в пользу электростатического поля. Поэтому запишем формулы (2.49) и (2.50) через характеристику электростатического поля — вектор напряженности  $\vec{E}$ . Для энергии заряженного плоского конденсатора получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V = wV,$$

где  $V = Sd$  — объем пространства между обкладками конденсатора,  $w$  — объемная плотность энергии электростатического поля.

В общем случае для неоднородного поля  $w$  определяется так:

$$w(x, y, z) = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2(x, y, z)}{2}, \quad (2.52)$$

где  $dW$  — энергия электростатического поля, заключенная в элементарном объеме  $dV$  вблизи точки пространства с координатами  $(x, y, z)$ .

Введение  $w$  позволяет рассчитывать энергию  $W$  поля в любом конечном объеме  $V$  пространства:

$$W = \int_V w dV = \iiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2(x, y, z)}{2} dx dy dz. \quad (2.53)$$

Так, например, применение формулы (2.53) к сферически симметричному электростатическому полю заряженной металлической сферы радиуса  $R$  приводит к формуле, совпадающей с выражением (2.50):

$$W = \int_R^\infty \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \right)^2 dV = \int dV = 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{q\varphi}{2}.$$

## 2.12. ДИЭЛЕКТРИКИ

### 2.12.1. ПОЛЯРНЫЕ И НЕПОЛЯРНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

К диэлектрикам относят вещества, в которых нет свободных зарядов или их число настолько мало, что они не оказывают существенного влияния на их характеристики. Поведение диэлектрика в электрическом поле определяется поведением его молекул, они делятся на полярные и неполярные молекулы.

У полярных молекул (молекулы воды  $\text{H}_2\text{O}$ , соляной кислоты, аммиака и т. д.) в отсутствие электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают (рис. 2.21), такие молекулы представляют

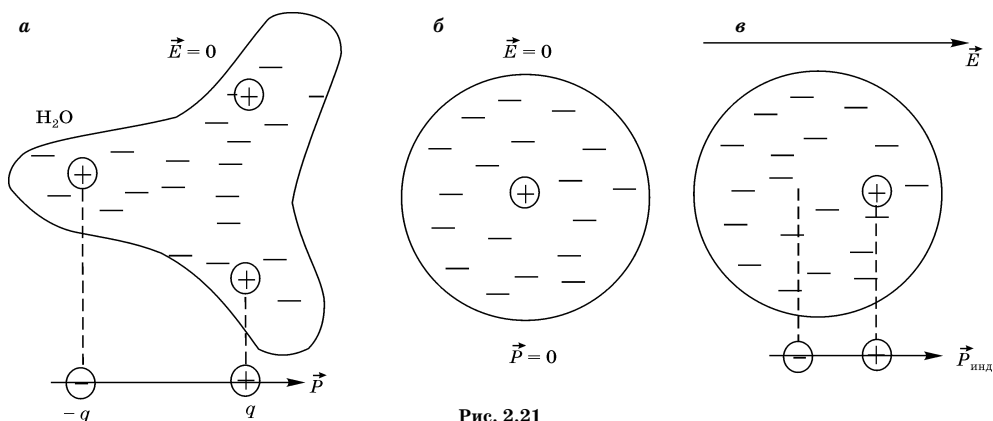


Рис. 2.21

собой диполи, которые характеризуются дипольным моментом  $\vec{p}$  (см. рис. 2.3б и раздел 2.4).

Для неполярных молекул (молекулы кислорода  $O_2$ , водорода  $H_2$ , гелия  $He$  и т. д.) в отсутствие электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают, поэтому дипольный момент молекулы  $\vec{p}$  равен нулю (см. рис. 2.21б). В электрическом поле неполярная молекула за счет смещения ее положительных и отрицательных зарядов приобретает индуцированный дипольный момент  $\vec{p}_{\text{инд}}$  (рис. 2.21в), пропорциональный вектору  $\vec{E}$  электрического поля:

$$\vec{p}_{\text{инд}} = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad (2.54)$$

где  $\alpha$  — скалярная величина, называемая поляризуемостью молекулы.

Индуцированный дипольный момент  $\vec{p}_{\text{инд}}$  появляется в электрическом поле и у полярной молекулы, но он значительно меньше уже имеющегося у нее дипольного момента  $\vec{p}$ , поэтому для таких молекул  $\vec{p}_{\text{инд}}$  пренебрегают.

Введение понятия дипольного момента молекулы позволяет описать ее поведение и соответственно поведение самого диэлектрика в электрическом поле.

## 2.12.2. ПОВЕДЕНИЕ ДИПОЛЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**1. Однородное электрическое поле.** На заряды диполя в однородном электрическом поле действует пара одинаковых по модулю сил ( $F_+ = F_-$ ), вызывающих вращение диполя вокруг его центра (точки  $O$ ) с уменьшением угла между дипольным моментом  $\vec{p}$  и вектором  $\vec{E}$  (рис. 2.22а). В итоге диполь установится в положении, для которого угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  будет равен нулю ( $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}, \alpha = 0$ , положение устойчивого равновесия).

Введем потенциальную энергию диполя  $W$  в электрическом поле. Для этого рассчитаем работу сил поля по вращению диполя от состояния 1, при котором угол  $\alpha = \alpha_1$ , до состояния 2 ( $\alpha = \alpha_2$ ). Используя формулу для работы силы по вращению тела, получим:

$$\begin{aligned} A_{12} &= - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M d\alpha = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( F_+ \frac{l}{2} \sin \alpha + F_- \frac{l}{2} \sin \alpha \right) d\alpha = \\ &= -qE \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = (pE \cos \alpha_1) - (pE \cos \alpha_2) = W_1 - W_2. \\ W &= -(\vec{p} \vec{E}) = -pE \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{p}, \vec{E}). \end{aligned} \quad (2.55)$$

При выводе формулы (2.55) было учтено, что силы электростатического поля являются консервативными, поэтому их работа равна убыли потенциальной энергии диполя в этом поле.

Из выражения (2.55) следует, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия диполя минимальна и равна  $W = -pE$ .

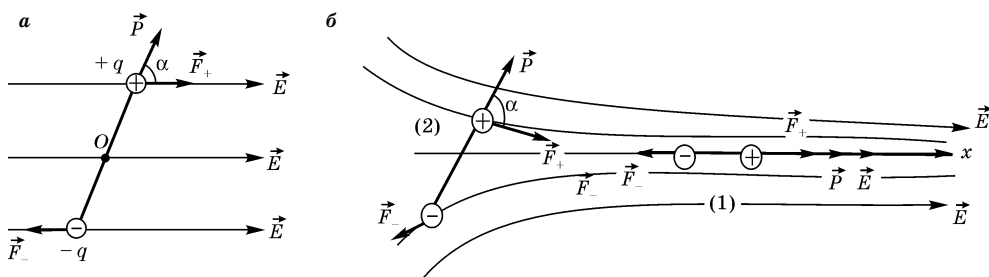


Рис. 2.22

**2. Неоднородное электрическое поле.** Пусть электрическое поле нарастает вдоль оси  $Ox$  (рис. 2.22б). Если угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  равен нулю (положение 1), то тогда под действием пары сил диполь будет втягиваться в область более сильного поля ( $F_+ > F_-$ , рис. 2.22б). При начальном угле  $\alpha < 90^\circ$  (положение 2) пара сил, действующих на заряды диполя, будет приводить к его вращению с уменьшением угла  $\alpha$  и втягиванию в область более сильного поля, то есть к поступательному движению вдоль оси  $Ox$ . При начальном угле  $\alpha < 90^\circ$  диполь будет сначала поворачиваться с уменьшением угла  $\alpha$  и выталкиваться в область более слабого поля. При достижении угла  $\alpha = 90^\circ$  он поворачивается с уменьшением угла  $\alpha$  и начинает втягиваться в область более сильного поля.

Можно записать формулу для проекции на ось  $Ox$  силы  $\vec{F}$ , вызывающей поступательное движение диполя, используя известное из механики выражение, связывающее консервативную силу и потенциальную энергию:

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = p \frac{dE}{dx} \cos \alpha. \quad (2.56)$$

Итак, при любом начальном угле  $\alpha$  диполь в неоднородном электрическом поле в итоге втягивается в область более сильного поля. Такое поведение диполя используется в пылеулавливателях: в какой-либо части трубы, из которой выходит дым (это могут быть, например, побочные газообразные продукты горения на тепловых электростанциях, металлургического производства), создается неоднородное электрическое поле; частицы дыма (диполи) втягиваются в область более сильного поля и не попадают в атмосферу, не загрязняя окружающую среду.

### 2.12.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ, ВВОДИМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1.  $\vec{E}', \vec{E}, q', \sigma'$ . Диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ , поляризуется — создает свое собственное электрическое поле напряженности  $\vec{E}'$ . При этом напряженность результирующего электрического поля  $\vec{E}$  будет равна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (2.57)$$

Поляризация диэлектрика сопровождается появлением на его противоположных гранях некомпенсированных связанных зарядов  $q'$ , которые

и создают поле  $\vec{E}'$ . Поверхностная плотность заряда  $\sigma'$  характеризует распределение заряда  $q'$  по поверхности диэлектрика.

**2. Диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$ .** Она показывает, во сколько раз модуль напряженности  $\vec{E}_0$  поля в вакууме больше модуля напряженности  $\vec{E}$  поля внутри диэлектрика:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (2.58)$$

Эта формула справедлива для однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все пространство или представляющего собой цилиндрические, сферические и прямоугольные пластины, находящиеся соответственно в электрическом поле осевой или сферической симметрии или в однородном поле. Тогда между векторами  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  угол будет равен  $180^\circ$  и можно записать:

$$E = E_0 - E'; \quad \varepsilon = \frac{E_0}{E_0 - E'}. \quad (2.59)$$

В зависимости от формы диэлектрика и его расположения во внешнем электрическом поле угол между векторами  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  может изменяться (рис. 2.23), но всегда внутри диэлектрика электрическое поле связанных зарядов ослабляет внешнее электрическое поле ( $E < E_0$ , рис. 2.23 точки 1 и 4), чего нельзя сказать о суммарном электрическом поле за пределами диэлектрика ( $E < E_0$ , рис. 2.23 точка 3;  $E > E_0$ , рис. 2.23 точка 2).

**3. Вектор поляризации (поляризованность)  $\vec{P}$**  равен векторной сумме дипольных моментов молекул, находящихся в единице объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (2.60)$$

Вектор поляризации  $\vec{P}$  описывает способность диэлектрика создавать свое собственное поле  $\vec{E}'$ . Можно показать, что

$$\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}'. \quad (2.61)$$

Опытным путем была установлена формула

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.62)$$

где величина  $\chi$  определена как диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

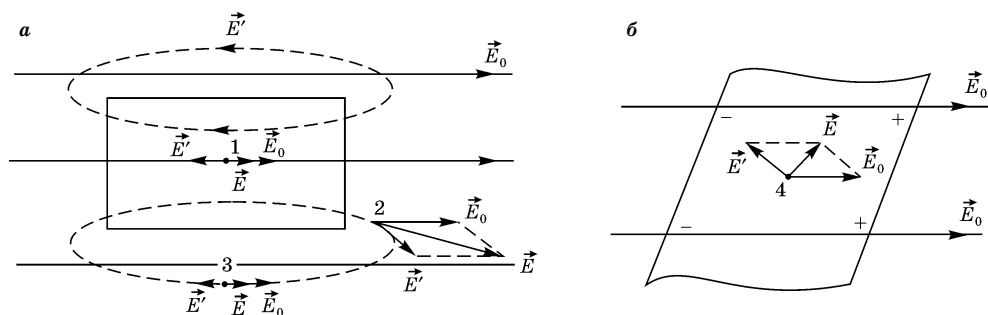


Рис. 2.23



4. Вектор электрического смещения (электрической индукции)  $\vec{D}$  вводится формулой

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.63)$$

Используя (2.59), можно записать:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + \chi, \\ \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

#### 2.12.4. НЕПОЛЯРНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Во внешнем электрическом поле происходит смещение зарядов неполярных молекул, они становятся диполями и приобретают индуцированные дипольные моменты. На рис. 2.24 показано расположение молекул-диполей на поверхности и внутри диэлектрика, представляющего собой прямоугольную пластину длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ , во внешнем однородном электрическом поле напряженности  $\vec{E}_0$ .

Из рисунка видно, что внутри происходит компенсация зарядов соседних молекул (суммарный заряд, заключенный в областях, ограниченных замкнутыми пунктирными линиями, равен нулю). Некомпенсированными остаются заряды молекул на противоположных гранях диэлектрика, они называются **связанными зарядами**, поскольку находятся внутри молекул и не могут свободно перемещаться по всему объему диэлектрика (рис. 2.24).

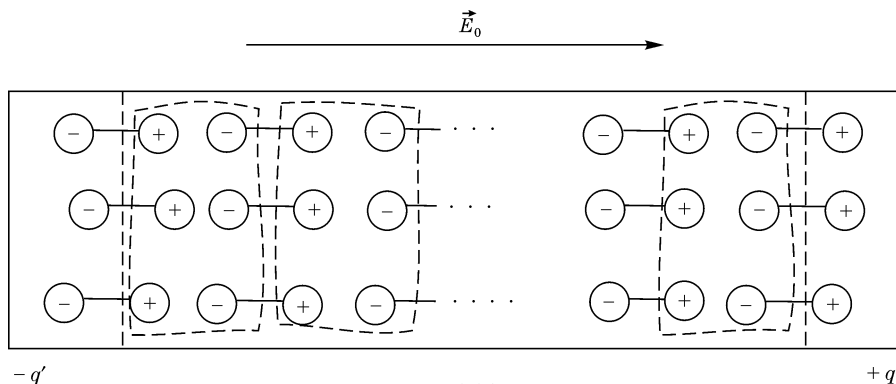


Рис. 2.24

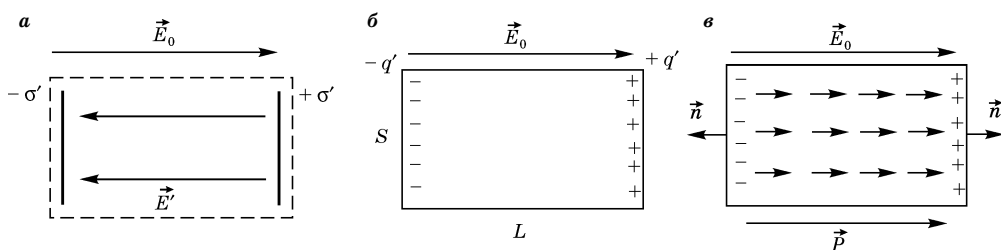


Рис. 2.25

На основе рис. 2.24 можно получить несколько упрощенных схем диэлектрика (см. рис. 2.25), что позволяет вывести ряд формул. Некоторые из них приведены ниже.

1. Электрическое поле  $\vec{E}'$  диэлектрика эквивалентно электрическому полю плоского конденсатора с поверхностной плотностью заряда его пластин, равной  $\sigma'$  (рис. 2.25а). Следовательно,

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (2.65)$$

2. Диэлектрик подобен большой полярной молекуле (рис. 2.25б). Поэтому поведение диэлектрика во внешнем электрическом поле подобно поведению диполя. Рассчитаем модуль вектора поляризации:

$$P = \frac{|\sum \vec{p}_i|}{V} = p_{\text{большой мол.}} = \frac{q' \cdot L}{SL} = \sigma', \quad P_n = \sigma', \quad (2.66)$$

где  $P_n$  — проекция вектора  $\vec{P}$  на направления нормали к поверхности диэлектрика (рис. 2.25в,  $P_n = P$  для правой грани).

3. Все индуцированные дипольные моменты молекул направлены вдоль линии  $\vec{E}_0$ , также направлен и вектор поляризации  $\vec{P}$  (рис. 2.25в). Учитывая выражения (2.65) и (2.66), можно иначе записать формулу (2.60):

$$P = \sigma', \quad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \quad \vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}_0, \quad \vec{E}' \uparrow \downarrow \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}'.$$

#### 2.12.5. ПОЛЯРНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В отсутствие электрического поля за счет теплового движения молекул их дипольные моменты  $\vec{p}$  разбросаны хаотично по все направлениям, следовательно, диэлектрик неполяризован и вектор поляризации  $\vec{P}$  равен нулю (рис. 2.26а).

Во внешнем электрическом поле его силы стремятся установить дипольные моменты молекул вдоль линий  $\vec{E}_0$ , чему препятствует тепловое движение молекул. За счет действия этих двух факторов наблюдается преимущественная ориентация дипольных моментов молекул вдоль поля (рис. 2.26б). Поэтому за счет поворота молекул диэлектрик поляризуется ( $\vec{P} \neq 0$ ), поля-

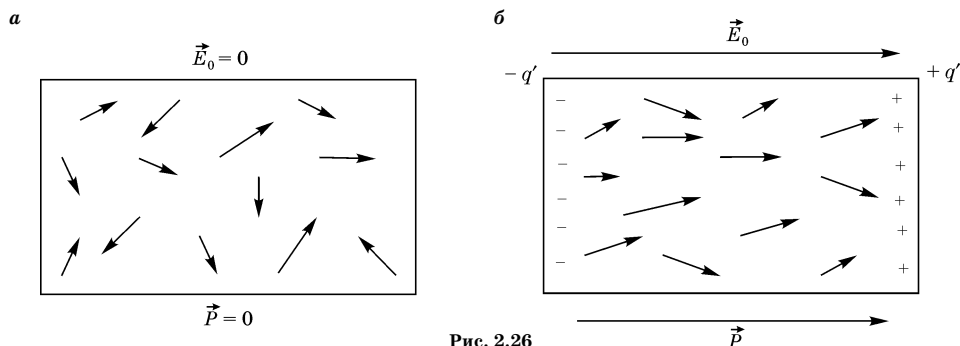


Рис. 2.26

ризация сопровождается появлением связанных зарядов  $q'$  на противоположных гранях диэлектрика. Все это свидетельствует о том, что поведение такого диэлектрика во внешнем электрическом поле подобно поведению диэлектрика из неполярных молекул, а следовательно, и поведению диполя.

### 2.12.6. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРОВ $\vec{D}$ И $\vec{P}$

Найдем поток вектора  $\vec{P}$  через замкнутую поверхность (она обозначена пунктирной линией на рис. 2.27). На основании выражения (2.65), получим

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = PS \cos 180^\circ = -PS = -\sigma' S = -q',$$

где учтено, что вектор  $\vec{P}$  существует внутри диэлектрика и поэтому интеграл берется по части поверхности  $S$ , расположенной внутри диэлектрика, на этой части поверхности угол между векторами  $\vec{P}$  и  $d\vec{S}$  равен  $180^\circ$ .

В формулу входит связанный заряд  $q'$ , попадающий внутрь замкнутой поверхности (рис. 2.27).

Можно показать, что полученный результат справедлив и в общем случае

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad \text{div} \vec{P} = \nabla \vec{P} = -\rho', \quad (2.67)$$

где приведена также и дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Согласно Прил. 1, из формулы (2.67) следует, что **источником вектора  $\vec{P}$  являются связанные заряды.**

Для вектора электрической индукции  $\vec{D}$  в соответствии с формулами (2.28), (2.62) и (2.67) запишем

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} + \oint_S \vec{P} d\vec{S} = (q_\Sigma + q') - q' = q_\Sigma, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= q_\Sigma, \quad \text{div} \vec{D} = \nabla \vec{D} = \rho_\Sigma. \end{aligned} \quad (2.68)$$

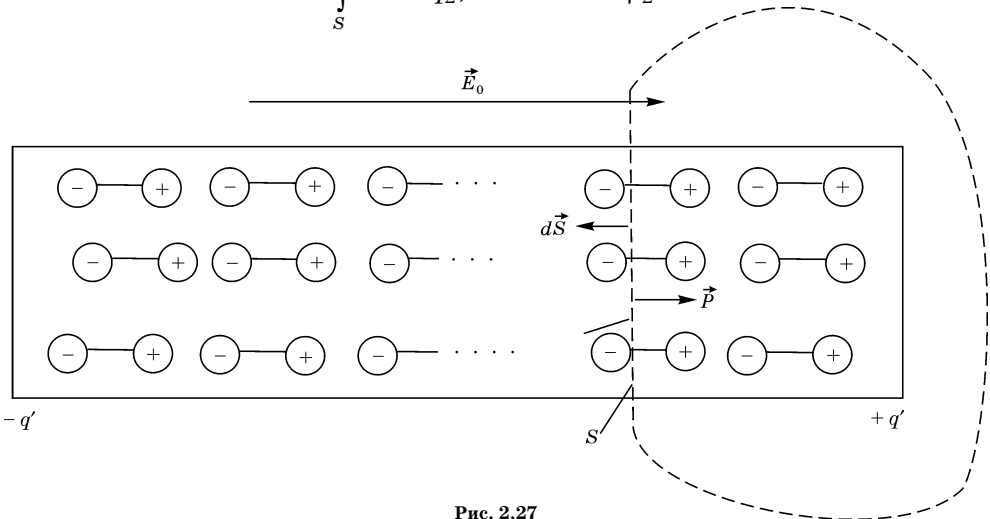


Рис. 2.27

Следовательно, **источником поля вектора  $\vec{D}$  являются свободные заряды.**

Определение вектора  $\vec{E}$  в присутствии диэлектрика по формулам (2.28) или (2.30) затруднено, так как в них входит связанный заряд  $q'$ , который сам зависит от вектора  $\vec{E}$ . Расчет электрического поля существенно упрощается, если ввести вектор  $\vec{P}$ , обусловленный распределением связанных зарядов  $q'$  (формула (2.66)), и вектор  $\vec{D}$ , связанный с распределением свободных зарядов  $q$  (формула (2.67)).

Тот факт, что источником поля вектора  $\vec{D}$  являются только свободные заряды, приводит к тому, что линии  $\vec{D}$  на границе диэлектрика, где появляются связанные заряды  $q'$ , не прерываются. Это удобно для графического изображения электрического поля в присутствии диэлектрика. На рис. 2.28 в качестве примера приведено графическое изображение с помощью линий  $\vec{E}$  и линий  $\vec{D}$  электрического поля плоского конденсатора, внутри которого находится прямоугольная пластина из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 2.28).

Выведем формулы, связывающие свободные заряды  $q$  и их поверхностную плотность  $\sigma = q/S$  на пластинах конденсатора со связанными зарядами  $q'$  и их поверхностной плотностью  $\sigma' = q'/S$  на диэлектрике. Для этого запишем для модуля напряженности  $\vec{E}$  электрического поля внутри пластины (рис. 2.28a) формулы в соответствии с выражениями (2.58), (2.59) и (2.64):

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon\varepsilon_0}; \quad E = E_0 - E' = \frac{|\sigma| - |\sigma'|}{\varepsilon_0},$$

$$|\sigma'| = |\sigma| \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right); \quad (2.69)$$

$$\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}. \quad (2.70)$$

В формуле (2.70) не выделены явно знаки зарядов  $q$  и  $q'$ , они могут быть как больше, так и меньше нуля, но если  $q > 0$ , то тогда  $q' < 0$ , и наоборот (это соответствует факту ослабления внешнего поля внутри диэлектрика).

Выражение (2.70) используется в разделе 2.7 для выяснения физического смысла теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$  электростатического поля: источ-

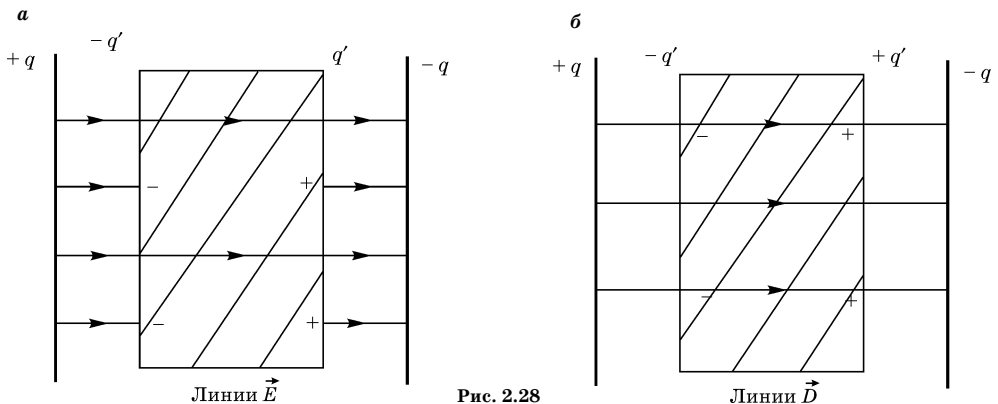


Рис. 2.28

ником вектора  $\vec{E}$  являются свободные и связанные заряды. Поэтому часть линий  $\vec{E}$  на границе диэлектрика прерывается и может изменять свое направление (см. далее).

Из двух векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , описывающих электростатическое поле, вектор  $\vec{E}$  является истинным вектором этого поля, так как источником  $\vec{E}$  являются все существующие в природе электрические заряды, а вектор  $\vec{D}$  — вспомогательный вектор, служащий для упрощения расчета электрического поля в присутствии диэлектрика.

### \*2.12.7. ПОВЕДЕНИЕ ЛИНИЙ ВЕКТОРОВ $\vec{E}$ И $\vec{D}$ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Источником линий  $\vec{D}$  являются только свободные заряды, и поэтому линии  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектриков, где находятся связанные заряды, не прерываются. Это означает, что нормальные, перпендикулярные к поверхности раздела составляющие вектора  $\vec{D}$  не прерываются (рис. 2.29а)

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (2.71)$$

что согласно формуле (2.63) дает:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (2.72)$$

т. е. составляющие вектора  $\vec{E}$  имеют разрыв (рис. 2.29б)

Чтобы выяснить поведение тангенциальных (параллельных поверхности раздела) составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , запишем циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по прямоугольному контуру  $\Gamma$  (рис. 2.29в) и учтем формулу (2.26)

$$\oint_r \vec{E} d\vec{l} = E_{1\tau} l_{12} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{l} - E_{2\tau} l_{34} + \int_4^1 \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Если взять предел, при котором стороны контура  $l_{23} = l_{41}$  стремятся к нулю, то получим

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad (2.73)$$

и соответственно:

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}. \quad (2.74)$$

Это означает, что тангенциальные составляющие вектора  $\vec{E}$  на границе раздела непрерывны, а для вектора  $\vec{D}$  имеют разрыв.

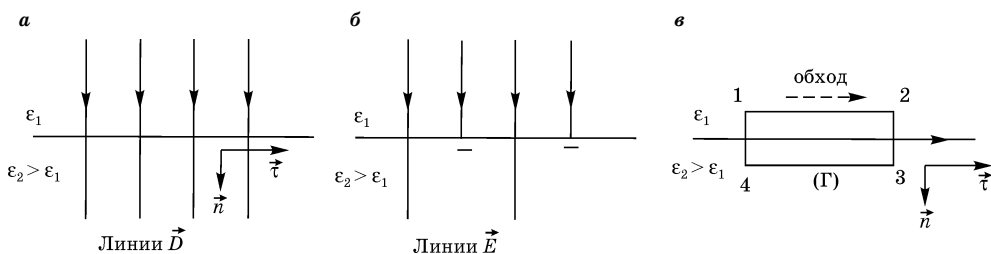


Рис. 2.29

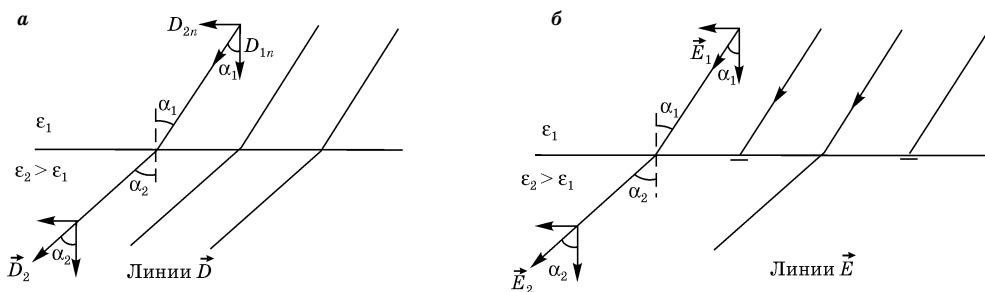


Рис. 2.30

Условия (2.71)–(2.74) позволяют выяснить поведение линий  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  при падении их под произвольным углом  $\alpha$  к поверхности раздела двух диэлектриков (рис. 2.30).

Углы падения  $\alpha_1$  и преломления  $\alpha_2$  для линий  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  можно определить из следующих уравнений:

$$\text{Линии } \vec{D}: \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad \text{Линии } \vec{E}: \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{D_{2n}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.75)$$

Видно, что при одинаковых углах падения  $\alpha_1$  угол преломления  $\alpha_2$  линий  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  будет одинаковым; для изображенного на рис. 2.29 случая  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  и поэтому  $\alpha_2 > \alpha_1$ .

### 2.12.8. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКИ. СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

Диэлектрики используются прежде всего как электроизоляционные материалы. Из-за наличия у некоторых из них необычных свойств возможны и другие разнообразные применения диэлектриков.

**Пьезоэлектрики.** В этих диэлектриках наблюдается пьезоэлектрический эффект, а именно: деформация диэлектрика сопровождается его поляризацией (рис. 2.31) и, наоборот, поляризация диэлектрика приводит к его деформации. Причем смена знака деформации (растяжение заменяется сжатием) приводит к смене знака поляризации (рис. 2.31, изменяется знак поверхностных зарядов  $q'$ ) и наоборот. Поляризация пьезоэлектриков объясняется поворотом молекулярных диполей при их деформации (рис. 2.31).

Нужно отличать пьезоэффект от явления электрострикции, которое наблюдается у всех диэлектриков и состоит в изменении размеров диэлектрика под действием внешнего электрического поля. Но в случае электрострикции смена направления внешнего электрического поля не приводит к смене знака его деформации.

К пьезоэлектрикам относят, например, такие диэлектрики, как кварц, сегнетовая соль, титанат бария и т. д., всего известно порядка 1500 пьезоэлектриков. Они нашли широкое применение в электроакустических приборах для преобразования механических (звуковых и ультразвуковых) колебаний в электрические и обратно, в датчиках давления и т. д.

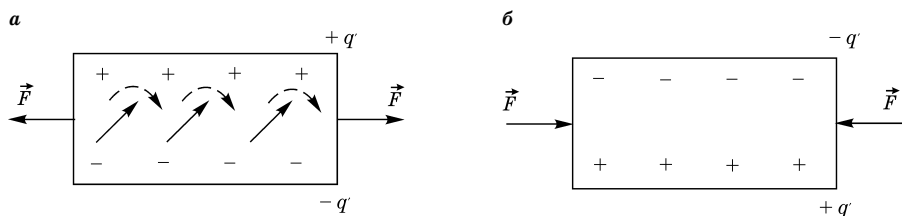
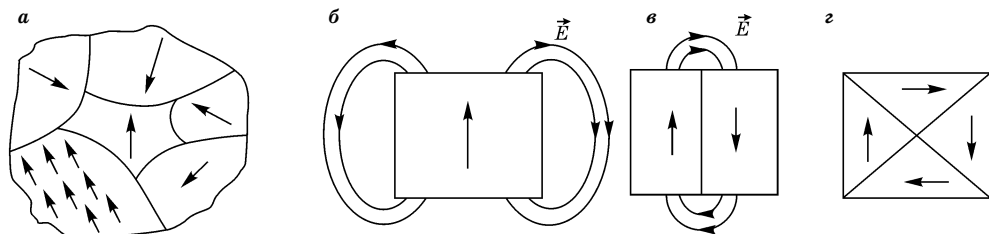


Рис. 2.31



$\vec{P}$  домена  $\neq 0$ ;  $\vec{P}$  сегнетоэл. = 0

Рис. 2.32

**Сегнетоэлектрики.** К ним относят пьезоэлектрики, обладающие самопроизвольной (спонтанной) поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля. Она может существенно изменяться под влиянием различных внешних факторов. Отметим ряд необычных свойств сегнетоэлектриков.

1. Относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  может достигать нескольких тысяч единиц, тогда как у обычных диэлектриков она составляет сотни единиц.

2. Между молекулами устанавливается взаимодействие, которое приводит к параллельной ориентации дипольных моментов молекул в макроскопических областях, называемых доменами. Направление дипольных моментов молекул в разных доменах разное, поэтому в отсутствие электрического поля вектор поляризации сегнетоэлектрика равен нулю (рис. 2.32а).

Размеры доменов устанавливаются вследствие двух факторов:

1) энергетически выгодно увеличивать число доменов, так как уменьшается энергия для поддержания электрического поля за пределами сегнетоэлектрика (рис. 2.32б–г);

2) энергетически выгодно уменьшать число доменов, так как уменьшается длина границ между доменами, на которых накапливается энергия электрического поля из-за резкого изменения направления дипольных моментов молекул соседних доменов.

3. Зависимость вектора поляризации  $\vec{P}$  от модуля напряженности  $\vec{E}$  электрического поля является нелинейной, и в сравнительно слабых полях достигается насыщение. Это связано с тем, что вдоль поля устанавливаются сразу же все молекулы отдельных доменов.

Поляризация сегнетоэлектрика сопровождается сначала увеличением объемов доменов с выгодной ориентацией дипольных моментов молекул относительно электрического поля (для них угол между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  наименьший, рис. 2.33 участок 0–1).

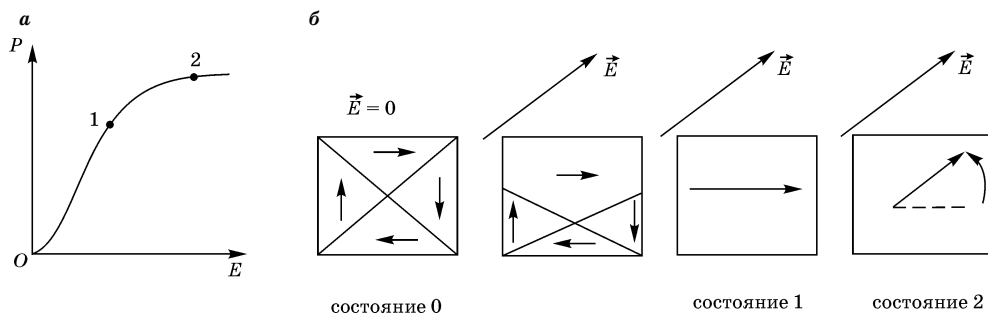


Рис. 2.33

В итоге образец становится однодоменным (состояние 1). Затем происходит поворот вектора  $\vec{P}$ , и он устанавливается вдоль вектора  $\vec{E}$  электрического поля (процесс вращения), образец становится поляризованным до насыщения.

4. Для сегнетоэлектриков характерен **гистерезис** — явление неоднозначной зависимости вектора поляризации  $\vec{P}$  от электрического поля  $\vec{E}$ .

Если после достижения состояния насыщения уменьшать модуль вектора  $\vec{E}$ , то изменение модуля вектора  $\vec{P}$  будет отставать от изменения модуля  $\vec{E}$  (рис. 2.34). При  $E = 0$  сегнетоэлектрик остается поляризованным, значение  $P_0$  называется **остаточной поляризованностью**. Для того чтобы убрать остаточную поляризацию, необходимо приложить внешнее поле противоположного направления.

Значение  $E_C$ , при котором поляризация сегнетоэлектрика исчезает, называют **коэрцитивной силой**.

Если внешнее поле противоположного направления продолжать увеличивать, то через некоторое время наступает насыщение (кривая 2). При циклическом изменении внешнего поля получается замкнутая линия, называемая **петлей гистерезиса**.

5. Для сегнетоэлектрика существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и превращается в обычный диэлектрик, она называется температурой Кюри  $T_C$ . Для сегнетовой соли, которая дала название этой группе диэлектриков, существует две температуры Кюри  $T_{C1} = -15^\circ\text{C}$  и  $T_{C2} = 22,5^\circ\text{C}$ , выше и ниже этих температур она превращается в обычный диэлектрик.

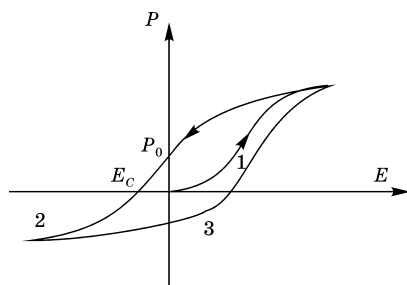


Рис. 2.34

Высокие значения относительной диэлектрической проницаемости позволяют использовать сегнетоэлектрики в качестве материалов для конденсаторов высокой удельной емкости. Нелинейная зависимость модуля вектора поляризации  $\vec{P}$  от напряженности  $\vec{E}$  внешнего поля находит применение при изготовлении нелинейных конденсаторов — варикондах, которые используются в системах автоматического контроля и управления.



## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

**Постоянный ток.** Следующий этап в развитии электростатики связан с открытием в конце XVIII века Л. Гальвани электрического тока (1786) и созданием А. Вольта первого источника постоянного электрического тока (вольтов столб) в 1799 г., с помощью которого стало возможным создавать электрический ток в течение длительного промежутка времени. Это позволило изучить электрическую дугу (В. В. Петров, 1802), впервые провести электролиз (Г. Деви, 1802), определить количественную зависимость силы электрического тока от напряжения (закон Ома, 1826), установить зависимость количества теплоты, выделяемого при протекании тока по проводнику от силы тока (закон Джоуля–Ленца: Джоуль установил этот закон (1841), а Х. Ленц (1842) проверил экспериментальным путем). Полученные закономерности позволили сформулировать правила Кирхгофа (1847), которые широко используются для расчета разветвленных цепей постоянного и квазистационарного токов. В 1898–1904 гг. разработана классическая теория электронного газа в металлах (теория Друде–Лоренца).

### 3.1. СИЛА ТОКА, ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Под **электрическим током** понимают упорядоченное движение заряженных частиц, причем за направление тока принимают направление движения положительных зарядов.

Электрический ток существует при наличии свободных зарядов и электрического поля. Такие условия можно создать в вакууме и в различных средах, таких как твердые тела (металлы, полупроводники), жидкости (жидкие металлы, электролиты) и в газах. Обычно рассматривают протекание тока в металлических проводниках, где свободными носителями заряда являются электроны.

Протекание тока по проводнику характеризует сила тока  $I$ , определяемая по формуле

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.1)$$

где  $dq$  — заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ .

Сила тока является алгебраической величиной, она может быть как больше, так и меньше нуля. Это, например, проявляется при расчетах сложных электрических цепей, где трудно указать правильное направление тока в каждой части цепи (см. далее раздел 3.4).

Для постоянного тока величина  $I$  остается одинаковой и по модулю, и по направлению, что позволяет в формуле (3.1) выбирать конечные значения заряда и времени:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (3.2)$$

Распределение тока по сечению проводника характеризует **вектор плотности тока**  $\vec{j}$ , направление которого в каждой точке проводника совпадает с направлением тока, т. е. с направлением скорости  $\vec{V}$  упорядоченных положительных зарядов ( $\vec{j} \uparrow \vec{V}$ ). Модуль вектора  $\vec{j}$  равен

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (3.3)$$

где  $dI$  — сила тока, протекающего в данной точке внутри проводника через элементарную площадку  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно к направлению тока (рис. 3.1а).

Введение вектора плотности тока  $\vec{j}$  позволяет найти силу тока, протекающего через любую поверхность  $S$ :

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j dS \cos \alpha. \quad (3.4)$$

В этой формуле угол  $\alpha$  — это угол между вектором  $\vec{j}$  и вектором нормали  $\vec{n}$  к элементарной площадке площадью  $dS = dS_{\perp} \cos \alpha$  (рис. 3.1а).

Представляет интерес выразить вектор плотности тока  $\vec{j}$  через характеристики, описывающие движение свободных зарядов в проводнике. В качестве примера рассмотрим электрический ток в металле, где валентные электроны образуют газ свободных частиц, заполняющих кристаллическую решетку положительно заряженных ионов.

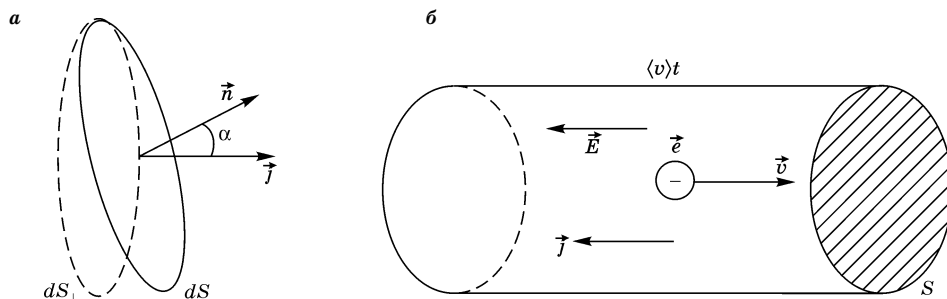


Рис. 3.1

При отсутствии электрического поля электроны участвуют в тепловом движении со средней арифметической скоростью  $\langle \vec{u} \rangle$ , составляющей при комнатной температуре величину порядка 100 км/с:

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{эл}}} \approx 1 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Из-за хаотичности теплового движения электронов электрического тока не возникает ( $\vec{j} = 0$ ), так как через поперечное сечение проводника в обе стороны проходит одинаковое число электронов и поэтому суммарный перенос заряда равен нулю.

При включении электрического поля у электронов появляется добавочная скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  — скорость направленного движения под действием сил электрического поля; она по модулю примерно равна 1 мм/с, что существенно меньше модуля скорости  $\langle \vec{u} \rangle$ . Но именно скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  обеспечивает наличие тока в проводнике. Образно говоря, при включении электрического тока в металле появляется электрический ветер, смещающий все хаотически движущиеся электроны в одном направлении.

Через поперечное сечение проводника площадью  $S$  за время  $t$  пройдут все электроны, находящиеся в цилиндре высотой  $(\langle v \rangle t)$  (рис. 3.1б). Если ввести такую характеристику металла, как концентрацию свободных электронов  $n$ , то тогда можно получить:

$$j = \frac{|I|}{S} = \frac{|q|}{St} = \frac{|q_0| N}{St} = \frac{|q_0| n S \langle v \rangle t}{St} = |q_0| n \langle v \rangle, \quad (3.5)$$

$$\vec{j} = q_0 n \langle \vec{v} \rangle,$$

где  $q_0$  — это заряд электрона или, в общем случае, свободной заряженной частицы, участвующей в создании электрического тока;  $\langle \vec{v} \rangle$  — средняя скорость направленного движения заряженной частицы.

Формула (3.5) справедлива для любых модельных теорий описания электрического тока (классической или квантовой теории электронного газа), так как была получена из общих представлений о движении заряда в проводниках.

Приведем оценку модуля средней скорости направленного движения свободных электронов в металле  $\langle \vec{v} \rangle$ . Учитывая числовые значения концентрации свободных электронов в металле  $n \sim 10^{29} \text{ м}^{-3}$  и предельно допустимую плотность тока в медном проводнике  $j_{\text{пред}} \sim 10^7 \text{ А/м}^2$ , из формулы (3.5) получим

$$\langle v \rangle = \frac{j}{|q_0| n} \sim \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

### 3.2.

## ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА

**Однородным участком электрической цепи** называют участок, на котором направленное движение зарядов происходит под действием только кулоновских сил. Для него Г. Ом в 1826 году экспериментально установил следующий закон: *сила тока  $I$ , текущего по однородному участку цепи, прямо*

пропорциональна напряжению  $U$ , приложенному к нему, и обратно пропорциональна сопротивлению  $R$  этого участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.6)$$

Отметим, что для однородного участка цепи напряжение  $U$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между начальной и конечной точками участка (см. далее раздел 3.3).

На основе формулы (3.6) вводится понятие **сопротивления однородного участка цепи  $R$** , которое характеризует свойство проводника препятствовать протеканию по нему электрического тока:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.7)$$

Это сопротивление не зависит ни от  $U$ , ни от  $I$  и связано с геометрическими размерами проводника, его материалом и температурой.

**Вольт-амперной характеристикой (ВАХ)** однородного участка цепи называют график зависимости силы тока  $I$  от приложенного к нему напряжения (рис. 3.2а); он представляет собой прямую линию, угол наклона которой определяет электрическое сопротивление участка  $R = \operatorname{ctg} \beta$  (рис. 3.2а).

На практике обычно используют проводники цилиндрического вида длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ . Это позволяет ввести новую характеристику — **удельное сопротивление проводника  $\rho$** :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad \rho = \frac{RS}{l}, \quad (3.8)$$

которое зависит только от его материала и температуры. Численно оно равно сопротивлению  $R$  проводника при  $l = 1$  м и  $S = 1$  м<sup>2</sup>.

Для чистых металлических проводников при комнатной температуре удельное сопротивление практически линейно возрастает с повышением температуры, а именно

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.9)$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление проводника при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $t$  — температура проводника,  $^\circ\text{C}$ .

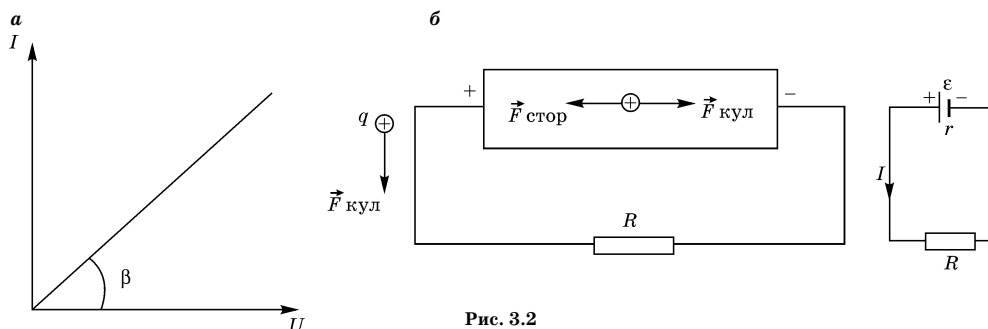


Рис. 3.2

Входящий в формулу параметр  $\alpha$  называют **температурным коэффициентом сопротивления (ТКС)**, он численно равен отношению изменению удельного сопротивления проводника  $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$  при повышении температуры проводника на  $1^\circ\text{C}$ :

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 t}. \quad (3.10)$$

Зависимость сопротивления  $R$  металлического проводника также соответствует формуле (3.9), так как размеры проводника ( $l$ ,  $S$ ) обычно изменяются с температурой значительно слабее, чем удельное сопротивление:

$$R = R_0(1 + \alpha t). \quad (3.11)$$

Для чистых металлов ТКС является положительной величиной, примерно равной  $1/273 \text{ K}^{-1}$ . При низких температурах, когда колебания положительных ионов кристаллической решетки не оказывают существенного влияния на движение свободных электронов, удельное сопротивление  $\rho$  не изменяется с температурой, оставаясь постоянной величиной (рис. 3.3, кривая 1).

Для многих металлов при определенной температуре  $T_c$  (ее называют температурой перехода в сверхпроводящее состояние,  $T_c \leq 20 \text{ K}$ ) сопротивление металла  $R$  обращается в ноль ( $R = 0$ ), металл при  $T < T_c$  будет находиться в сверхпроводящем состоянии (рис. 3.3, кривая 2).

Для использования в практических целях необычных свойств сверхпроводящего состояния необходимо создавать материалы с высокими значениями температуры  $T_c$ . В 1968 году для металлооксидных соединений были получены  $T_c = (70 - 120) \text{ K}$ , так была открыта высокотемпературная сверхпроводимость.

Отметим, что ТКС может и уменьшаться с повышением температуры, что, например, наблюдается для растворов электролитов и для полупроводников и связано с увеличением в них концентрации свободных носителей заряда при повышении температуры.

Выведем формулу для расчета количества теплоты  $Q$ , выделяемого в проводнике при протекании по нему электрического тока. Если в магнитном поле проводника с током отсутствует перемещение других тел (заряженных частиц других проводников с током) и не изменяется химический состав проводника (нет электролиза), то тогда работа сил электрического поля по перемещению заряда в проводнике целиком расходуется на выделение теплоты. В этом случае количество теплоты  $dQ$ , выделяемое за малый промежуток времени  $dt$ , можно рассчитать так:

$$dQ = dA = dqU = IUdt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt. \quad (3.12)$$

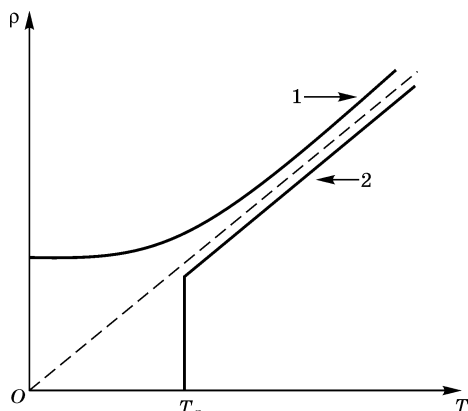


Рис. 3.3

Для конечного промежутка времени в случае переменного тока получим

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I^2 R dt, \quad (3.13 \text{ а})$$

а для постоянного тока ( $I = \text{const}$ )

$$Q = I^2 R t. \quad (3.13 \text{ б})$$

Формула (3.13) получила название **закона Джоуля–Ленца**. Он формулируется следующим образом: *количество теплоты, выделяемое в проводнике при протекании по нему электрического тока, равно произведению квадрата силы тока на сопротивление проводника и на время протекания по нему тока.*

### 3.3. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ИСТОЧНИКА ТОКА. НАПРЯЖЕНИЕ. ВЕКТОР НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ СТОРОННИХ СИЛ. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ

Возьмем замкнутую электрическую цепь, содержащую источник тока, и рассмотрим, как протекает по ней постоянный ток, то есть как происходит движение положительного заряда ( $+q$ ) по этой цепи (рис. 3.2б).

Во внешней части цепи сопротивлением  $R$  под действием кулоновских сил заряд ( $+q$ ) перемещается от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом («заряд скатывается с потенциальной горки»). Для дальнейшего движения заряда (внутренняя часть цепи, источник тока) необходимо переместить заряд к точкам с большим потенциалом («поднять заряд на потенциальную горку»). Кулоновские силы только соединяют разноименные заряды, поэтому в источнике тока на заряды, кроме них, должны действовать так же и **сторонние силы**, совершающие работу по разделению разноименных зарядов и переводящие заряд ( $+q$ ) от отрицательного полюса источника тока к его положительному полюсу. Таким образом, завершается полный цикл движения заряда по замкнутой цепи, в ней за счет работы сторонних сил наблюдается постоянное движение заряда, протекает постоянный ток.

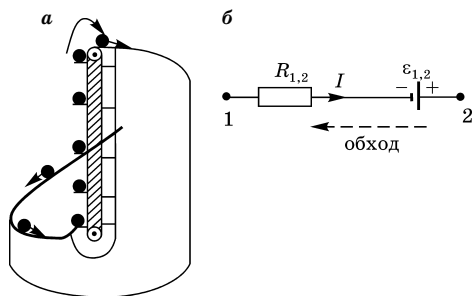


Рис. 3.4

Наглядно перемещение заряда по полной цепи демонстрирует механическая модель (рис. 3.4а): под действием силы тяжести (аналог кулоновской силы) шарик (положительный заряд) скатывается по цилиндрической поверхности (внешняя часть цепи). Для его дальнейшего движения необходима сторонняя сила (это может быть сила упругости сжатой пружины, механический подъемник

и т. д.), которая поднимает шарик на первоначальную высоту по вертикали (внутренняя часть цепи, источник тока), совершая при этом работу, направленную против силы тяжести.

Источник тока можно охарактеризовать сопротивлением  $r$  (сопротивление внутренней части цепи) и **электродвижущей силой (ЭДС)**  $\varepsilon$  — она определяет работу сторонних сил по перемещению точечного положительного заряда в один кулон от отрицательного полюса к его положительному полюсу:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q_+}. \quad (3.14)$$

Изображение источника тока на схемах приведено на рис. 3.2б.

Природа сторонних сил может быть любой, от них требуется лишь способность разделять разноименные заряды. Это могут быть силы трения, силы химических реакций, протекающих в гальванических элементах, силы магнитного поля, силы вихревого электрического поля и т. д.

Нужно отметить, что выделение в электрической цепи отдельного участка, на котором действуют сторонние силы, не всегда возможно. Сторонние силы могут действовать на всех участках цепи. Например, ЭДС индукции возникает во всех точках проводящего контура, находящегося в переменном во времени магнитном поле.

Участок цепи, где одновременно действуют и сторонние, и кулоновские силы, называют **неоднородным участком цепи** (рис. 3.4б). Работу кулоновских сил по перемещению электрического заряда на этом участке характеризует разность потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а сторонних сил — действующая на этом участке цепи **ЭДС**  $\varepsilon_{1,2}$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{кул}1,2}}{q}, \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{A_{\text{стор}1,2}}{q}. \quad (3.15)$$

Для неоднородного участка цепи вводится новая величина, называемая **напряжением**  $U_{1,2}$ , она характеризует общую работу сторонних и кулоновских сил на неоднородном участке цепи:

$$U_{1,2} = \frac{A_{\text{кул}1,2} + A_{\text{стор}}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}. \quad (3.16)$$

На однородном участке цепи ( $\varepsilon_{1,2} = 0$ ) напряжение равно разности потенциалов:  $U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Для описания силового действия на помещенные в поле сторонних сил заряды (по аналогии с электростатическим полем) вводят его силовую характеристику — **напряженность поля сторонних сил**  $\vec{E}_{\text{ст}}$ :

$$\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}}, \quad \vec{E}_{\text{ст}} = \frac{\vec{F}_{\text{ст}}}{q}. \quad (3.17)$$

Тогда формулы (3.15) и (3.16) можно переписать следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{кул}1,2}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_k d\vec{l}, \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{A_{\text{ст}1,2}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l}, \quad (3.18)$$

$$U_{1,2} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) d\vec{l}. \quad (3.19)$$

Для ЭДС  $\varepsilon$ , действующей в замкнутой цепи (начальная точка 1 и конечная точка 2 совпадают), из выражения (3.18) получим

$$\varepsilon = \oint_r \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}, \quad (3.20)$$

то есть ЭДС  $\varepsilon$  равна циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}_{\text{ст}}$  сторонних сил по произвольному замкнутому контуру. Это свидетельствует о том, что поле сторонних сил, в отличие от электростатического поля, не является потенциальным.

Покажем, что и для неоднородного участка цепи также выполняется закон Ома. Для этого используем закон сохранения энергии, а именно количество теплоты  $dQ_{1,2}$ , выделяемое на неоднородном участке цепи за малый промежуток времени  $dt$ , равно суммарной работе сторонних и кулоновских сил по перемещению зарядов по этому участку цепи:

$$\begin{aligned} dQ_{1,2} &= dA_{\text{кул } 1,2} + dA_{\text{ст } 1,2} \Rightarrow I^2 R_{1,2} dt = \\ &= dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq\varepsilon_{1,2} = dqU_{1,2} = IU_{1,2} dt \Rightarrow U_{1,2} = IR_{1,2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Формула (3.21) представляет собой закон Ома для неоднородного участка цепи. Учитывая, что  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$ ,  $I$  являются алгебраическими величинами и могут быть как больше, так и меньше нуля, запишем закон Ома (3.21) в следующем виде:

$$\pm IR_{1,2} = (\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}) \pm \varepsilon_{1,2}, \quad (3.22)$$

где  $\varphi_{\text{нач}}$  и  $\varphi_{\text{кон}}$  — потенциалы начальной и конечной точек участка цепи.

Выбор знаков в формуле (3.22) обсуждается далее. Для участка цепи, изображенного на рис. 3.4б, формула (3.22) примет вид

$$-IR_{1,2} = (\varphi_2 - \varphi_1) - \varepsilon_{1,2},$$

где начальной точкой участка считается точка, с которой начинается обход участка цепи.

### 3.4. ПРАВИЛА КИРХГОФА

Эти правила, сформулированные Кирхгофом в 1847 году, используются для расчета разветвленных цепей постоянного и квазистационарного тока — цепей, содержащих несколько замкнутых контуров. Если записать закон Ома (3.22) для замкнутой цепи (для нее начальная и конечная точки совпадают, т. е.  $\varphi_{\text{нач}} = \varphi_{\text{кон}}$ ), то из него следует **второе правило Кирхгофа**:

$$\pm \sum_{i=1}^N I_i R_i = \pm \sum_{l=1}^N \varepsilon_l. \quad (3.23)$$

Согласно ему *алгебраическая сумма падений напряжения на разных участках замкнутой цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих*



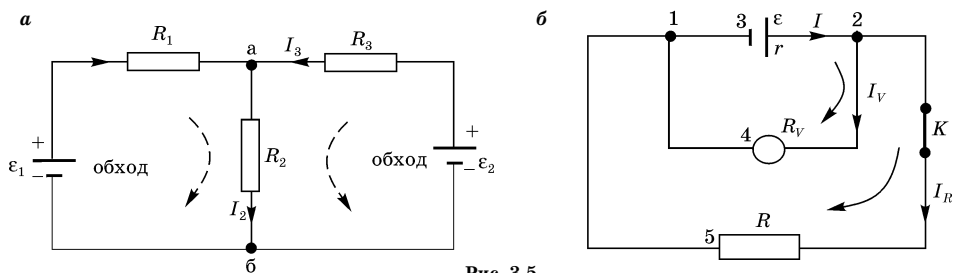


Рис. 3.5

в этой цепи. Число независимых уравнений (ни одно из них не является следствием других), которые можно записать по второму правилу, равно числу замкнутых контуров (цепей), которые нельзя получить наложением одного на другой. Так, для схемы, приведенной на рис. 3.5а, число независимых уравнений равно двум, один из трех контуров получается наложением двух других.

Рассмотрим выбор знаков в формуле (3.23). Для этого сначала произвольно указывают направление токов на разных участках разветвленной цепи и указывают направление обхода замкнутых контуров (цепей). При совпадении направления тока с направлением обхода контура для силы тока выбирают «+», в противном случае — «-». Если в направлении обхода контура ЭДС  $\varepsilon$  источника тока повышает свой потенциал (происходит переход от отрицательного полюса источника к его положительному полюсу), то выбирается «+», в противном случае — «-».

Для приведенной на рис. 3.5а схемы по второму правилу Кирхгофа можно записать два уравнения

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 \end{cases}.$$

Для формулировки **первого правила Кирхгофа** введем понятие узла электрической цепи — это точка цепи, в которой сходятся три или более проводников. Тогда из закона сохранения электрического заряда (он не может накапливаться в какой-либо точке цепи) следует

$$\sum I_i = 0, \quad (3.24)$$

согласно которому **алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю**.

Принято брать силу тока  $I$  со знаком «+», если ток входит в узел, и со знаком «-», если ток выходит из узла. Число независимых уравнений, которые можно записать по этому правилу, равно числу узлов разветвленной цепи минус один. Так, для цепи, приведенной на рис. 3.5а, можно записать только одно уравнение, например, для узла б

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Система уравнений (3.23) и (3.24) позволяет провести расчет электрических цепей при различных исходных данных. В случае разветвленной цепи,

содержащей большое число контуров, для решения системы уравнений необходимо использовать известный в алгебре метод определителей.

В качестве примера рассмотрим, что измеряет вольтметр, подключенный к электрической цепи, содержащей источник тока с ЭДС  $\varepsilon$  и сопротивлением  $r$ , сопротивление  $R$  внешней части цепи и ключ  $K$  (см. рис. 3.5б).

Сопротивление вольтметра  $R_V$  должно быть больше сопротивлений, включенных в электрическую цепь ( $R_V \gg R, r$ ), поэтому подключение вольтметра не оказывает существенного влияния на протекание тока в различных частях цепи.

Пусть ключ  $K$  замкнут (рис. 3.5б). Составим уравнения закона Ома для участков цепи 1–3–2, 2–4–1 и 2–5–1 (обход участка начинается с первой точки). Используя формулу (3.19) и правило выбора знаков, получим:

$$1-3-2: Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon; \quad (3.25 \text{ а})$$

$$2-4-1: U_V = I_V R_V = (\varphi_1 - \varphi_2); \quad (3.25 \text{ б})$$

$$2-5-1: U_R = I_R R = (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.25 \text{ в})$$

Из уравнения (3.25 б) следует, что вольтметр измеряет разность потенциалов на участке цепи 1–2 (1–3–2, 2–4–1, 2–5–1), к которому он подсоединен, а не напряжение на этом участке.

Уравнения (3.25 а) и (3.25 б) дают следующие равенства:

$$U_V = U_R = \varepsilon - Ir = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.26)$$

то есть напряжение, измеряемое вольтметром, равно напряжению на участках цепи 1–3–2 и 2–5–1, так как они подключены параллельно друг другу и в свою очередь равны разности потенциалов на этих участках.

В соответствии с правилами Кирхгофа можно записать два независимых уравнения для двух контуров 1–3–2–4–1 и 1–3–2–5–1 и одно уравнение для узла 2:

$$1-3-2-4-1: Ir + I_V R_V = \varepsilon; \quad (3.27 \text{ а})$$

$$1-3-2-5-1: Ir + I_R R = \varepsilon; \quad (3.27 \text{ б})$$

$$\text{узел 2: } I - I_V - I_R = 0. \quad (3.27 \text{ в})$$

Решение уравнений (3.27) приводит к формулам для сил токов:

$$I_V = \frac{\varepsilon}{R_V \left(1 + \frac{r}{R}\right) + r}, \quad I_R = I_V \frac{R_V}{R}, \quad I = I_V \left(1 + \frac{R_V}{R}\right),$$

$$I_V \approx 0, \quad I = I_R = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

они справедливы для электрической цепи в отсутствие вольтметра.

В случае разомкнутого ключа  $K$  система уравнений (3.27) примет вид:

$$I = I_V, \quad I_V (r + R_V) = \varepsilon,$$

откуда следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_V = I_V R_V = \frac{\varepsilon}{R_V + r} R_V \approx \frac{\varepsilon}{R_V} R_V = \varepsilon,$$

то есть при разомкнутой цепи вольтметр измеряет ЭДС источника тока, равную разности потенциалов на зажимах (клеммах) источника.

Если отключить вольтметр, то из формулы (3.25 а) следует точное равенство:  $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$ .

### 3.5. ЗАКОН ОМА И ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пусть внутри проводника электрическое поле является неоднородным и его удельное сопротивление  $\rho$  зависит от выбранной внутри него точки. В этом случае необходимо использовать дифференциальную форму законов Ома и Джоуля–Ленца, справедливую для малой окрестности точки внутри проводника.

Проведем вывод этих формул. Рассмотрим однородный изотропный проводник длиной  $l$  и с постоянным поперечным сечением площадью  $S$ . Создадим в проводнике однородное электрическое поле  $\vec{E} = \text{const}$ . Такие упрощения не скажутся на общности полученных формул.

Из формул законов Ома (3.6) и Джоуля–Ленца (3.13) получим:

$$I = \frac{U}{R}, \quad I = jS, \quad U = El, \quad R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow jS = \frac{El}{\left(\frac{\rho l}{S}\right)} \Rightarrow j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E;$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.28)$$

Введем удельную тепловую мощность  $w$ :

$$w = \frac{dQ}{dV dt}, \quad (3.29)$$

она определяет количество теплоты  $dQ$ , выделяемое в элементарном (бесконечно малом) объеме  $dV$ , расположенном вблизи точки, взятой внутри проводника, за малое время  $dt$ .

Для рассматриваемого здесь вывода вместо элементарных значений  $dQ$ ,  $dV$ ,  $dt$  можно подставить их конечные значения  $Q$ ,  $V$ ,  $t$ , что дает

$$w = \frac{Q}{Vt} = \frac{I^2 Rt}{Vt} = \frac{(jS)^2 \rho l t}{S l t S} = j^2 \rho = (\sigma E)^2 \rho = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E},$$

$$w = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E}. \quad (3.30)$$

Формулы (3.28) и (3.30) представляют собой дифференциальную форму законов Ома и Джоуля–Ленца. Введенная в них величина  $\sigma$  называется **удельной проводимостью**, она связана с удельным сопротивлением с соотношением

$$\sigma = 1/\rho. \quad (3.31)$$

В случае неоднородного участка цепи, когда в проводнике одновременно действуют и сторонние, и кулоновские силы, формулы (3.28) и (3.30) примут вид:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}), \quad (3.32)$$

$$w = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (3.33)$$

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

## 4.1.

### МАГНИТОСТАТИКА

**Магнитостатика** — раздел электродинамики, в котором изучается магнитное поле постоянного тока. В 1600 г. У. Гильберт впервые разграничил электрические и магнитные явления. Он открыл существование магнитных полюсов и неотделимость их друг от друга. В 1820 г. Эрстед обнаружил действие электрического тока на магнитную стрелку — явление, которое свидетельствует о связи между электрическими и магнитными явлениями. В 1820 г. А. М. Ампер установил закон взаимодействия электрических токов (закон Ампера). Также Ампер показал, что свойства постоянных магнитов могут быть объяснены, если предположить, что в молекулах намагниченных тел циркулируют постоянные электрические токи (молекулярные токи). Согласно Амперу, все магнитные явления сводятся к взаимодействию токов, магнитных же зарядов в природе не существует.

В основе магнитостатики лежат два опытных закона — закон Ампера и закон Био–Савара–Лапласа (БСЛ).

В работах Ампера был экспериментально установлен закон, позволяющий оценить силу взаимодействия двух токов, текущих в малых отрезках проводников. После введения понятия магнитного поля, посредством которого происходит передача взаимодействия токов, законом Ампера стали называть формулу, определяющую силу, с которой магнитное поле действует на элементарный (малых размеров) проводник с током.

В работах Ж. Б. Био и Ф. Савара (1820) был установлен закон, определяющий силовую характеристику магнитного поля (вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ ), создаваемого электрическим током. В общем виде этот закон был сформулирован П.-С. Лапласом и получил название — закон Био–Савара–Лапласа.

Отметим, что термин «магнитное поле» был введен Эрстедом (1820) в связи с тем, что возбуждаемое электрическим током поле оказывало ориентирующее действие на магнитную стрелку.

С современной точки зрения можно предложить другой способ введения магнитного поля, в котором опытные законы выводятся из закона Кулона и специальной теории относительности. Такой подход будет рассмотрен далее.

#### 4.1.1. МАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. СИЛЫ МАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ В ВАКУУМЕ

Известно, что два параллельных прямолинейных проводника, по которым текут токи одного направления, притягиваются друг к другу. Это добавочное взаимодействие, обусловленное движением зарядов (электрический ток — направленное движение зарядов), назвали **магнитным**. Оно не объясняется в рамках классической механики, так как при постоянной скорости движения зарядов ускорение отсутствует и согласно II закону Ньютона ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) добавочное взаимодействие не возникает.

Магнитное взаимодействие объясняется в специальной теории относительности. Рассмотрим неподвижную систему отсчета  $K$  и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью  $\vec{v}$  вдоль совпадающих осей  $Ox$  и  $Ox'$  систему отсчета  $K'$ . Пусть в системе  $K'$  вдоль оси  $Oz'$  располагаются неподвижные положительные точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  на расстоянии  $r'$  друг от друга (рис. 4.1). Силы их взаимодействия описываются законом Кулона:

$$\vec{F}'_1 = \frac{q'_1 q'_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{r}'; \quad F'_1 = F'_2 = \frac{|q'_1| |q'_2|}{4\pi\epsilon_0 r'^2}. \quad (4.1)$$

Учитывая инвариантность электрического заряда частицы относительно преобразований Лоренца, можно показать, что сила взаимодействия зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в системе отсчета, относительно которой они движутся параллельно друг другу с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , определяется следующей формулой:

$$F_1 = F'_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.2)$$

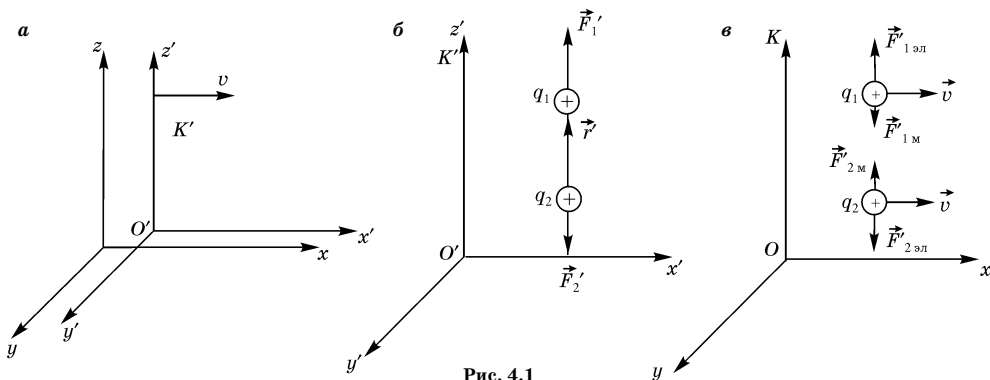


Рис. 4.1

Умножая числитель и знаменатель формулы (4.2) на  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  и учитывая, что скорость направленного движения зарядов в проводнике  $v \ll c$ , можно записать

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\text{эл}} + \vec{F}_{1\text{м}}, \quad \vec{F}_{1\text{эл}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad \vec{F}_{1\text{м}} = \frac{q_1 q_2 (-\vec{r} v^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}. \quad (4.3)$$

$\vec{F}_{1\text{эл}}$  — это сила электрического взаимодействия зарядов, определяемая законом Кулона, а  $\vec{F}_{1\text{м}}$  — сила магнитного взаимодействия зарядов. Она существенно зависит от скорости движения зарядов, обращаясь в ноль при  $v = 0$ , и в данном случае  $\vec{F}_{1\text{м}}$  направлена противоположно  $\vec{F}_{1\text{эл}}$  и значительно меньше ее по модулю ( $v^2/c^2 \ll 1$ ).

Запишем общую формулу для силы магнитного взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ :

$$\vec{F}_{\text{м}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[q_1 \vec{v}_1 x [q_2 \vec{v}_2 x \vec{r}]]}{r^3}, \quad (4.4)$$

где введена магнитная постоянная

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Двойное векторное произведение в выражении (4.4) раскрывается по известной формуле

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b}). \quad (4.5)$$

Нетрудно проверить, что для частного случая движения зарядов ( $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ ) из выражения (4.4) следует формула (4.3).

#### 4.1.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА. СИЛА ЛОРЕНЦА

В соответствии с идеей близкодействия магнитное взаимодействие между зарядами осуществляется посредством магнитного поля. Так, например, можно считать, что заряд  $q_1$  взаимодействует в месте своего расположения с магнитным полем, создаваемым зарядом  $q_2$ . Это приводит к следующей форме записи выражения (4.4):

$$\vec{F}_{\text{м}} = \left[ q_1 \vec{v}_1 x \left\{ \frac{\mu_0 [q_2 \vec{v}_2 x \vec{r}]}{4\pi r^3} \right\} \right] = [q_1 \vec{v}_1 x \vec{B}_{32}], \quad (4.6)$$

где введена силовая характеристика магнитного поля заряда  $q_2$  — вектор магнитной индукции  $\vec{B}_{32}$ . В общем случае для  $\vec{B}_3$  можно записать:

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu\mu_0 [q \vec{v} x \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu\mu_0 |q| v \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad \alpha = (\vec{v}, \vec{r}). \quad (4.7)$$

Здесь  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от заряда  $q$  в рассматриваемую точку пространства.

Для общности выражений в формулу (4.7) и в последующие формулы вводится относительная магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которая учитывает изменение магнитного поля в присутствии вещества. Для вакуума  $\mu = 1$ .

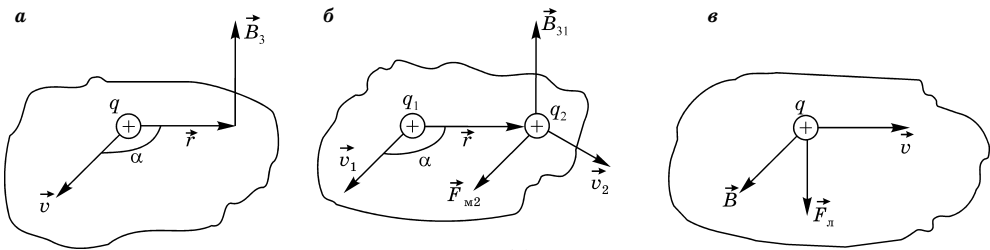


Рис. 4.2

Направление вектора  $\vec{B}_3$  (рис. 4.2а) можно определить по следующим правилам:

1) векторного произведения двух векторов — вектор  $\vec{B}_3$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , если смотреть с конца вектора  $\vec{B}_3$ , то кратчайший поворот от  $\vec{v}$  к  $\vec{r}$  будет виден против часовой стрелки;

2) по правилу левой руки — четыре пальца направляют по скорости движения заряда, вектор  $\vec{r}$  входит в ладонь, отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление  $\vec{B}_3$ ;

3) по правилу правого буравчика — вращательное движение буравчика производим от  $\vec{v}$  к  $\vec{r}$ , тогда поступательное движение буравчика покажет направление  $\vec{B}_3$ .

Все эти правила справедливы для положительного заряда, в случае отрицательного заряда полученное направление  $\vec{B}_3$  нужно изменить на противоположное.

Для определения направления силы  $\vec{F}_m$  магнитного взаимодействия двух зарядов  $\vec{F}_m$  необходимо сначала найти направление вектора индукции  $\vec{B}_3$  одного из зарядов, а затем по правилам, перечисленным выше, найти направление  $\vec{F}_m$  (рис. 4.2б).

Если в формулу (4.6) вместо индукции магнитного поля  $\vec{B}_3$  движущегося заряда  $\vec{B}_3$  подставить  $\vec{B}$ , созданное проводниками с током, постоянными магнитами и прочим, то тогда силу  $\vec{F}_m$  называют **силой Лоренца**  $\vec{F}_L$  и для нее можно записать следующее выражение:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad \vec{F}_L = |q|vB\sin\alpha, \quad \alpha = (\vec{v}, \vec{B}). \quad (4.8)$$

Итак, **сила Лоренца** — сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу. Направление силы Лоренца определяется по правилам, отмеченным выше (рис. 4.2в).

#### 4.1.3. ЭЛЕМЕНТ ТОКА. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА. ЗАКОН АМПЕРА

**Элемент тока**  $I\vec{dl}$  — это вектор, направленный в каждой точке проводника с током  $I$  параллельно вектору плотности тока и равный по модулю произведению силы тока  $I$  на элемент длины  $dl$  проводника.

Найдем индукцию  $d\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого элементом тока. При пропускании по проводнику тока  $I$  в элементе длины  $dl$  проводника объемом  $Sdl$  ( $S$  — площадь поперечного сечения проводника, рис. 4.3а) движется

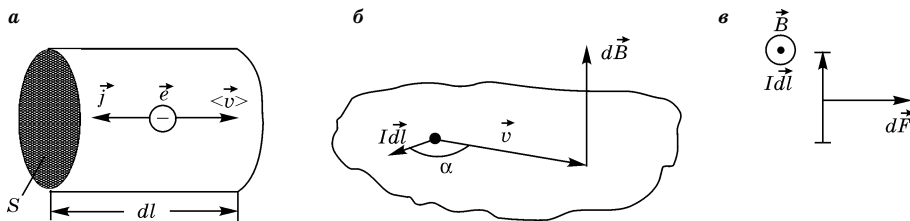


Рис. 4.3

заряд  $dq$  со скоростью направленного движения  $\langle \vec{v} \rangle$ , который и создает магнитное поле  $d\vec{B}$ . Учитывая малые размеры элемента длины  $dl$  проводника, для  $d\vec{B}$  можно записать

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[dq\langle \vec{v} \rangle \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Используя формулы для силы тока  $I = dq/dt$ , получим

$$dq\langle \vec{v} \rangle = dq(d\vec{l} / dt) = (dq / dt)d\vec{l} = I d\vec{l},$$

что позволяет оценить  $d\vec{B}$  по следующему выражению:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} [I d\vec{l} \times \vec{r}], \quad dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad \alpha = \left( \widehat{d\vec{l}, \vec{r}} \right), \quad (4.9)$$

где  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от элемента тока к рассматриваемой точке пространства.

Формула (4.9) — это **закон Био–Савара–Лапласа (БСЛ)**, который определяет индукцию магнитного поля, создаваемого элементом тока. Направление вектора  $d\vec{B}$  определяется по правилам, приведенным в разделе 4.2 (рис. 4.3б).

Если поместить элемент тока в магнитное поле, то силу  $d\vec{F}$ , действующую на него со стороны магнитного поля, можно найти как сумму сил Лоренца  $\vec{F}_L$ , действующих на заряд  $dq$ , движущийся в элементе тока:  $d\vec{F} = [dq\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}]$ . Используя методику вывода закона БСЛ, получим

$$d\vec{F} = [I d\vec{l} \times \vec{B}], \quad dF = Idl \sin \alpha, \quad \alpha = \left( \widehat{d\vec{l}, \vec{B}} \right). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) представляет собой **закон Ампера, определяющий силу, которая действует на элемент тока со стороны магнитного поля**. Направление силы можно определять по правилу левой руки, изложенному в разделе 4.1.2 (рис. 4.3в).

#### 4.1.4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА К РАСЧЕТУ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

Для расчета индукции магнитного поля проводника с током нужно разбить его на отдельные элементы тока (представить его как систему (набор) элементов тока), по закону БСЛ найти векторы индукции  $d\vec{B}$  магнитного



поля от каждого элемента тока в рассматриваемой точке и затем суммировать их по правилу сложения векторов:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu\mu_0 [I d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (4.11)$$

Прежде чем перейти к конкретным примерам расчета магнитных полей, отметим, что для графического изображения магнитных полей используются **линии вектора магнитной индукции** (линии  $\vec{B}$ ), которые проводятся так, чтобы в каждой точке линии вектор  $\vec{B}$  был направлен по касательной к ним.

Из опыта известно, что в природе не существует магнитных зарядов, поэтому линии  $\vec{B}$  являются замкнутыми. В ряде случаев направление вектора  $\vec{B}$  в данной точке поля удобно определять, предварительно проведя через данную точку линию вектора  $\vec{B}$ .

Рассмотрим два примера расчета индукции магнитного поля с использованием закона БСЛ.

**Пример 1.** Магнитное поле прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$ . Рассчитаем индукцию магнитного поля прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$  в точке  $A$  (рис. 4.4а). Положение точки  $A$  можно задать расстоянием  $a$  до проводника и углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\alpha_1$  — угол между первым элементом тока (он расположен там, откуда начинается ток) и вектором  $\vec{r}_1$ , проведенным от этого элемента тока в точку  $A$ ;  $\alpha_2$  — угол между последним элементом тока (он расположен там, где заканчивается ток) и вектором  $\vec{r}_2$ , проведенным от этого элемента тока в точку  $A$ .

Из рис. 4.4а видно, что все векторы  $d\vec{B}$  направлены перпендикулярно плоскости чертежа от нас, следовательно, также направлен и вектор  $\vec{B}$  суммарного поля. Тогда формула (4.11) для модуля вектора  $\vec{B}$  запишется так:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$

Для того чтобы взять такой интеграл, рассмотрим рис. 4.4б, где приведен произвольный элемент длины  $dl$  проводника:

$$\triangle OAC \sim \triangle BCM: \frac{OA}{AC} = \frac{BM}{BC}, \quad \frac{a}{r} = \frac{rd\alpha}{dl}, \quad \frac{dl}{r^2} = \frac{d\alpha}{a}.$$

Подставляя полученное выражение в интеграл, получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.12)$$

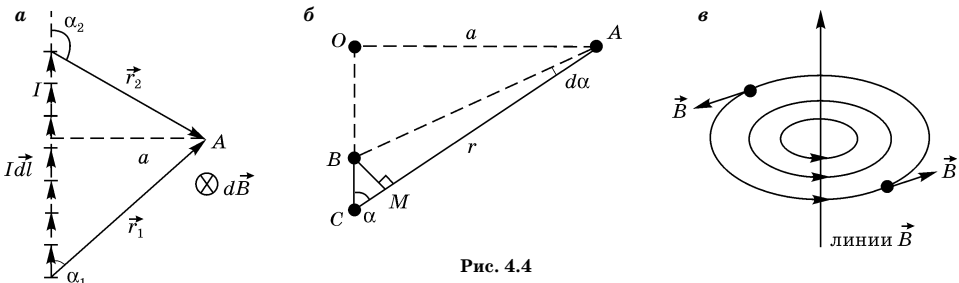


Рис. 4.4

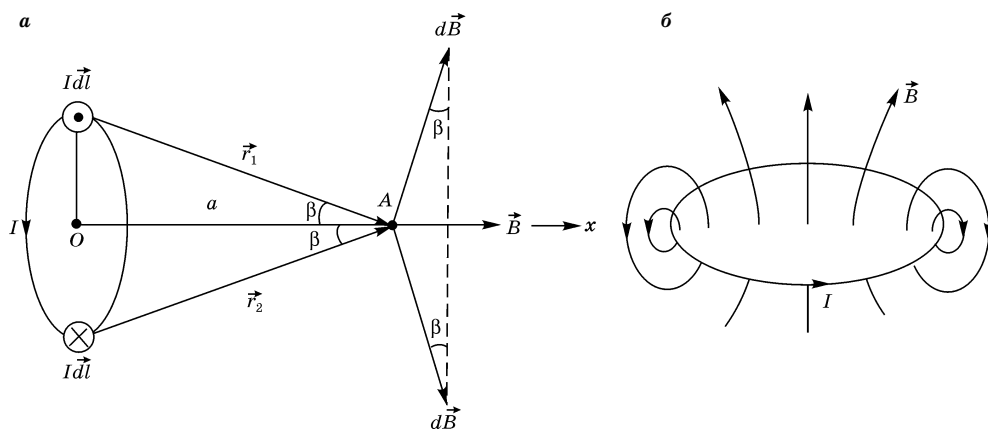


Рис. 4.5

Направление вектора  $\vec{B}$  можно определить, предварительно проведя линии  $\vec{B}$  прямого проводника с током — это окружности, охватывающие проводник и лежащие в плоскости, перпендикулярной к нему; направление линий  $\vec{B}$  связано правилом правого буравчика с направлением тока в проводнике. Тогда вектор  $\vec{B}$  в каждой точке линии будет направлен по касательной к ней (см. рис. 4.4б).

В частном случае бесконечно длинного проводника с током ( $\alpha_1 \rightarrow 0^\circ$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 180^\circ$ ) получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.13)$$

Обычно расстояние от проводника до рассматриваемой точки обозначают буквой  $r$ , поэтому в формулах (4.12) и (4.13) в общем случае вместо буквы  $a$  пишут буквы  $r$ .

**Пример 2.** Магнитное поле на оси кольцевого тока. Рассчитаем индукцию магнитного поля в точке  $A$ , находящейся на оси кольцевого тока  $I$  радиуса  $R$  на расстоянии  $a$  от его центра (рис. 4.5а).

На рис. 4.5а указаны векторы  $d\vec{B}$ , созданные верхним и нижним элементами тока в точке  $A$ . Они образуют угол  $\beta$  с вертикальным направлением. Векторы  $d\vec{B}$ , созданные всеми элементами тока, образуют конус векторов  $d\vec{B}$ , и из соображений симметрии следует, что суммарный вектор  $\vec{B}$  в точке  $A$  будет направлен по оси кольца. Проектируя уравнение (4.11) на ось  $Ox$ , получим

$$B = \int dB \sin \beta = \int \frac{\mu\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 I \sin \beta 2\pi R}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Для центра кольцевого тока (точка  $O$ )  $a = 0$ , и поэтому

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (4.15)$$

Линии  $\vec{B}$  кольцевого тока представляют собой окружности, перпендикулярные плоскости кольца, их направление связано правилом правого буравчика с направлением тока (рис. 4.5б).

#### 4.1.5. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ $\vec{B}$

Рассмотрим в магнитном поле воображаемую замкнутую линию — контур  $\Gamma$  (рис. 4.6а). Введем вектор  $d\vec{l}$  — по модулю он равен элементу длины  $dl$  контура, в каждой точке контура направлен по касательной в направлении обхода контура (рис. 4.6а).

Интеграл вида

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{B}, d\vec{l}),$$

называют **циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру** (в нашем случае это контур  $\Gamma$ ).

Можно доказать **теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для вакуума**: циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu_0$ :

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (4.16)$$

Знак силы тока  $I$  в формуле (4.16) выбирается следующим образом: если направление тока связано с направлением обхода контура правилом правого буравчика, то это «+»; если нет — «-».

Проверим теорему на примере прямолинейного проводника бесконечной длины с током  $I$ . Возьмем контур  $\Gamma$ , совпадающий с линией  $\vec{B}$  радиуса  $R$ , а направление обхода контура выберем против часовой стрелки, то есть по направлению линии  $\vec{B}$  (рис. 4.6б). Тогда

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \oint_{(\Gamma)} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \cdot \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_{(\Gamma)} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I,$$

что и требовалось показать.

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по контуру  $\Gamma$  (рис. 4.6в) равна  $\mu_0(2I_1 - I_2)$ . Это связано с тем, что ток  $I_1$  охватывается контуром два раза, и поэтому в формулу входит коэффициент 2; ток  $I_3$  контуром не охватывается и поэтому в формулу не войдет.

В **присутствии вещества** в правую часть теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  необходимо ввести микроток  $I_{\text{микро}}$ , охватываемые контуром  $\Gamma$ :

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \mu_0 \left( \sum_i I_i + I_{\text{микро}} \right). \quad (4.17)$$

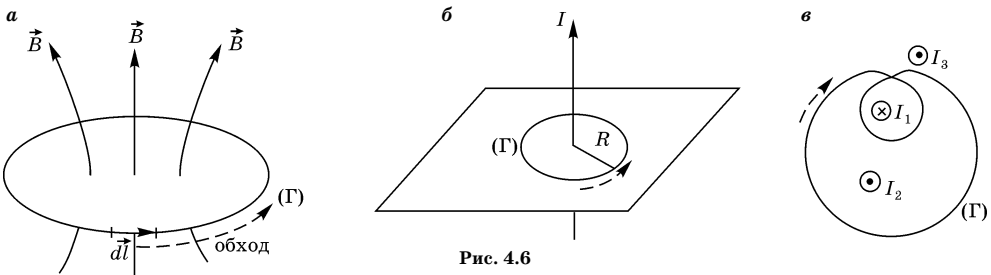


Рис. 4.6

Под **микротоками**, или **молекулярными токами**, понимают токи, вызванные движением электронов в атомах, ионах и молекулах. Эти токи создают магнитное поле вещества, помещенного во внешнее магнитное поле.

Из формулы (4.17) следует **физический смысл теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$** , а именно источником вектора  $\vec{B}$  являются токи проводимости и микротоки.

В случае изотропного вещества формулу (4.18) можно упростить, учитывая магнитное поле вещества, введением магнитной проницаемости  $\mu$ :

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \mu \mu_0 \sum_i I_i. \quad (4.18)$$

В таком виде теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  используется при решении многих задач магнитостатики как в вакууме, так и в присутствии вещества.

В заключение запишем дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , справедливую для любой малой окрестности какой-либо точки поля. С учетом формулы (П. 1.18) получим:

$$\text{rot} \vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{B}] = \mu_0 (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{микро}}) = \mu \mu_0 \vec{j}_{\text{пр}}, \quad (4.19)$$

где введены плотности токов проводимости  $\vec{j}_{\text{пр}}$  и микротоков  $\vec{j}_{\text{микро}}$  (см. Прил. 1)

$$j_{\text{пр}} = \frac{dI_{\text{пр}}}{dS}, \quad j_{\text{микро}} = \frac{dI_{\text{микро}}}{dS}. \quad (4.20)$$

#### 4.1.6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА $\vec{B}$ К РАСЧЕТУ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  позволяет рассчитать модуль вектора  $\vec{B}$  в случаях определенной симметрии магнитного поля, то есть когда известно направление вектора  $\vec{B}$  в каждой точке поля.

**Отметим следующие этапы применения теоремы:**

1) из симметрии задачи сначала определяем направление вектора  $\vec{B}$  в любой точке поля. Если этого сделать нельзя, то для расчета поля (направления и модуля вектора  $\vec{B}$ ) необходимо использовать закон БСЛ и принцип суперпозиции для магнитных полей;

2) выбираем контур  $\Gamma$  и рассчитываем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  согласно определению;

3) рассчитываем сумму токов, охватываемых контуром;

4) применяем теорему для расчета модуля вектора  $\vec{B}$ .

Рассмотрим три примера расчета магнитного поля на основе теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ .

**Пример 1.** Магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Соленоид представляет собой проводник, навитый на цилиндрический каркас.

*1-й этап.* Из симметрии задачи следует, что магнитное поле существует только внутри соленоида. Оно является однородным, линии  $\vec{B}$  связаны с направлением тока в соленоиде правилом правого буравчика (рис. 4.7а).

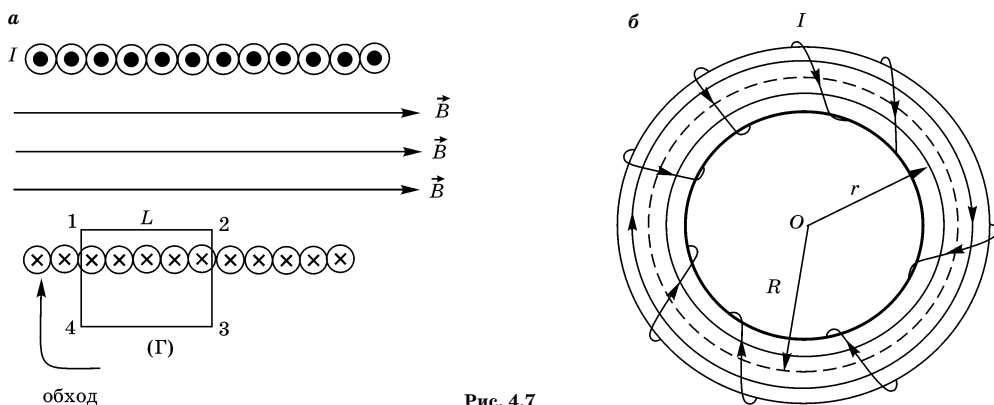


Рис. 4.7

**2-й этап.** Выбираем контур  $\Gamma$  в виде прямоугольника 1–2–3–4–1, одна из сторон которого параллельна оси соленоида и располагается внутри него. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по этому контуру:

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \int_1^2 B dl \cos 0^\circ + \int_2^3 B dl \cos 90^\circ + \int_3^4 B dl \cos \alpha + \int_4^1 B dl \cos 90^\circ = B \int_1^2 dl = B \cdot l,$$

где  $l$  — длина стороны 1–2; на сторонах 2–3, 3–4 и 4–1 интеграл обращается в ноль, так как внутри соленоида  $\alpha = 90^\circ$ , а за его пределами  $B = 0$ .

**3-й этап.** Рассчитаем сумму токов, охватываемых контуром:  $\sum I_i = N \cdot I$ , где  $N$  — число витков на стороне контура 1–2. Выбираем знак «+», так как направление тока и обхода контура связаны правилом правого буравчика.

**4-й этап.** Найдем модуль вектора  $\vec{B}$ :  $B \cdot l = \mu \mu_0 N I$ ,

$$B = \mu \mu_0 n I, \quad (4.21)$$

где  $n = N/l$  — число витков на единицу длины соленоида.

Полученная формула применима также и для расчета модуля  $\vec{B}$  магнитного поля внутри длинного соленоида, у которого длина значительно превышает диаметр витков  $D$  ( $l \gg D$ ).

**Пример 2.** Магнитное поле тороида. Тороид представляет собой проводник, навитый на каркас в виде тора (рис. 4.7б).

**1-й этап.** Из симметрии задачи следует, что магнитное поле существует только внутри тороида. Линии вектора  $\vec{B}$  представляют собой окружности с центром в точке  $O$  (рис. 4.7б), их направление связано с направлением тока в тороиде правилом правого буравчика. Вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к линиям  $\vec{B}$ .

**2-й этап.** Выбираем контур  $\Gamma$ , совпадающий с линией  $\vec{B}$  радиуса  $r$ , направление обхода контура — по часовой стрелке. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = B \oint_{(\Gamma)} dl \cos 0 = B \cdot 2\pi r.$$

**3-й этап.** Рассчитаем сумму токов, охватываемых контуром:  $\sum I_i = N \cdot I$ , где  $N$  — число витков тороида.

4-й этап. Найдем модуль вектора  $\vec{B}$ :

$$B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 NI, \quad B = \mu\mu_0 nI \cdot R/r, \quad (4.22 \text{ а})$$

где  $n = N/(2\pi R)$  — число витков, приходящихся на единицу длины тороида;  $R$  — радиус окружности, проходящей через центры витков тороида.

Если диаметр  $D$  витков тороида значительно меньше  $R$  ( $D \ll R$ ), то тогда можно считать, что  $r \approx R$ , и записать

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (4.22 \text{ б})$$

**Пример 3.** Магнитное поле коаксиального кабеля. Коаксиальный кабель представляет собой два коаксиальных цилиндрических проводника (оси цилиндров совпадают), разделенных слоем диэлектрика, причем внутренний проводник является сплошным (рис. 4.8а). По кабелю пропускают высокочастотный переменный ток, который в каждый момент времени протекает по проводникам в противоположных направлениях. Из-за скин-эффекта ток по внутреннему проводнику течет только по его внешней поверхности и поэтому магнитное поле коаксиального кабеля эквивалентно магнитному полю двух токов одинаковой величины  $I$ , текущих по цилиндрическим поверхностям радиусов  $R_1$  и  $R_2$  в противоположных направлениях (рис. 4.8а).

1-й этап. Из симметрии задачи (осевая симметрия) следует, что линии вектора  $\vec{B}$  представляют собой окружности, располагающиеся в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндров, с центрами на этой оси. Направление линий  $\vec{B}$  связано правилом правого буравчика с направлением тока в проводниках. Вектор  $\vec{B}$  будет направлен по касательной к линии  $\vec{B}$  в каждой ее точке. Причем на одинаковом расстоянии от оси (на цилиндрических поверхностях) вектор  $\vec{B}$  будет одинаковым по модулю.

2-й этап. Рассмотрим область пространства между цилиндрами ( $R_1 < r < R_2$ ). Выбираем контур  $\Gamma$ , совпадающий с линией вектора  $\vec{B}$  радиуса  $r$ , направление обхода контура возьмем против часовой стрелки. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = B \oint_{(\Gamma)} dl \cos 0 = B \cdot 2\pi r.$$

3-й этап. Рассчитаем сумму токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :  $\sum I_i = I$ .

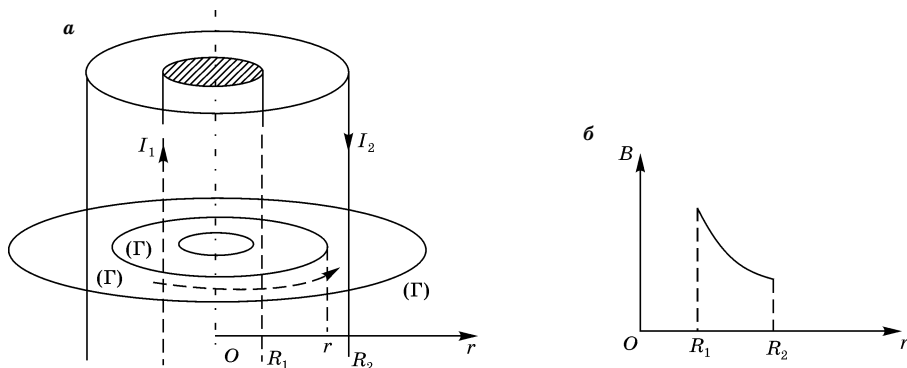


Рис. 4.8

4-й этап. Найдем модуль вектора  $\vec{B}$ :

$$B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 I, \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Для областей пространства  $r < R_1$  и  $r > R_2$  сумма токов, охватываемых контуром, будет равна нулю, и поэтому магнитное поле в этих областях пространства отсутствует. Тогда для магнитного поля коаксиального кабеля можно записать:

$$R_1 < r < R_2 : B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r < R_1, \quad r > R_2, \quad B = 0. \quad (4.23)$$

На рис. 4.8б приведен график зависимости модуля вектора  $\vec{B}$  для коаксиального кабеля от расстояния  $r$ . Можно отметить, что магнитное поле в пространстве между цилиндрами создается только током, текущим по внутреннему цилиндру.

#### 4.1.7. МАГНИТНЫЙ ПОТОК. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА $\vec{B}$ . РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА И КОНТУРА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Элементарным магнитным потоком  $d\Phi$  через элементарную площадку  $dS$  называется скалярная физическая величина

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{B}, \vec{n}), \quad (4.24)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{B}$  и вектором  $\vec{n}$  нормали к площадке  $dS$  (рис. 4.9а).

Магнитный поток  $\Phi$  через поверхность  $S$  равен сумме элементарных магнитных потоков  $d\Phi$ :

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S B dS \cos \alpha. \quad (4.25)$$

Линии  $\vec{B}$  проводятся так, чтобы их густота определяла модуль вектора  $\vec{B}$  в данной точке поля. Поэтому согласно формуле (4.25) магнитный поток  $\Phi$  будет пропорционален количеству линий  $\vec{B}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

Как уже отмечалось в разделе 4.1.4, магнитных зарядов в природе не существует, то есть линии  $\vec{B}$  являются замкнутыми, и поэтому теорема

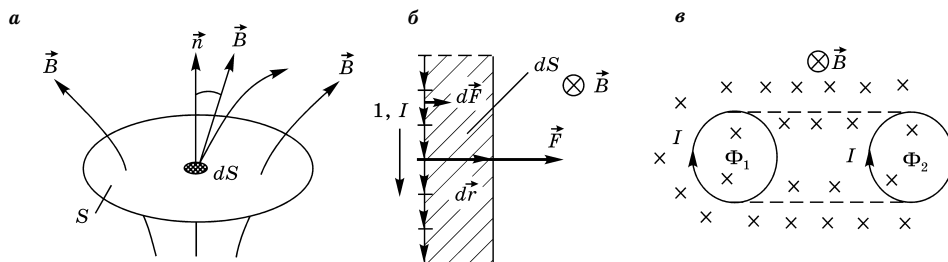


Рис. 4.9

Гаусса в интегральной и дифференциальной формах для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  запишется следующим образом:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} \cos \alpha = 0, \operatorname{div} \vec{B} = \nabla \vec{B} = 0. \quad (4.26)$$

**Физический смысл теоремы Гаусса для вектора  $\vec{B}$**  заключается в следующем: *в природе нет магнитных зарядов и поэтому линии  $\vec{B}$  являются замкнутыми.*

Найдем теперь работу  $dA$  по перемещению прямолинейного проводника на бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис. 4.9б). Длина проводника  $l$ , по нему протекает ток  $I$ .

Прежде всего, используя закон Ампера (4.10), найдем силу  $\vec{F}$ , действующую на проводник с током со стороны магнитного поля. Для этого разобьем проводник на элементы тока  $I d\vec{l}$ , найдем силы  $d\vec{F}$ , действующие на каждый элемент тока, и затем сложим их:

$$\vec{F} = \int d\vec{F}, F = \int dF = \int I B dl \sin 90^\circ = I B l.$$

Тогда

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos 0^\circ = I B l dr = I B ds = I d\Phi, \quad (4.27)$$

где  $d\Phi$  — элементарный магнитный поток, пронизывающий поверхность  $dS$ , которую описывает проводник при своем движении в магнитном поле.

Работа сил поля на конечном перемещении складывается из работ  $dA$  на малых участках пути

$$A = \int dA = I \int d\Phi = I \Delta\Phi$$

и зависит от пути перехода проводника из начального состояния в конечное. Другая ситуация возникает при расчете работы  $A$  по перемещению контура с током (рис. 4.9в):

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta\Phi, \quad (4.28)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  — магнитные потоки, пронизывающие плоскость контура в начальном и конечном положениях.

Из (4.28) следует, что работа по перемещению контура с током в магнитном поле не зависит от траектории пути, а определяется положениями начальной и конечной точек пути. Следовательно, для контура с током в магнитном поле можно ввести потенциальную энергию  $W_p$  и записать выражение для работы следующим образом:  $A = W_{p1} - W_{p2}$ , что с учетом формулы (4.28) позволяет записать для потенциальной энергии  $W_p$  контура с током в магнитном поле следующее выражение

$$W_p = -I\Phi. \quad (4.29)$$



#### 4.1.8. ПОВЕДЕНИЕ КОНТУРА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для того чтобы описать поведение контура с током в магнитном поле, введем понятие его **магнитного момента**  $\vec{p}_m$ . Этот вектор перпендикулярен к плоскости контура, его направление  $\vec{p}_m$  связано правилом правого буравчика с направлением тока в контуре (рис. 4.10а). Модуль вектора  $\vec{p}_m$  равен  $p_m = IS$ , где  $S$  — площадь контура;  $I$  — сила тока, текущего по нему. Поведение контура с током в магнитном поле полностью определяется его магнитным моментом  $\vec{p}_m$ .

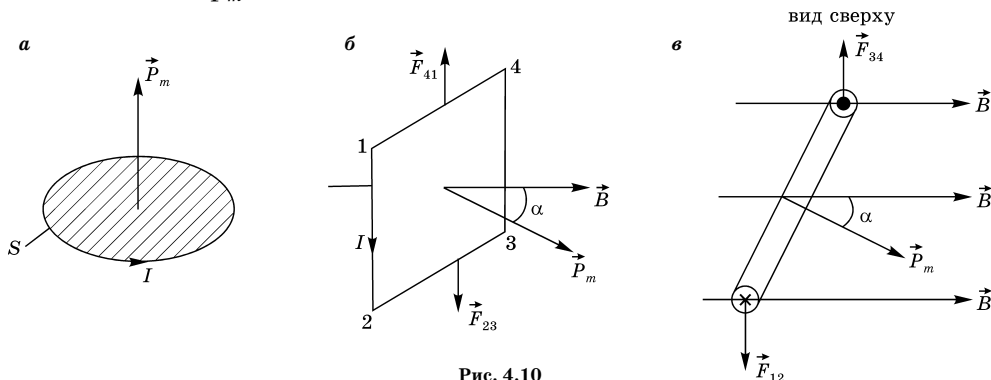


Рис. 4.10

**В однородном магнитном поле** под действием пары одинаковых по модулю сил  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{34}$  прямоугольный контур с током поворачивается и устанавливается в положении, при котором векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  будут параллельны друг другу (рис. 4.10б, в). Это положение является положением устойчивого равновесия, ему соответствует минимальное значение потенциальной энергии  $W_p$  контура с током в магнитном поле. Можно показать, что для  $W_p$  на основании (4.29) получается:

$$W_p = -I\Phi = -IBScos\alpha = -(IS)Bcos\alpha = -p_mBcos\alpha = -(\vec{p}_m\vec{B}),$$

$$W_p = -(\vec{p}_m\vec{B}) = -\vec{p}_mBcos\alpha, \quad \alpha = \widehat{(\vec{p}_m, \vec{B})}. \quad (4.30)$$

При  $\alpha = 0$   $W_p = -p_mB$ , то есть принимает минимальное значение.

**В неоднородном магнитном поле** к вращательному движению контура с током добавляется его поступательное движение. В частном случае ( $\alpha = 0$ ), приведенном на рис. 4.11, составляющие сил, действующих на стороны прямоугольного контура (указаны силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{34}$ ), вызывают поступательное движение контура вдоль оси  $Ox$ . Формулу для проекции силы, вызывающей поступательное движение контура вдоль оси  $Ox$ , можно

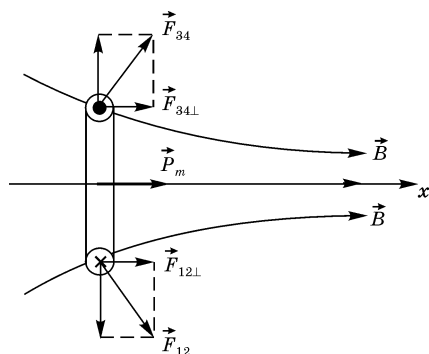


Рис. 4.11

найти, используя формулу связи консервативной силы и потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{dW_p}{dx} = p_m \frac{dB}{dx} \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{p}_m, \vec{B}). \quad (4.31)$$

Как двигается контур с током при различных углах  $\alpha$ ? При начальном значении  $\alpha < 90^\circ$  контур будет поворачиваться с уменьшением угла  $\alpha$  и втягиваться в область более сильного поля. При начальном значении  $\alpha > 90^\circ$  контур будет поворачиваться, уменьшая угол  $\alpha$ , и выталкиваться в область более слабого поля; при достижении значений  $\alpha < 90^\circ$  контур будет поворачиваться, уменьшая угол  $\alpha$  до нуля, и втягиваться в область более сильного поля. И в том и в другом случаях контур с током в конечном итоге втянется в область более сильного поля.

#### 4.1.9. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу действует сила Лоренца (см. формулу (4.8))

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad \vec{F}_L = |q|vB \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{v}, \vec{B}).$$

Сила Лоренца  $\vec{F}_L$  работы не совершает, так как угол между нею и скоростью  $\vec{v}$  частицы равен  $90^\circ$  (в любой момент времени мощность силы Лоренца равна нулю:  $N = F_L v \cos 90^\circ = 0$ ). Это означает, что в магнитном поле модуль скорости частицы и ее кинетическая энергия остаются постоянными, изменяется только направление скорости движения частицы.

Рассмотрим частные случаи движения частицы **в однородном магнитном поле**:

а)  $\alpha = 0^\circ$ . Тогда  $F_L = 0$ , частица движется прямолинейно вдоль линий вектора  $\vec{B}$  (рис. 4.12а);

б)  $\alpha = 90^\circ$ . Частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям вектора  $\vec{B}$ . Траектория движения частицы — окружность радиуса  $R$  (рис. 4.12б). Используя II закон Ньютона, для радиуса  $R$  и периода обращения частицы  $T$  можно получить

$$F_L = ma : |q|vB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}, \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}; \quad (4.32)$$

в)  $\alpha$  — произвольный угол. Траекторию движения частицы — винтовую линию (рис. 4.12в — можно представить как сумму двух видов движения:

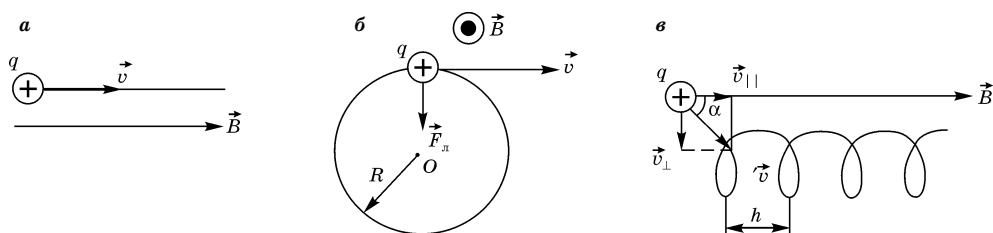


Рис. 4.12

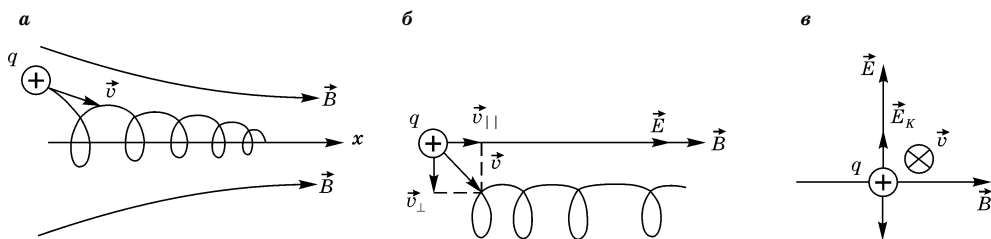


Рис. 4.13

прямолинейного вдоль линий  $\vec{B}$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) и движения по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$  ( $\alpha = 90^\circ$ ).

Для параметров винтовой линии — радиуса окружности  $R$ , периода обращения  $T$  и шага винтовой линии  $h$  (рис. 4.12в) можно записать:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}; T = \frac{2\pi m}{|q|B}, h = v_{11} \cdot T, v_{11} = v \cos \alpha, v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (4.33)$$

**В неоднородном магнитном поле** частица в общем случае будет двигаться по винтовой линии, радиус и шаг которой будут изменяться, то есть по спирали.

Для частного случая, приведенного на рис. 4.13а, при движении частицы вдоль оси  $Ox$  модуль вектора  $\vec{B}$  увеличивается и согласно формулам (4.33) радиус  $R$  и шаг винтовой линии  $h$  будут уменьшаться.

В совмещенных в пространстве электрическом и магнитном полях на частицу, кроме силы Лоренца, будет также действовать кулоновская сила

$$\vec{F} = \vec{F}_K + \vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (4.34)$$

Из формулы (4.34) следует, что в однородных электрическом и магнитном полях, когда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  будут параллельны, траектория движения частицы представляет собой винтовую линию, у которой радиус  $R$  остается постоянным (модуль  $v_{\perp}$  не изменяется), а шаг  $h$  будет увеличиваться (под действием кулоновской силы модуль  $v_{11}$  будет возрастать, см. рис. 4.13б).

В скрещенных под прямым углом однородных электрическом и магнитном полях (рис. 4.13в) заряженная частица будет двигаться равномерно и прямолинейно, если ее вектор скорости  $\vec{v}$  будет направлен от нас в плоскость рисунка, а модуль вектора скорости

$$\vec{F} = \vec{F}_K + \vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad F_L = F_K : |q|vB = |q|E \Rightarrow v = E/B.$$

#### 4.1.10. ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Рассмотренные примеры движения заряженных частиц (раздел 4.1.9) объясняют некоторые физические явления и используются при работе многих устройств, применяемых в современной науке и технике. Остановимся на некоторых из них.

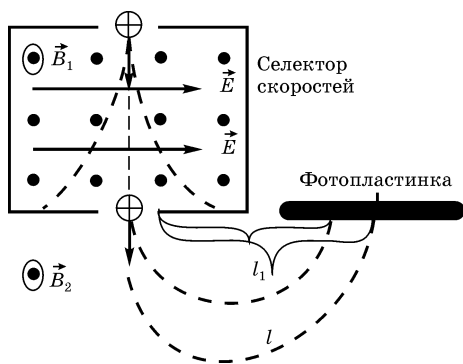


Рис. 4.14

**1. Масс-спектрометры** — приборы для определения масс атомов и молекул (точнее, их ионов). Схема одного из них приведена на рис. 4.14. Пучок ионов, полученных с помощью газового разряда и ускоренный электрическим полем, попадает в так называемый селектор скоростей. В нем пучок ионов движется в скрещенных под прямым углом однородных электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}_1$  полях (рис. 4.14). Через узкое выходное отверстие проходят только те частицы, для которых модуль скорости движе-

ния  $\vec{v}$  равен  $v = E/B_1$ , они движутся равномерно и прямолинейно (рис. 4.13в).

Остальные частицы, движущиеся со скоростями, отличными от значения  $E/B_1$ , отклоняются от прямолинейной траектории и оказываются на стенках камеры. После этого пучок ионов попадает в однородное магнитное поле  $\vec{B}_2$ , линии индукции которого перпендикулярны к скорости  $\vec{v}$ . Описав дуги полуокружностей, ионы оказываются на фотопластинке (либо другом регистрирующем устройстве) и оставляют на ней следы в виде узких полосок на различных расстояниях ( $l_1$ ,  $l_2$  и т. д.,  $l = 2R$ , где  $R$  — радиус полуокружности).

Зная параметры  $B_1$ ,  $E$ ,  $B_2$  и  $l$ , можно найти удельные заряды частиц:

$$v = \frac{E}{B_1}, R = \frac{l}{2} = \frac{mv}{|q|B_2} \Rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{v}{RB_2} = \frac{2E}{B_1 B_2 l}.$$

Поскольку заряды ионов являются целыми числами, кратными элементарному заряду  $|e|$ , то по найденным значениям  $\frac{|q|}{m}$  можно определить массу ионов. С помощью масс-спектрометров было обнаружено существование изотопов. В настоящее время они широко используются, например для количественного анализа нефти.

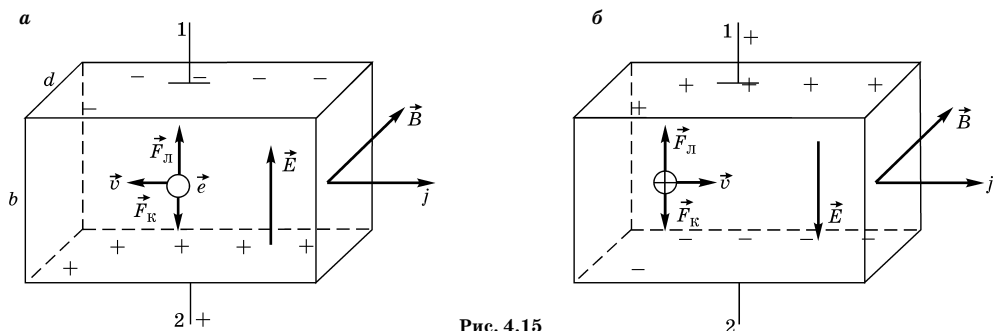


Рис. 4.15

**2. Эффект Холла.** Возьмем металлическую прямоугольную пластинку шириной  $b$  и толщиной  $d$ . Пропустим по ней ток плотностью  $\vec{j}$  и поместим ее в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости пластины (рис. 4.15а).

На движущиеся в металле свободные электроны со стороны магнитного поля будет действовать сила Лоренца, которая приведет к движению электронов к верхней грани пластины, она зарядится отрицательно, а нижняя грань — положительно. В результате этого в металле возникает поперечное электрическое поле, напряженность  $\vec{E}$  которого будет перпендикулярна векторам  $\vec{B}$  и  $\vec{j}$ . Эффект Холла (1879) заключается в **возникновении поперечного электрического поля**.

Для разности потенциалов, возникающей между верхней и нижней гранями пластины в условиях установившегося в поперечном сечении стационарного распределения зарядов, можно получить:

$$\begin{aligned} I &= q_0 n \langle v \rangle S = q_0 n v b d, \quad \langle v \rangle = \frac{I}{q_0 n b d}, \\ F_K &= F_L: |e| E = |e| \langle v \rangle B, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = E b = E \langle v \rangle b = \\ &= B \frac{I}{e n b d} b = \frac{I B}{e n d} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= R_X \frac{I B}{d} = R_X j b B. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Из формулы (4.35) следует, что холловская разность потенциалов определяется толщиной пластины  $d$  в направлении магнитного поля, силой тока и модулем вектора  $\vec{B}$  магнитного поля  $\vec{B}$ . Если выразить силу тока через плотность тока, то тогда в формулу (4.35) войдет толщина пластины  $b$  в направлении, перпендикулярном направлению магнитного поля.

Характеристики материала, из которого сделана пластина, входят в выражение (4.35) через постоянную Холла:

$$R_X = \frac{1}{n q_0}, \quad (4.36)$$

где  $n$  — концентрация свободных заряженных частиц с зарядом  $q_0$ .

Для металлов заряд  $q_0$  равен заряду электрона, и поэтому из экспериментально установленного значения постоянной Холла можно определить концентрацию свободных электронов в металле.

В зависимости от знака свободных носителей заряда постоянная Холла может быть больше или меньше нуля. Так, для металлов  $q_0 = e < 0$ ,  $R_X < 0$  и, как следует из рис. 4.15а, для положительных  $I$ ,  $B$  и  $d$  разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  будет отрицательной. В полупроводниках, помимо электронного типа проводимости, наблюдается и дырочная проводимость, обусловленная движением положительных квазичастиц ( $q_0 > 0$ ), получивших название «дырок». Для дырочной проводимости знак разности потенциалов на рис. 4.15б будет другим  $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$  и  $R_X > 0$ . Поэтому по знаку постоянной Холла можно судить о том, какой тип проводимости преобладает в данном полупроводнике.

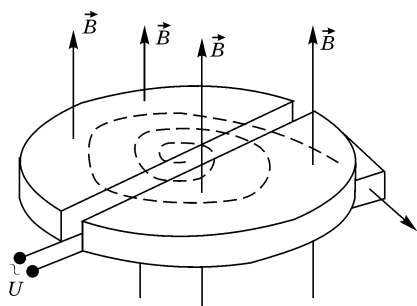


Рис. 4.16

**3. Циклотрон** — это ускоритель тяжелых заряженных частиц, таких как протоны,  $\alpha$ -частицы и ионы. В нем используется независимость периода обращения частицы в магнитном поле от скорости ее движения (см. формулу 4.32). Циклотрон представляет собой вакуумную камеру, в которой находятся два металлических электрода (дуанты) из неферромагнитного материала (рис. 4.16). Камера находится в однородном магнитном поле постоянного магнита (линии  $\vec{B}$  перпендикуляр-

ны плоскости дуантов). На электроды подается переменное напряжение, и поэтому в зазоре между ними создается переменное электрическое поле. Частицы, помещенные в зазор вблизи центра дуантов, ускоряются этим полем и попадают внутрь дуантов, там на частицы действует только магнитное поле (электрическое поле внутрь металлических электродов не проникает). Описав полуокружности, частицы снова попадают в зазор и ускоряются электрическим полем, к этому моменту времени оно успевает изменить свое направление, так как период изменения напряжения на электродах подбирают равным периоду обращения частиц в магнитном поле.

Постоянное ускорение частиц в зазоре между дуантами приводит к увеличению радиуса их окружностей, и при достижении его предельного значения пучок частиц выводится наружу.

В циклотроне энергия частиц может достигать значений порядка  $(10 \div 20)$  МэВ. При дальнейшем увеличении начинают сказываться релятивистские эффекты (зависимость массы частиц от скорости их движения), что приводит к потере синхронизации между периодами изменения электрического поля и обращения частиц в магнитном поле (период обращения зависит от скорости, он будет увеличиваться).

Учет релятивистских эффектов при ускорении частиц можно осуществить следующим образом. Во-первых, изменять частоту подаваемого на электроды переменного напряжения, такой способ используется в фазотронах, при этом максимальная энергия протонов достигает значений  $W_k = 1 \text{ ГэВ} = 1 \cdot 10^3 \text{ МэВ}$  (она ограничена размерами дуантов). Во-вторых, можно одновременно изменять электрическое и магнитное поля так, чтобы частицы двигались по окружности постоянного радиуса (синхротрон, максимальная энергия частиц  $W_k = 500 \text{ ГэВ}$ ).

## 4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Классическая электродинамика — некантовая теория поведения электромагнитного поля, осуществляющего взаимодействие между электрическими зарядами. Нужно отметить, что все тела построены из электрически заряженных частиц, что определяет широту и разнообразие проявлений электромагнитного взаимодействия.

Законы классической макроскопической электродинамики сформулированы в уравнениях Максвелла, которые позволяют определить значения характеристик электромагнитного поля в вакууме и в макроскопических телах в зависимости от распределения в пространстве электрических зарядов и токов.

Большой вклад в развитие электродинамики внес М. Фарадей, который впервые стал рассматривать электрические и магнитные процессы с единой точки зрения. В 1831 году он открыл явление электромагнитной индукции — возникновение электрического тока в контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Это положило начало развитию электротехники.

Создание квантовой теории строения вещества привело к определению границ применимости классической электродинамики. В этих пределах уравнения Максвелла и классическая электронная теория сохраняют свою силу, являясь фундаментом большинства разделов электротехники, радиотехники, электроники и оптики. С помощью уравнений Максвелла решаются проблемы поведения плазмы в лабораторных условиях и в космосе.

Отметим, что классическая электродинамика неприменима к электромагнитным волнам большой частоты, у которых начинает сказываться квантовая природа излучения, в этом случае справедливы законы квантовой электродинамики.

#### 4.2.1. ОПЫТЫ ФАРАДЕЯ. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

После десяти лет упорной работы опытным путем М. Фарадею удалось «превратить магнетизм в электричество», то есть показать, что не только электрический ток создает в окружающем пространстве магнитное поле, но и оно способно порождать в замкнутом проводящем контуре электрический ток, получивший название индукционного тока.

Столь большой срок открытия связан с тем, что существовала неэквивалентность взаимосвязи электрических и магнитных явлений, а именно постоянный электрический ток порождает в окружающем пространстве постоянное магнитное поле, а для возникновения в замкнутом проводящем контуре постоянного индукционного тока необходимо было вызвать изменение магнитного потока  $\Phi$ .

В опытах Фарадея магнитный поток, пронизывающий первый контур (катушку 1), изменялся различными способами (рис. 4.17):

- 1) замыкалась и размыкалась цепь второго контура;
- 2) с помощью реостата изменялась сила тока во втором контуре;
- 3) второй контур приближался или удалялся относительно первого контура;
- 4) постоянный магнит приближался или удалялся относительно первого контура;

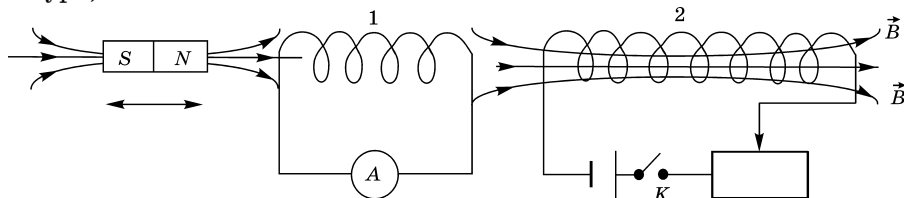


Рис. 4.17

5) движение совершал контур 1 относительно магнита и контура 2, по которому протекал постоянный ток, и т. д.

В результате в контуре возникала ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  и индукционный ток  $I_i$ , который фиксировался амперметром. Причем индукционный ток изменял свое направление при смене направления движения магнита, направления движения контуров 1 и 2, при замене нарастающего тока в контуре 2 убывающим со временем током, при замене замыкания цепи второго контура ее размыканием.

В итоге Фарадей показал, что сила индукционного тока  $I_i$  и ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  зависят от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, и не зависят от способа изменения магнитного потока  $\Phi$ .

#### 4.2.2. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ. ПРИРОДА СТОРОННИХ СИЛ. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

На основании опытов Фарадей сформулировал **закон электромагнитной индукции**, который гласит: *при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, в нем возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ , равная скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком:*

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S B ds \cos \alpha, \quad (4.37)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий любую поверхность  $S$ , опирающуюся на проводящий контур.

Изменение со временем магнитного потока  $\Phi$  может происходить либо за счет изменения угла  $\alpha$  (вращения контура в магнитном поле), либо изменения площади  $S$  контура, либо изменения со временем магнитного поля, в котором находится контур. Во всех этих случаях в контуре возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ , то есть сторонние силы, совершающие работу по разделению разноименных электрических зарядов.

Природа сторонних сил может быть разной.

**Случай 1.** Вектор  $\vec{B}$  не зависит от времени, а площадь  $S$  контура и угол  $\alpha$  изменяются.

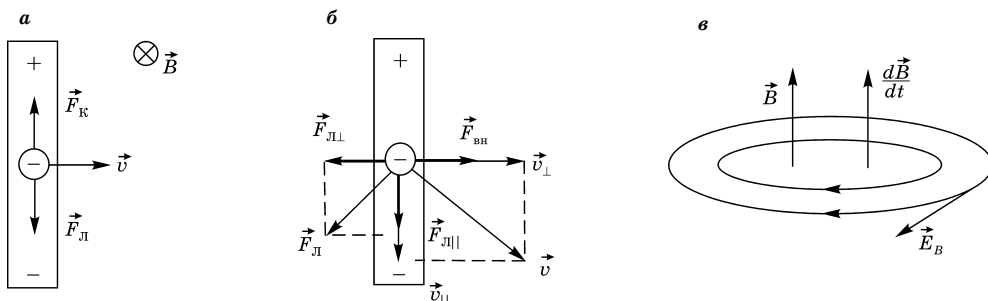


Рис. 4.18



В постоянном во времени магнитном поле возникновение ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  в проводящем контуре (он вращается или изменяется его площадь) или в движущемся проводнике (изменяется площадь поверхности, описываемая проводником) обусловлено действием на свободные заряды силы Лоренца. Действительно, как видно из рис. 4.18а, сила Лоренца вызывает движение электронов к одному концу проводника, на нем возникает избыток электронов, а на другом конце их недостаток. Следовательно, сила Лоренца разделяет разноименные заряды, являясь сторонней силой:  $\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{стор.}}$ .

Интересно рассмотреть, почему сила Лоренца разделяет разноименные заряды, то есть ее работа отлична от нуля. Известно, что мощность силы Лоренца равна нулю ( $N_L = A_L/t = F_L v \cos 90^\circ = 0$ ), то есть она не может совершать работы. Для ответа на этот вопрос отметим, что разделение зарядов происходит в промежутке времени, когда под действием внешней силы  $\vec{F}_{\text{ВН}}$  скорость проводника изменяется от нуля до постоянного значения  $v$ . В эти моменты времени суммарная скорость свободного электрона  $\vec{v}$  будет направлена под произвольным углом к проводнику (рис. 4.18б). Поэтому, кроме параллельной, направленной вдоль проводника силы Лоренца  $\vec{F}_{L\parallel}$  (она разделяет разноименные заряды и является сторонней силой), появляется перпендикулярная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{L\perp}$ . Ее работа отлична от нуля за счет работы внешней силы  $\vec{F}_{\text{ВН}}$ . Следовательно, несмотря на то что суммарная сила Лоренца  $\vec{F}_L$ , равная  $\vec{F}_{L\parallel} + \vec{F}_{L\perp}$ , работы не совершает, работа составляющих ее сил отлична от нуля:

$$A_{\text{ВН}} \neq 0 \Rightarrow A_{L\perp} \neq 0, \quad A_L = A_{L\perp} + A_{L\parallel} = 0, \quad A_{L\parallel} = -A_{L\perp} \neq 0.$$

Таким образом, работа сторонней силы  $\vec{F}_{L\parallel}$  происходит за счет работы внешней силы  $\vec{F}_{\text{ВН}}$ , ускоряющей проводник.

При постоянной скорости движения проводника ( $v = \text{const}$ ) внешняя сила  $\vec{F}_{\text{ВН}}$  и соответственно  $\vec{F}_{L\perp}$  отсутствуют, и на свободные электроны в проводнике будут действовать только две равные по модулю и противоположные по направлению силы — сила Лоренца  $\vec{F}_{L\parallel}$  и кулоновская сила  $\vec{F}_K$ , поэтому разделение зарядов будет отсутствовать и работа  $\vec{F}_{L\parallel}$  обращается в ноль.

Во время ускорения проводника сумма сил  $\vec{F}_{L\perp}$ , действующих на свободные электроны, создает силу Ампера (в металле появляется индукционный ток), которая действует на проводник и препятствует его ускорению. При постоянной скорости движения сила Ампера не возникает, и проводник движется при отсутствии внешней силы.

**Случай 2.** Вектор  $\vec{B}$  изменяется со временем, а площадь  $S$  контура и угол  $\alpha$  остаются постоянными.

Опытным путем было доказано, что ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  может возникать и в неподвижном проводящем контуре (проводнике), находящемся в переменном во времени магнитном поле. В этом случае на свободные заряды в проводнике сила Лоренца не действует ( $v = 0 \Rightarrow F_L = |q|vB \sin \alpha = 0$ ), и для объяснения возникновения ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  Максвелл сформулировал следующее положение (постулат), которое называют **первым положением теории Максвелла**: *переменное во времени магнитное поле порождает в окружающем*

пространстве вихревое электрическое поле. Таким образом, Максвелл ввел новый вид поля.

В отличие от электростатического поля, линии вихревого электрического поля являются замкнутыми, они связаны с направлением вектора  $d\vec{B}/dt$  правилом левого буравчика и лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\vec{B}$  (см. рис. 4.18в). Силы этого поля являются сторонними, они совершают работу по разделению разноименных зарядов:

$$A_{\text{стор}} = \oint_{\Gamma} \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l}; \quad (4.38)$$

$$\varepsilon_i = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l}, \quad (4.39)$$

где  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  — вектор напряженности электрического поля, а контур  $\Gamma$  (воображаемая линия) располагается внутри проводника (проводящего контура).

Запишем уравнение, отражающее первое положение теории Максвелла. Для этого обобщим закон электромагнитной индукции Фарадея (4.37), то есть введем в уравнение закона предложенный Максвеллом источник сторонней силы — вихревое электрическое поле, которое, как уже было отмечено выше, возникает при наличии в пространстве переменного во времени магнитного поля.

Для установления взаимосвязи между электрическим и магнитным полями проводящий контур (проводник) не нужен; он является прибором, который обнаруживает наличие в окружающем пространстве вихревого электрического поля. Выберем в качестве контура  $\Gamma$  воображаемую замкнутую линию. Тогда, учитывая (4.37), можно записать:

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}, \quad (4.40)$$

где  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{вихр}} + \vec{E}_{\text{эл}}$  — суммарная напряженность вихревого электрического и электростатического полей.

В формуле (4.40) берется частная производная от вектора  $\vec{B}$  по времени  $t$ . При этом считается, что контур  $\Gamma$  и опирающаяся на него поверхность  $s$  являются неподвижными. Также при записи (4.40) было учтено, что циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}_{\text{эл}}$  электростатического поля по замкнутому контуру ( $\Gamma$ ) равна нулю.

Уравнение (4.40) представляет собой **первое уравнение Максвелла в интегральной форме**. Оно читается следующим образом: циркуляция вектора  $\vec{E}$  суммарного электрического поля по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность  $s$ , опирающуюся на контур. Его физический смысл состоит в следующем: *источником вихревого электрического поля является переменное магнитное поле* (в правой части находится источник того, что записано в левой части уравнения).

### 4.2.3. ПРАВИЛО ЛЕНЦА. ВЫВОД ЗАКОНА ЭМИ ИЗ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Наличие ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  в проводящем контуре сопротивлением  $R$  приводит к возникновению в нем индукционного тока, который можно рассчитать по закону Ома для полной цепи:

$$I_i = \varepsilon_i / R. \quad (4.41)$$

Направление же индукционного тока можно найти по **правилу Ленца**. Оно формулируется следующим образом: *индукционный ток в контуре возникает такого направления, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало любым изменениям магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.*

С правилом Ленца связан знак « $-$ » минус в формуле (4.37). Действительно, если магнитный поток  $\Phi$  через плоскость контура возрастает, то тогда  $d\Phi/dt > 0$  и согласно (4.37)  $\varepsilon_i < 0$ , то есть магнитный поток  $\Phi_i$ , создаваемый индукционным током, будет противоположен по знаку магнитному потоку  $\Phi$ . При убывании  $\Phi$   $d\Phi/dt < 0$ ,  $\varepsilon_i > 0$  и магнитные потоки  $\Phi_i$  и  $\Phi$  совпадают по знаку.

Рассмотрим пример определения направления индукционного тока по правилу Ленца (рис. 4.19а). Пусть проводящий контур находится во внешнем магнитном поле  $\vec{B}$ , которое возрастает со временем ( $dB/dt > 0$ ). Тогда магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий контур, увеличивается ( $\Delta\Phi > 0$ ), то есть возрастает число линий  $\vec{B}$ , пересекающих поверхность контура. Согласно правилу Ленца, индукционный ток препятствует нарастанию магнитного потока (увеличению числа линий  $\vec{B}$ ), поэтому он создает свое магнитное поле  $\vec{B}_i$ , линии которого направлены против линий  $\vec{B}$  внешнего магнитного поля. Зная направление линий  $\vec{B}_i$ , определяем по правилу правого буравчика направление индукционного тока.

Если же внешнее магнитное поле будет убывать со временем, то число линий  $\vec{B}$ , пронизывающих плоскость контура, будет также убывать ( $\Delta\Phi < 0$ ) и, следовательно, линии  $\vec{B}_i$  индукционного тока будут направлены в ту же сторону, что и линии  $\vec{B}$ , и индукционный ток будет течь против часовой стрелки.

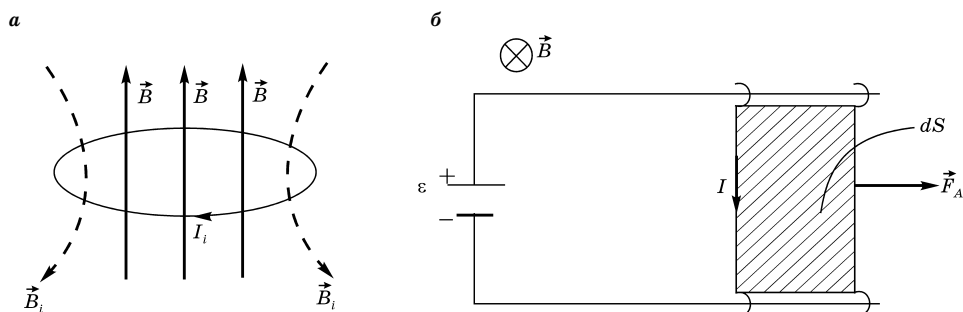


Рис. 4.19

Покажем, что экспериментально установленный Фарадеем закон ЭМИ является следствием закона сохранения энергии. Для этого рассмотрим замкнутый контур, в который входит источник тока с ЭДС  $\varepsilon$  и подвижный проводник-перемычка, скользящий без трения по направляющим стержням. Контур находится в магнитном поле, линии  $\vec{B}$  которого перпендикулярны к его плоскости (рис. 4.19б).

Согласно закону сохранения энергии, работа сил источника тока ( $dA_{\text{ист}} = \varepsilon Idt$ ) расходуется на нагревание проводников ( $dQ = I^2 R dt$ ) и на работу сил магнитного поля по перемещению проводника-перемычки с током ( $dA_{\text{магн}} = Id\Phi$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon Idt &= I^2 R dt + Id\Phi \Rightarrow \\ \Rightarrow IR &= \varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь  $R$  — сопротивление контура,  $d\Phi$  — элементарный магнитный поток, пронизывающий поверхность  $dS$ , описываемую проводником при его движении.

Согласно второму правилу Кирхгофа, в правой части полученной формулы (4.42) должна стоять алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутой цепи, то есть величина  $-d\Phi/dt$  представляет собой ЭДС, обусловленную изменением магнитного потока через поверхность контура, что и требовалось показать.

Тот факт, что экспериментально установленный закон ЭМИ можно вывести из закона сохранения энергии, не умаляет его значения в историческом развитии физики, так как этот закон обобщил большое количество экспериментальных фактов того времени, явился мощным стимулом к развитию и созданию новой области физики — физики электромагнитных явлений.

#### 4.2.4. ПРИМЕНЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ТЕХНИКЕ

Рассмотрим несколько примеров применения (проявления) явления электромагнитной индукции в технике.

**1. Определение модуля вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .** Для определения модуля  $\vec{B}$  в магнитное поле помещается катушка с площадью поперечного сечения  $S$ , содержащая  $N$  витков. В цепь катушки включается баллистический гальванометр, время измерения которого  $\Delta t_u$  значительно превышает время  $\Delta t$  поворота катушки в магнитном поле из состояния 1 в состояние 2 (рис. 4.20а, б). Поэтому такой прибор измеряет не силу индукционного тока, а заряд  $q$ , протекающий по цепи за время поворота  $\Delta t$ .

Найдем формулу для модуля  $B$ . Введем понятие **потокосцепления**  $\Psi$  — произведения числа витков  $N$  на магнитный поток, пронизывающий один виток, и перепишем с учетом этого формулу (4.37):

$$\Psi = N\Phi, \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (4.43)$$

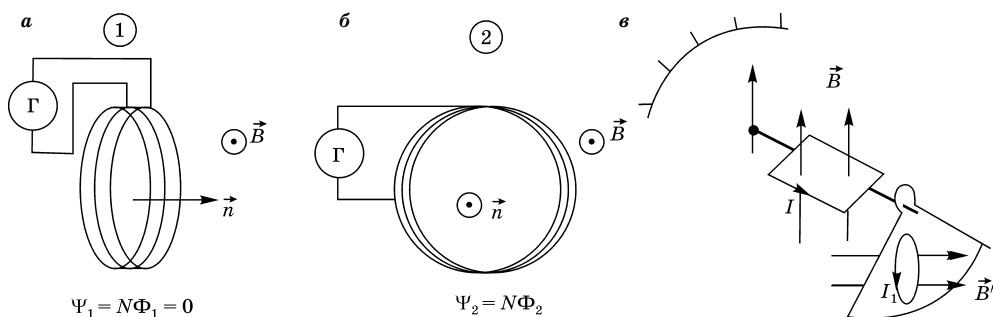


Рис. 4.20

Итак,

$$q = \int I_i dt = \int \frac{\varepsilon_i dt}{R_{\text{ц}}} dt = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \int \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \Delta\Psi, \quad q = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \Delta\Psi. \quad (4.44)$$

В нашем случае, с учетом однородности поля в пределах катушки малого сечения, можно записать:

$$q = -\frac{\Psi_2}{R_{\text{ц}}} = -\frac{NBS}{R_{\text{ц}}} \Rightarrow B = \frac{|q| R_{\text{ц}}}{NS},$$

где  $R_{\text{ц}}$  — сопротивление цепи.

Полученное выражение по известным параметрам  $N$ ,  $S$ ,  $R_{\text{ц}}$  и измеренного значения  $q$  позволяет найти значение модуля вектора  $\vec{B}$  в данной точке магнитного поля.

**2. Токи Фуко** — это индукционные токи, возникающие в массивных проводниках. Для таких проводников сопротивление  $R$  будет мало, и поэтому индукционные токи ( $I_i = \varepsilon_i/R$ ) достигают большой величины. Их можно использовать для нагрева и плавления металлических заготовок, получения особо чистых сплавов и соединений металлов. Для этого металлическую заготовку помещают в индукционную печь (соленоид, по которому пропускают переменный ток). Тогда согласно закону электромагнитной индукции внутри металла возникают индукционные токи, которые разогревают металл и могут его расплавить. Создавая в печи вакуум и применяя левитационный нагрев (в этом случае силы электромагнитного поля не только разогревают металл, но и удерживают его в подвешенном состоянии вне контакта с поверхностью камеры), получают особо чистые металлы и сплавы.

Токи Фуко могут приводить и к нежелательным явлениям — нагреву сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д. Поэтому сопротивление массивного проводника увеличивают, набирая его в виде отдельных пластин, и тем самым уменьшают нагрев проводников. Действительно, сила индукционных токов в отдельных пластинах существенно уменьшается по сравнению с силой тока, текущего по массивной пластине, и в соответствии с формулой  $Q = I^2 R t$  уменьшается и выделяемое в проводнике количество теплоты. Индукционные токи можно использовать, например, для демпфирования (успокоения) подвижных частей электроприборов (рис. 4.20в). При пропускании по рамке тока  $I$  она поворачивается в магнитном поле  $\vec{B}$  на определенный угол, и стрелка прибора перемещается по шкале прибора. Для

того чтобы она не совершала длительное время колебаний около какого-либо деления шкалы, на ось, к которой прикреплена стрелка, навешивают металлическую пластинку, которая при своем движении может пересекать линии  $\vec{B}'$  другого магнитного поля. Это приводит к переменному магнитному потоку через плоскость пластинки, и возникающий в ней индукционный ток  $I_i$ , согласно правилу Ленца, тормозит движение пластинки, тогда колебания стрелки прибора быстро затухают.

Нужно также отметить, что возникновение индукционного тока при пропускании по проводнику переменного тока приводит к перераспределению суммарного тока по сечению проводника, а именно он выталкивается на поверхность проводника.

Под **скин-эффектом** понимают явление *неравномерного распределения переменного тока по поперечному сечению проводника, повышение его плотности в поверхностном слое*. Это явление наиболее заметно в СВЧ-диапазоне (диапазон сверхвысоких частот  $\nu \sim 10^{10}$  Гц), в этом случае переменный ток течет только в слое малой толщины вблизи поверхности проводника, и поэтому металлические проводники для такого диапазона частот изготавливают в виде полых трубок.

Дадим краткое объяснение этому явлению. Рассмотрим текущий по проводнику переменный ток проводимости в тот момент времени, когда вектор напряженности  $\vec{E}$  внешнего электрического поля  $\vec{E}$  направлен вверх, а сила тока и соответственно вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  возрастают по модулю (направление вектора  $\vec{E}$  и вектора  $\vec{B}$  внутри проводника показаны на рис. 4.21а). Согласно первому уравнению Максвелла (см. раздел 4.2.2) переменное магнитное поле создает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле. Направление линий  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  этого поля внутри проводника показано на рис. 4.21а. Как видно из рисунка, около осевой линии проводника в его центральной части линии  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  направлены в противоположные стороны, а вблизи поверхности проводника — в одну сторону. В соответ-

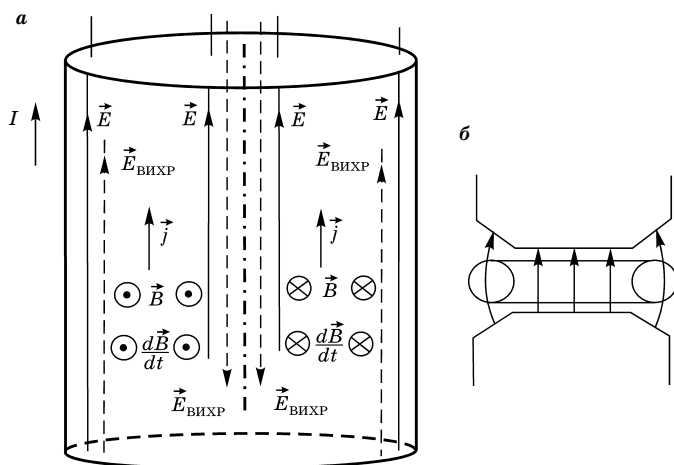


Рис. 4.21

ствии с законом Ома ( $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{вихр}})$ ) это приводит к ослаблению плотности тока в центральной части проводника и его возрастанию около поверхности проводника, происходит перераспределение тока по сечению проводника, наблюдается скин-эффект.

**3. Бетатрон** — ускоритель электронов. Между полюсами электромагнита, по которому пропускают переменный электрический ток частоты  $\nu = 100$  Гц, расположено полое кольцо, изготовленное из неферромагнитного материала (например из алюминия, в этом случае магнитное поле проникает внутрь кольца). Внутри него, в вакууме, движется ускоряемый пучок электронов (рис. 4.21б). Переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, силы которого совершают работу по ускорению электронов и, во-вторых, удерживает электроны при их ускорении на круговой орбите внутри кольца. За это время ( $\tau \sim 10^{-3}$  с) радиус орбиты

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

должен оставаться постоянным, поэтому увеличение модуля скорости  $\vec{v}$  частицы должно сопровождаться увеличением и модуля вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля. Следовательно, бетатрон работает в импульсном режиме: ускорение происходит в те промежутки времени, когда сила тока  $I$  и соответственно модуль вектора  $\vec{B}$  возрастают. Электроны ускоряются до энергий порядка  $(50 \div 60)$  МэВ.

Полюса электромагнита делают специальной усеченной формы, позволяющей выполнить условие, при котором числовое значение индукции магнитного поля  $B_{\text{орб}}$  на орбите бетатрона должно равняться половине усредненной по плоскости орбиты индукции  $\langle B \rangle : \langle B \rangle = 2 B_{\text{орб}}$ . Необходимость выполнения этого условия можно объяснить следующим образом. Из первого уравнения Максвелла (4.40), записанного для орбиты бетатрона, следует, что

$$2\pi r E_{\text{вихр}} = \left| \frac{d\langle B \rangle}{dt} \right| \pi r^2 \Rightarrow E_{\text{вихр}} = \frac{r}{2} \left| \frac{d\langle B \rangle}{dt} \right|,$$

в котором индукция магнитного поля, усредненного по плоскости орбиты, определяется по формуле

$$\langle B \rangle = \frac{1}{\pi r^2} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Напряженность вихревого электрического поля можно выразить, используя II закон Ньютона:

$$\vec{E}_{\text{вихр}} = \frac{1}{q} \vec{F}_{\text{вихр}} = \frac{1}{q} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{1}{q} \frac{d(qr\vec{B}_{\text{орб}})}{dt} = r \frac{d\vec{B}_{\text{орб}}}{dt} \Rightarrow E_{\text{вихр}} = r \left| \frac{dB_{\text{орб}}}{dt} \right|.$$

Сравнивая две формулы для  $\vec{E}_{\text{вихр}}$ , получаем записанное выше соотношение между  $\langle B \rangle$  и  $B_{\text{орб}}$ .

Бетатроны нашли применение для дефектоскопии металлических предметов: пропускание пучка электронов через металл позволяет обнаруживать внутри него различные полости.

## 4.2.5. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ

### 4.2.5.1. ИНДУКТИВНОСТЬ КОНТУРА. ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА

Возьмем контур, по которому протекает ток  $I$ . Он создает в окружающем пространстве магнитное поле, линии которого пронизывают плоскость контура (рис. 4.22). Возникающий при этом магнитный поток получил название **магнитного потока самоиндукции**  $\Phi_S$ , так как сам ток индуцирует этот магнитный поток. Под явлением **самоиндукции** можно понимать **возникновение магнитного потока самоиндукции при протекании по цепи тока**. В случае, когда контур содержит  $N$  витков, используют понятие потокосцепления  $\Psi_S$  самоиндукции ( $\Psi_S = N\Phi_S$ ). Оказывается, что  $\Psi_S$  и  $I$  прямо пропорциональны друг другу, и поэтому можно записать

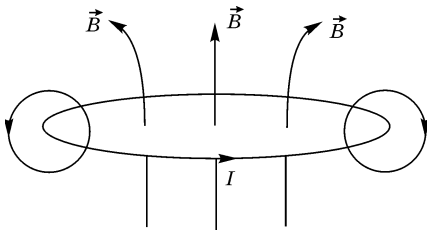


Рис. 4.22

$$\Psi_S = LI, \quad (4.45)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называют **индуктивностью контура**. Он описывает способность контура создавать потокосцепление самоиндукции и равен отношению  $\Psi_S$  и  $I$ :

$$L = \frac{\Psi_S}{I}. \quad (4.46)$$

Индуктивность контура зависит от геометрических размеров контура, а через относительную магнитную проницаемость  $\mu$  и от магнитных свойств окружающей среды. Для ферромагнитных сред  $\mu$  зависит от силы текущего по проводнику тока, что приводит к зависимости  $L$  для таких сред от  $I$ .

Приведем примеры расчета индуктивности для различных контуров.

#### Пример 1. Индуктивность длинного соленоида.

Рассмотрим соленоид, для которого его длина во много раз превышает диаметр витков. В этом случае для модуля вектора  $\vec{B}$  можно воспользоваться формулой (4.21) и, следовательно, для  $L$  получим

$$\begin{aligned} L &= \frac{\Psi_S}{I} = \frac{N\Phi_S}{I} = \frac{NBS \cos 0}{I} = \\ &= \frac{N\mu\mu_0 InS}{I} = \mu\mu_0 n^2 V, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где  $V$  — объем, занимаемый соленоидом.

#### Пример 2. Индуктивность единицы длины коаксиального кабеля. Магнитное поле коаксиального кабеля су-

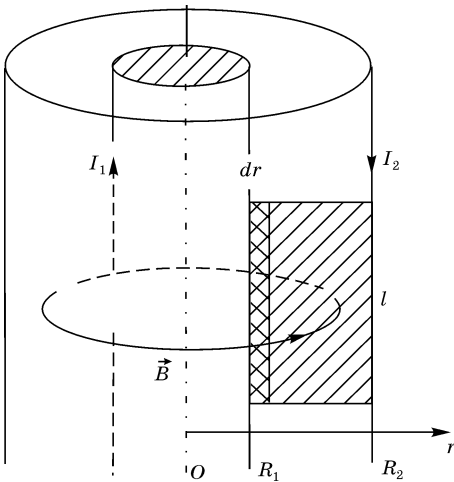


Рис. 4.23



ществует только между его цилиндрическими проводниками (формула (4.23)), и поэтому магнитный поток самоиндукции нужно рассчитывать через поверхность, которая располагается в пространстве между цилиндрами (рис. 4.23). Это будет прямоугольная поверхность длины  $l$ , через нее проходят линии  $\vec{B}$ , созданные током, текущим по внутреннему цилиндру. Так как поле является неоднородным и обладает осевой симметрией, то тогда для расчета интеграла можно выбрать элементарную площадку в виде полоски шириной  $dr$  и длиной  $l$ , что позволяет получить следующую формулу:

$$L = \frac{\Psi_S}{I} = \frac{1}{I} \int_S B dS \cos \alpha = \frac{1}{I} \int_S \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu \mu_0 l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu \mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.48)$$

#### 4.2.5.2.

#### ЭДС САМОИНДУКЦИИ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА

Дадим другое, эквивалентное определение **самоиндукции**, а именно *это явление возникновения ЭДС индукции в том контуре, по которому протекает переменный ток*. Возникающие при этом ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  и индукционный ток  $I_i$  называют ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_S$  и током самоиндукции  $I_S$ . Для них с учетом формул (4.37) и (4.46) можно записать

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Psi_S}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad I_S = \frac{\varepsilon_S}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}. \quad (4.49)$$

**Правило Ленца** для явления самоиндукции формулируется следующим образом: *ток самоиндукции препятствует любым изменениям основного тока, текущего по цепи*.

Из формулы (4.49) следует, что любые изменения тока в цепи тормозятся, и тем сильнее, чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление.

Можно сказать, что индуктивность цепи является мерой ее электрической инертности, подобно тому, как масса в механике является мерой инертности тела при его поступательном движении.

#### 4.2.5.3.

#### ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ ТОКА ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ РАЗМЫКАНИИ ЦЕПИ

Рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 4.24а. Она содержит источник постоянного тока с ЭДС  $\varepsilon$ , катушку индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и  $r$ , а также ключ  $K$ . Когда ключ находится в положении 1, по цепи протекает постоянный ток  $I_0 = \varepsilon/R$ , а в катушке сосредоточена энергия в виде энергии  $W_M$  магнитного поля. В момент времени  $t = 0$  ключ  $K$  перебрасывают в положение 2, цепь размыкается, и ток в ней начинает постепенно убывать за счет возникающего в катушке явления самоиндукции. При этом запасенная в катушке энергия магнитного поля расходуется на поддержание убывающего тока и на нагревание проводников.

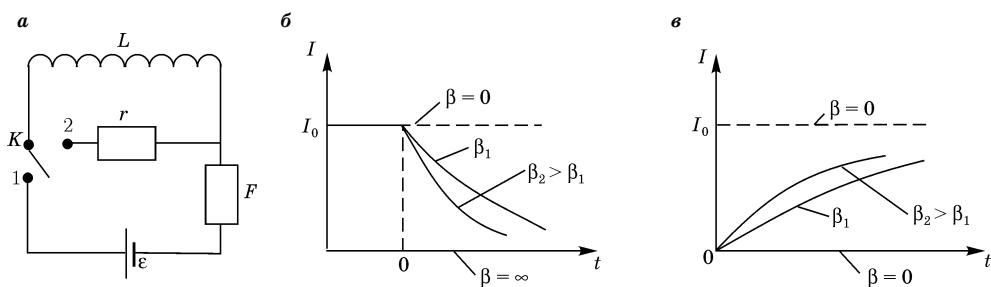


Рис. 4.24

Отметим, что размыкание электрической цепи означает, что в нее вводят бесконечно большое сопротивление  $r$  ( $r \rightarrow \infty$ ), и поэтому  $r \gg R$ . Цепь считается разомкнутой, если сила тока в ней достигает значений порядка  $\sim 1$  мкА, соответствующих случайным значениям силы тока; они связаны с тепловым движением свободных электронов в металле.

Выведем формулу для зависимости силы тока от времени при размыкании цепи. Для этого запишем закон Ома для полной цепи:

$$Ir = \mathcal{E}_S, \quad -L \frac{dI}{dt} = Ir, \quad \frac{dI}{I} = -\beta dt,$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\beta \int_0^t dt, \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\beta t,$$

$$I = I_0 e^{-\beta t}, \quad \beta = r/L. \quad (4.50)$$

На рис. 4.24б приведены построенные по уравнению (4.50) зависимости силы тока  $I$  от времени  $t$  при различных значениях параметра  $\beta$  — от нуля ( $L \rightarrow \infty$ , соответствует отсутствию убывания тока в цепи) до бесконечности ( $L \rightarrow 0$ , ток мгновенно убывает до нуля). Из формулы (4.50) следует, что чем больше  $\beta$ , то есть чем больше  $r$  или меньше  $L$ , тем быстрее убывает ток в цепи.

Рассмотрим зависимость ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_S$  от времени  $t$  при размыкании цепи. Для этого подставим формулу (4.50) для силы тока в выражение (4.49):

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d}{dt} (I_0 e^{-\beta t}) = -LI_0 \left( -\frac{1}{\beta} \right) e^{-\beta t} = r I_0 e^{-\beta t} = \mathcal{E} \frac{r}{R} e^{-\beta t},$$

$$\mathcal{E}_S(0) = \mathcal{E} \frac{r}{R} \gg \mathcal{E}.$$

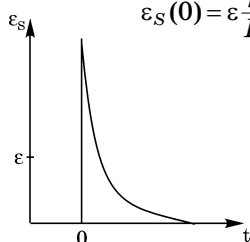


Рис. 4.25

Итак, из-за того, что  $r \gg R$ , в начальные моменты времени при размыкании цепи наблюдается скачок ЭДС самоиндукции, и она может превышать постоянную, действующую в цепи ЭДС во много раз (рис. 4.25). Это может привести к пробое диэлектриков и выходу из строя электрооборудования. Поэтому электрические цепи, содержащие большую индуктивность, необходи-

мо размыкать так, чтобы сопротивление  $r$  увеличивалось не скачком, а постепенно.

С энергетической точки зрения скачок  $\varepsilon_s$  связан с тем, что при быстром размыкании цепи, содержащей большую индуктивность, большая энергия магнитного поля, запасенная в катушке, должна быстро израсходоваться, это и приводит к нежелательным последствиям — плавлению контактов, проскакиванию искр и пробоем диэлектриков во время размыкания цепи.

#### 4.2.5.4. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Любой контур индуктивности  $L$ , по которому протекает ток  $I$ , обладает энергией в виде энергии магнитного поля  $W_m$ . Выведем для нее формулу исходя из закона сохранения энергии — при размыкании цепи энергия магнитного поля катушки расходуется на нагревание проводников:

$$W_m = Q = \int_0^{\infty} I^2 r dt = I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2\beta t} dt = I_0^2 r \left( -\frac{1}{2\beta} \right) e^{-2\beta t} \Big|_0^{\infty} = \frac{r}{2\beta} I_0^2 = \frac{LI_0^2}{2},$$

$$W_m = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (4.51)$$

Введем объемную плотность энергии магнитного поля  $w_m$  как энергию магнитного поля, заключенную в единице объема пространства:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (4.52)$$

Из формулы (4.52) видно, что она зависит от модуля вектора магнитной индукции и от магнитных свойств окружающей среды, то есть от  $\mu$ . Докажем справедливость формулы (4.52), с этой целью рассмотрим однородное магнитное поле длинного соленоида индуктивности  $L$  (см. формулу (4.47)), по которому протекает ток силой  $I$  (см. формулу (4.21)):

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{W_m}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V}{2V} \left( \frac{B}{\mu\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

что и требовалось показать.

В случае неоднородного магнитного поля его энергию  $W_m$ , заключенную в конечном объеме  $V$ , можно определить по формуле

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2(x, y, z)}{2\mu\mu_0} dV. \quad (4.53)$$

#### 4.2.5.5. ЗАВИСИМОСТЬ СИЛЫ ТОКА ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ЗАМЫКАНИИ ЦЕПИ

В цепи, приведенной на рис. 4.24а, ключ  $K$  сначала находится в положении 2, тока в цепи нет ( $I = 0$ ). В момент времени  $t = 0$  ключ перебрасывают в положение 1. Ток в цепи начинает постепенно нарастать из-за возникающего в катушке явления самоиндукции. Зависимость силы тока  $I$  от времени  $t$  можно найти, используя закон Ома для полной цепи:

$$\varepsilon + \varepsilon_S = IR \Rightarrow I = I_0(1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = R/L. \quad (4.54)$$

На рис. 4.24в приведены графики зависимости  $I$  от  $t$ , полученные из уравнения (4.54) для разных параметров  $\beta$  — от нуля ( $L \rightarrow \infty$ , ток в цепи не нарастает) до бесконечности ( $L \rightarrow 0$ , ток в цепи мгновенно достигает значения  $I = I_0$ ). Видно, что чем больше  $\beta$ , т. е. чем больше  $R$  и меньше  $L$ , тем быстрее нарастает ток в цепи.

Отметим, что с энергетической точки зрения постепенное нарастание тока при замыкании цепи, содержащей катушку большой индуктивности, связано с необходимостью накопления энергии магнитного поля в катушке в начальные моменты времени. При этом скачка ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_S$  не возникает, так как в катушке до этого не была запасена энергия магнитного поля.

#### 4.2.6. ЯВЛЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ КОНТУРОВ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ

Пусть в пространстве находятся два проводящих контура 1 и 2 (рис. 4.26а). Если пропустить по контуру 1 ток  $I_1$ , то часть линий вектора магнитной индукции  $\vec{B}_1$ , созданного током  $I_1$  магнитного поля, будет пересекать плоскость второго контура, вследствие чего возникает потокоцепление  $\Psi_{21}$  взаимной индукции, которое прямо пропорционально силе тока  $I_1$ :

$$\Psi_{21} = L_{21}I_1. \quad (4.55)$$

Если пропустить ток  $I_2$  по второму контуру, то аналогичные рассуждения приводят к следующей формуле:

$$\Psi_{12} = L_{12}I_2. \quad (4.56)$$

Можно показать, что в случае неферромагнитной среды входящие в формулы (4.55) и (4.56) коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  будут одинаковыми, и они получили название **взаимной индуктивности контуров 1 и 2**:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}. \quad (4.57)$$

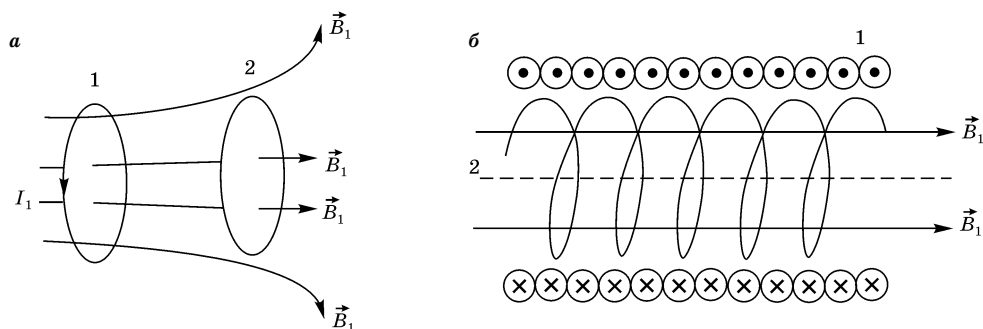


Рис. 4.26

Взаимная индуктивность  $L_{12}$  ( $L_{21}$ ) зависит от расположения контуров, их геометрии и магнитных свойств окружающей среды, то есть от  $\mu$ .

**Явление взаимной индукции** — это явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре при протекании переменного тока в другом контуре, или возникновения магнитного потока взаимной индукции при протекании тока в одном из контуров. Используя закон Фарадея (4.37) и формулы (4.55) и (4.56), можно записать:

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{i1} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (4.58)$$

На явлении взаимной индукции основан принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока.

В заключение оценим взаимную индуктивность двух коаксиальных соленоидов — соленоидов с общей осью (рис. 4.26б). Пусть площади их поперечного сечения совпадают ( $S_1 = S_2 = S$ ), совпадают также их длины ( $l_1 = l_2 = l$ ), а разными будут числа витков на единицу длины  $n_1$  и  $n_2$ . Для расчета  $L_{21}$  пропустим ток  $I_1$  по первому соленоиду и воспользуемся формулой (4.57):

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 B_1 S}{I_1} = \frac{N_2 \mu \mu_0 I_1 S n_1}{I_1} = \mu \mu_0 n_1 n_2 V = \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.59)$$

где  $L_1, L_2$  — индуктивности коаксиальных соленоидов.

#### 4.2.7. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Основная идея теории Максвелла заключалась во взаимосвязи электрических и магнитных полей: если переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве электрическое поле (первое положение теории Максвелла), то, в свою очередь, и переменное электрическое поле должно создавать в окружающем пространстве магнитное поле. В связи с этим Максвелл сформулировал **второе положение своей теории**, а именно переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Следовательно, в теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (формула (4.18)) к источникам магнитного поля в виде токов проводимости добавляется еще один источник, который Максвелл назвал током смещения:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu \mu_0 \left( \sum_i I_{\text{пр}i} + I_{\text{см}} \right) = \mu \mu_0 \int_S (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) dS. \quad (4.60)$$

Формула (4.60) получила название закона полного тока. В нее введены плотности тока проводимости  $\vec{j}_{\text{пр}}$  и смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ ; интеграл берется по поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $\Gamma$ .

Под **током смещения**  $I_{\text{см}}$  понимают скалярную физическую величину, измеряемую в амперах, характеризующую способность электрического поля создавать магнитное поле и пропорциональную скорости изменения во времени напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

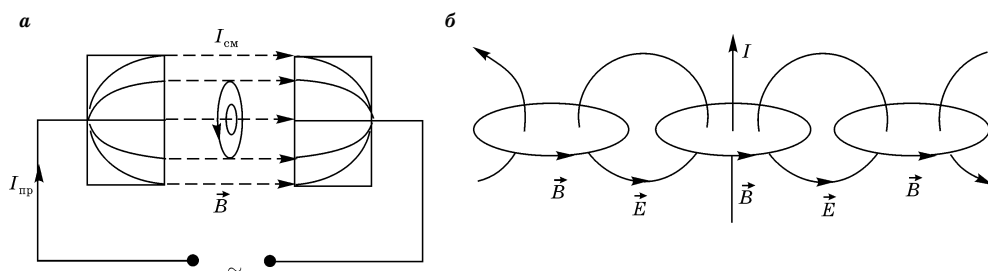


Рис. 4.27

Установим формулу связи плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  с напряженностью  $\vec{E}$  переменного электрического поля. Для этого рассмотрим электрическую цепь, содержащую плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  (рис. 4.27а). Протекание переменного тока в такой цепи сопровождается плавным переходом на границе пластин конденсатора тока проводимости в ток смещения, который существует в пространстве внутри конденсатора. Записывая условия непрерывности на границе обкладок, получим

$$j_{\text{см}} = j_{\text{пр}} = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dq}{dt} = : E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{S \epsilon \epsilon_0} =: \epsilon \epsilon_0 \frac{dE}{dt},$$

$$I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}, \quad \vec{j}_{\text{см}} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.61)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора;  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля внутри конденсатора;  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками.

В формуле (4.61) берется частная производная от вектора  $\vec{E}$  по времени  $t$ .

Ток проводимости (направленное движение заряженных частиц) и ток смещения (связан с переменным электрическим полем) имеют разную физическую природу, но сходны по способности создавать магнитное поле. Например, магнитное поле внутри конденсатора можно рассматривать как магнитное поле тока проводимости, текущего по проводнику конечных размеров с плотностью тока  $\vec{j}_{\text{пр}}$ , равной плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ . Это позволяет применять формулы магнитостатики для расчета магнитного поля тока смещения. При этом линии вектора  $\vec{B}$  тока смещения будут такими же, как и для тока проводимости (рис. 4.27а). В случае конденсатора с круглыми пластинами для расчета модуля вектора  $\vec{B}$  внутри него можно использовать теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для цилиндрического проводника конечных размеров и соответственно записать

$$B = \frac{1}{2} \mu \mu_0 j_{\text{пр}} r \Rightarrow j_{\text{пр}} = j_{\text{см}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu \mu_0 j_{\text{см}} r = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 r \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (4.62)$$

где  $r$  — расстояние от осевой линии внутри конденсатора до рассматриваемой точки пространства.

Введение понятия тока смещения позволяет по-другому объяснить отсутствие постоянного тока проводимости в электрической цепи, содержащей конденсатор. В этом случае в такой цепи не возникает переменного электрического

го поля между обкладками конденсатора, поэтому тока смещения не будет и линии тока проводимости на обкладках конденсатора прерываются.

Подставляя формулу (4.61) в выражение (4.60), получим **второе уравнение Максвелла в интегральной форме** следующего вида:

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \left( \sum_i I_{\text{пр}i} + I_{\text{см}} \right) = \mu\mu_0 \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (4.63)$$

Уравнение (4.63) читается следующим образом: циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна сумме токов проводимости и смещения, охватываемых контуром  $\Gamma$ , умноженной на коэффициент  $(\mu\mu_0)$ .

**Физический смысл уравнения (4.63)** заключается в том, что источниками магнитного поля являются токи проводимости, микротоки и переменное электрическое поле.

#### 4.2.8. ВСЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В основе теории Максвелла, позволяющей описывать электрические и магнитные явления в любой среде (и в вакууме в частности), лежат два положения о взаимосвязи электрических и магнитных полей. Согласно этим положениям переменное во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле и переменное во времени электрическое поле создает в пространстве магнитное поле.

Следствием этих положений теории Максвелла являются первое и второе уравнения — они обобщают закон электромагнитной индукции Фарадея (4.37) и теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (4.18).

Третье и четвертое уравнения Максвелла представляют собой теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$  электростатического и вектора  $\vec{B}$  магнитного полей. Физический смысл этих уравнений состоит в следующем: источником электростатического поля являются свободные и связанные заряды; в природе отсутствуют магнитные заряды, то есть линии вектора  $\vec{B}$  магнитного поля являются замкнутыми.

Пятое и шестое уравнения Максвелла вводят векторы электрического смещения  $\vec{D}$  и напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля, которые, в отличие от истинных векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , являются вспомогательными, вводимыми для удобства описания полей в присутствии вещества.

Седьмое уравнение Максвелла представляет собой закон Ома в дифференциальной форме, где  $\sigma$  — удельная проводимость вещества.

$$\begin{aligned} 1. \oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \\ 2. \oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{l} &= \mu\mu_0 \left( \sum_i I_{\text{пр}i} + I_{\text{см}} \right) = \mu\mu_0 \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \\ 3. \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} q_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
4. \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \\
5. \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \\
6. \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}. \\
7. \vec{j} &= \sigma \vec{E}.
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

Записанные выше семь уравнений справедливы для однородных изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред, для которых формулы связи, выражаемые пятым, шестым и седьмым уравнениями, являются достаточно простыми, так как параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  — постоянные числа.

В общем случае эти формулы связи усложняются и называются материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}). \tag{4.65}$$

В общем случае для произвольной среды, уравнения Максвелла примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
1. \oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \\
2. \oint_{(\Gamma)} \vec{H} d\vec{l} &= \left( \sum_i I_{\text{пр}i} + I_{\text{см}} \right) = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \\
3. \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \sum q_i. \\
4. \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \\
5. \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}). \\
6. \vec{B} &= \vec{B}(\vec{H}). \\
7. \vec{j} &= \vec{j}(\vec{E}).
\end{aligned}
\tag{4.66}$$

Полная система уравнений Максвелла позволяет определить основные характеристики электромагнитного поля ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ) в каждой точке пространства, если известны источники поля — распределение токов проводимости  $\vec{j}_{\text{пр}}$  и электрических зарядов  $q_i$  как функции координат и времени.

Наиболее удобной является полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}
1. \text{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \\
2. \text{rot} \vec{H} &= \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \\
3. \text{div} \vec{D} &= \rho. \\
4. \text{div} \vec{B} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.67}$$



$$\begin{aligned}
 5. \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}). \\
 6. \vec{B} &= \vec{B}(\vec{H}). \\
 7. \vec{j} &= \vec{j}(\vec{E}).
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

Она справедлива для малой окрестности любой точки пространства и при задании начальных и граничных условий позволяет решать любые задачи классической макроскопической электродинамики. Полная система уравнений Максвелла играет в электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике.

Следствием теории Максвелла является существование электромагнитного поля в виде **электромагнитных волн (ЭМВ)**. В основе образования таких волн лежат взаимные превращения электрического и магнитного полей: переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве переменное электрическое поле, и это изменяющееся электрическое поле также создает в окружающем пространстве переменное магнитное поле и т. д. Процесс образования переменных электрического и магнитного полей охватывает все новые и новые области пространства (рис. 4.27б, здесь источником ЭМВ является текущий по проводнику переменный электрический ток  $I$ ).

#### 4.2.9. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В соответствии с первым постулатом специальной теории относительности уравнения Максвелла должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. При этом одно и то же электромагнитное поле по-разному проявляет себя в разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга. Наглядным подтверждением этого является пример взаимодействия проводника с током и точечного заряда. Так, выбором ИСО такое взаимодействие можно представить как только магнитное, либо как только электрическое, либо как единое электромагнитное взаимодействие.

Рассмотрим этот пример подробнее. Пусть в ИСО  $K$  находятся точечный положительный заряд  $Q$  и неподвижный прямой металлический проводник, по которому течет ток (рис. 4.28а). Скорость этого заряда параллельна скорости направленного движения свободных электронов и равна ей по модулю.

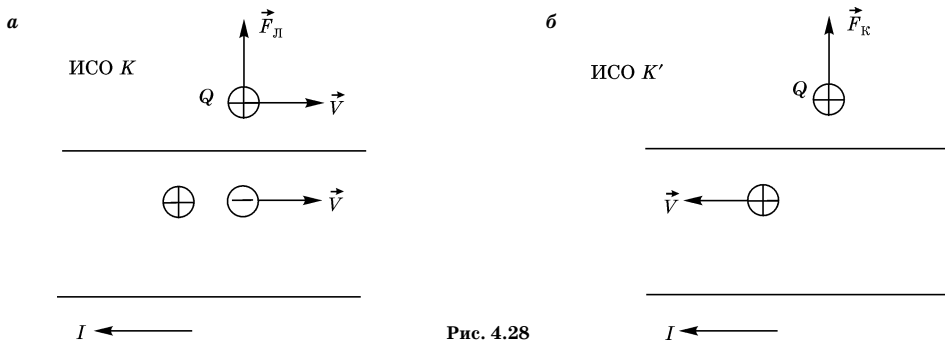


Рис. 4.28

Проводник является электронейтральным, то есть сумма объемных плотностей зарядов положительных ионов  $\rho_+$  и свободных электронов  $\rho_-$  равна нулю, и

$$\rho_+ = \frac{q_+}{Sl_+}, \quad \rho_- = \frac{q_-}{Sl_-},$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения проводника;  $l_+$  и  $l_-$  — длины отрезков проводника для положительных и отрицательных зарядов.

На заряд  $Q$  в ИСО  $K$  со стороны магнитного поля тока будет действовать сила Лоренца (рис. 4.28а), электрического взаимодействия между ними нет.

Перейдем теперь в ИСО  $K'$ , в которой заряд  $Q$  будет неподвижным, а проводник вместе с положительными ионами будет двигаться со скоростью  $V$ . Магнитное поле тока на неподвижный заряд  $Q$  не действует, так как сила Лоренца  $F_{\text{Л}}$  будет равна нулю. Но в связи с тем, что проводник перестает быть электронейтральным (его заряд будет положительным), на заряд  $Q$  будет действовать кулоновская сила отталкивания со стороны проводника и электромагнитное взаимодействие будет представлено в такой ИСО лишь как электрическое взаимодействие.

Действительно, используя инвариантность заряда ( $q = q'$ ) и поперечных размеров проводника ( $S = S'$ ), а также сокращения продольных размеров тел

при их движении ( $l' = l\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ,  $l'_+ < l_+$ ,  $l'_- > l_-$ ), получим

$$\begin{aligned} \rho'_+ &= \frac{q'_+}{S'l'_+} = \frac{q_+}{Sl_+\sqrt{1 - V^2/c^2}} > \rho_+, \\ |\rho'_-| &= \frac{|q'_-|}{S'l'_-} = \frac{|q_-|}{Sl_-\sqrt{1 - V^2/c^2}} < |\rho_-|, \\ (\rho'_+ + \rho'_-) &> 0, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

В произвольной ИСО взаимодействие заряда  $Q$  и проводника с током будет электромагнитным, то есть на заряд одновременно будут действовать и сила Кулона, и сила Лоренца.

Итак, существует единое электромагнитное взаимодействие, единое электромагнитное поле, частными проявлениями которого могут быть как электростатическое поле неподвижных зарядов, так и магнитное поле постоянных токов проводимости.

### 4.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

#### 4.3.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ, ВВОДИМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ВЕЩЕСТВА

1.  $\vec{B}, \vec{B}', I'$ . Все вещества являются магнетиками — при помещении их во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  они создают свое магнитное поле  $\vec{B}'$ , то есть намагничиваются:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (4.68)$$

Магнитное поле вещества связано с микротоками  $I'$ , обусловленными движением электронов в атомах, ионах и молекулах.

2. Для однородных и изотропных магнетиков магнитная проницаемость вещества  $\mu$  является скалярной величиной, показывая, во сколько раз индукция магнитного поля при наличии среды отличается от индукции магнитного поля в вакууме:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (4.69)$$

3.  $\vec{J}$ . Вектор намагничивания  $\vec{J}$  описывает способность вещества создавать свое магнитное поле  $\vec{B}'$  и равен векторной сумме магнитных моментов  $\vec{p}_{\text{м.атт}}$  атомов, которые находятся в единице объема вещества:

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{\text{м.атт}i}}{V}. \quad (4.70)$$

Магнитный момент атома складывается из суммы магнитных моментов  $\vec{p}_{\text{м.эл.орб}}$  электронов, связанных с их орбитальным движением, спиновых магнитных моментов  $\vec{p}_{\text{м.эл.спин}}$  электронов и спинового магнитного момента ядра (из-за большой массы ядра этим моментом обычно пренебрегают):

$$\vec{p}_{\text{м.ат}} = \sum_{v=1}^z \vec{p}_{\text{м.эл.орб}} + \sum_{v=1}^z \vec{p}_{\text{м.эл.спин}}. \quad (4.71)$$

Согласно теории Бора, орбитальные магнитные моменты электронов связаны с движением электронов в атоме по круговым орбитам, что приводит к созданию кольцевого тока, который и обладает магнитным моментом. Спиновые магнитные моменты электрона обусловлены тем, что неотъемлемыми свойствами частицы является не только ее масса, заряд, но и спиновый магнитный момент. Его наличие связывалось с вращением частицы вокруг своей оси, но впоследствии выяснилось, что это представление неверно, хотя понятие спинового момента осталось.

Качественно возникновение собственного магнитного поля  $\vec{B}'$  магнетика можно пояснить на основе гипотезы Ампера о существовании внутри молекул молекулярных токов (микротоков). Их ориентация во внешнем магнитном поле

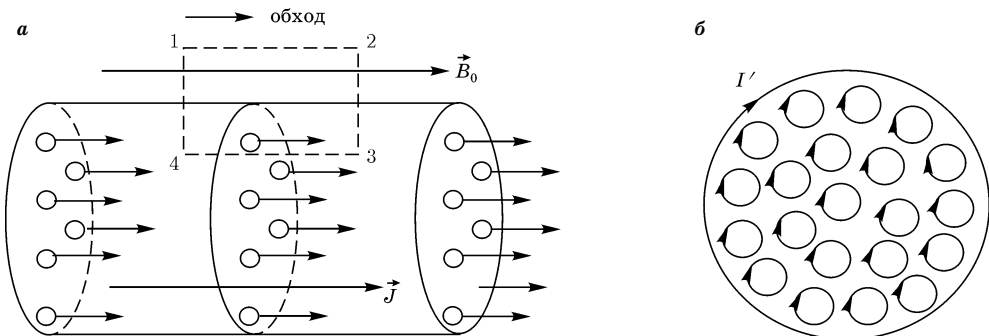


Рис. 4.29

и создает не равное нулю магнитное поле  $\vec{B}'$  вещества и соответственно  $\vec{J}$  (рис. 4.29а, в однородном магнитном поле  $\vec{B}_0$  находится однородный длинный стержень в виде цилиндра).

Если  $\vec{B}_0 = 0$ , то тепловое движение разбрасывает молекулярные токи хаотично по всем направлениям, и поэтому  $\vec{B}' = 0, \vec{J} = 0$ . Во внешнем магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов микротоков вдоль поля (магнитные моменты микротоков будут параллельны вектору  $\vec{B}_0$ ). За счет такой ориентации происходит компенсация микротоков внутри стержня, такая компенсация отсутствует на поверхности цилиндра (рис. 4.29б). Вследствие этого магнитное поле цилиндра будет подобно магнитному полю соленоида  $B' = B_{\text{сол}} = \mu_0 I'_{\text{витка}} N / l = \mu_0 I' / l$ , где  $I'$  это суммарный поверхностный ток, текущий по поверхности цилиндра на длине  $l$ .

Если учесть, что сумма магнитных моментов атомов в этом случае будет равна магнитному моменту поверхностного тока  $I'$ , текущего на длине  $l$  цилиндра, то тогда для модуля вектора  $\vec{J}$  можно записать

$$J = \frac{p_{\text{тока}}}{V} = \frac{I'S}{Sl} = \frac{I'}{l}. \quad (4.72)$$

4. Вектор напряженности  $\vec{H}$  вводится по формуле

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (4.73)$$

В случае вакуума  $\vec{J} = 0, \vec{B} = \vec{B}_0$  и поэтому

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (4.74)$$

Для однородных и изотропных магнетиков из опыта известна следующая формула связи векторов  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (4.75)$$

где  $\chi$  — **магнитная восприимчивость вещества**.

Для векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  в случае однородного и изотропного магнетика с учетом формул (4.65)–(4.67) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}, \quad \vec{B} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H} = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0, \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi. \end{aligned} \quad (4.76)$$

#### 4.3.2. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА НАМАГНИЧЕННОСТИ $\vec{J}$ И ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{H}$ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Найдем циркуляцию вектора  $\vec{J}$  для случая, приведенного на рис. 4.29. Для этого возьмем контур, который располагается в плоскости чертежа (рис. 4.29а). Из рисунка видно, что плоскость контура 1–2–3–4–1 пересекает суммарный микроток  $I'$  (он в плоскости контура направлен перпендику-

лярно, от нас). Принимая во внимание тот факт, что вектор  $\vec{J}$  отличен от нуля только внутри цилиндра, и учитывая формулу (4.72), получим

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l} = \int_1^2 J dl \cos 0^\circ = J l = \frac{I'}{l} l = I'.$$

Можно показать, что записанная формула справедлива и в общем случае

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l} = I', \text{ rot } \vec{J} = [\vec{\nabla} \times \vec{J}] = j'. \quad (4.77)$$

Из выражения (4.77) следует, что **источником вектора  $\vec{J}$  являются микротоки.**

На основе формул (4.17), (4.73) и (4.77) для циркуляции вектора  $\vec{H}$  запишем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} &= \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} + \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l} = \\ &= (I_{\text{пр}} + I') - I' = I_{\text{пр}}, \text{ rot } \vec{H} = [\vec{\nabla} \times \vec{H}] = j_{\text{пр}}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

т. е. **источником вектора  $\vec{H}$  являются токи проводимости.**

Для упрощения расчета электрического поля в присутствии диэлектриков был введен вектор электрической индукции  $\vec{D}$ . По аналогии, при расчете магнитного поля в присутствии магнетика удобно введение вектора  $\vec{H}$ . Действительно, формулы (4.17) и (4.19) не позволяют непосредственно рассчитывать вектор  $\vec{B}$ , так как входящие в эти формулы микротоки зависят и от вектора  $\vec{B}$ .

#### \*4.3.3. ПОВЕДЕНИЕ ЛИНИЙ ВЕКТОРОВ $\vec{B}$ И $\vec{H}$ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ МАГНЕТИКОВ

Выясним, как ведут себя линии векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух магнетиков. Для этого найдем условия, которым удовлетворяют нормальные ( $B_n$ ,  $H_n$ ) и тангенциальные ( $B_\tau$ ,  $H_\tau$ ) составляющие этих векторов на поверхности раздела магнетиков.

Будем считать, что на границе раздела нет макротоков (токов проводимости  $I_{\text{пр}} = 0$ ). Рассчитаем поток вектора  $\vec{B}$  через цилиндрическую замкнутую

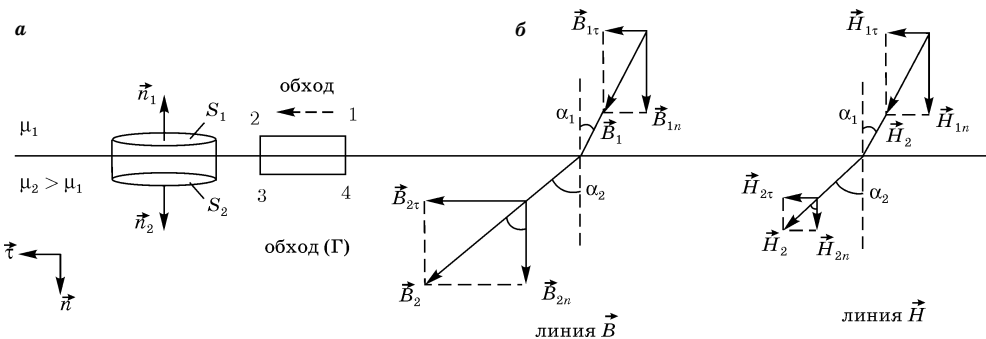


Рис. 4.30

поверхность, расположенную на границе раздела (основания цилиндра площади  $S_1 = S_2 = S$  параллельны поверхности раздела, рис. 4.30а) и циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по прямоугольному замкнутому контуру (две стороны контура длиной  $l$  параллельны поверхности раздела, рис. 4.30а). Из формул (4.26) и (4.78) следует, что

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = -B_{1n}S + B_{2n}S + \Phi_{\text{бок}} = 0, \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau}l - H_{2\tau}l + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Если высоту цилиндра и перпендикулярные к поверхности раздела стороны контура  $\Gamma$  устремить к нулю ( $\Phi_{\text{бок}} = 0$ ,  $\int_{S_{\text{бок}}} \vec{H} d\vec{l} = 0$ ), то можно получить

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (4.79)$$

Используя формулу (4.78), запишем

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.80)$$

Из полученных выражений следует, что на границе раздела двух магнетиков линии вектора  $\vec{B}$  не прерываются (нормальные составляющие вектора  $\vec{B}$  непрерывны, а тангенциальные составляющие терпят разрыв), а линии вектора  $\vec{H}$  терпят разрыв (тангенциальные составляющие вектора  $\vec{H}$  непрерывны, а нормальные составляющие терпят разрыв). Следует отметить, что на границе раздела двух магнетиков линии векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  ведут себя аналогично линиям векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на границе раздела двух диэлектриков ( $\vec{B} \rightarrow \vec{D}$  и  $\vec{H} \rightarrow \vec{E}$ ).

Рассмотрим, как изменяется угол наклона линий векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  при переходе через границу раздела двух магнетиков (рис. 4.30б). Используя формулы (4.79) и (4.80), получим

$$\text{линии } \vec{B}: \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{B_{1\tau} B_{2n}}{B_{1n} B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \text{линии } \vec{H}: \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{H_{1\tau} H_{2n}}{H_{1n} H_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.81)$$

Из выражения (4.81) видно, что при переходе в магнетик с большей магнитной проницаемостью линии  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  отклоняются, увеличивая угол  $\alpha$ .

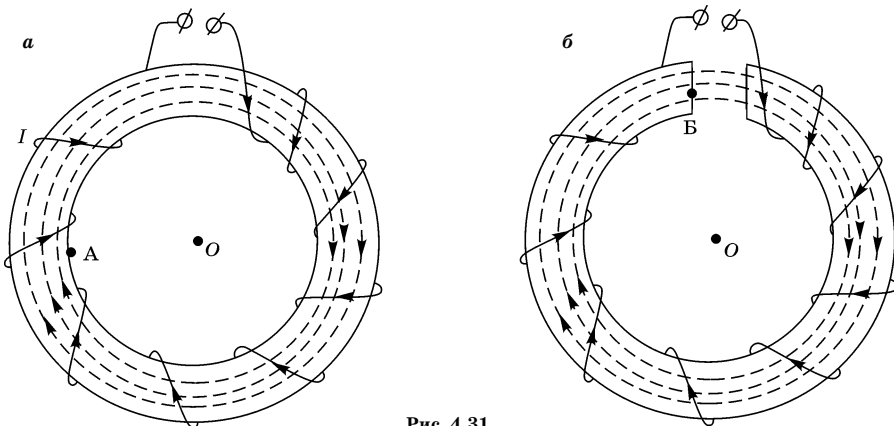


Рис. 4.31

Приведем примеры расчета магнитного поля в присутствии вещества.

**Пример 1.** Ток  $I$ , текущий по тороиду, создает внутри него магнитное поле  $B_0 = \mu_1 \mu_0 I$  ( $\mu_1 = 1$ , среда — воздух). Внутри тороида находится железный сердечник (рис. 4.31а, магнитная проницаемость железа  $\mu_2 = \mu \sim (10^3 \div 10^4) \gg 1$ ).

Рассмотрим поведение линий векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела воздух (среда 1, характеристики магнитного поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{H}_1$ ) — железо (среда 2, характеристики магнитного поля  $\vec{B}_2$  и  $\vec{H}_2$ ) в точке А, расположенной на боковой поверхности сердечника (рис. 4.31а). Запишем соотношения, связывающие составляющие векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела в этой точке.

Учтем, что векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  в каждой точке боковой поверхности сердечника параллельны ей и поэтому остаются отличными от нуля только их тангенциальные составляющие (рис. 4.31а).

**Точка А:**

$$B_{1n} = B_{2n} = 0, \quad \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu, \quad B_{2\tau} = \mu B_{1\tau} = \mu B_0 = \mu \mu_0 I n,$$

$$H_{1n} = H_{2n} = 0, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau} = \frac{B_0}{\mu_0} = I n.$$

Из полученных формул следует, что тангенциальная составляющая вектора  $\vec{B}$  терпит разрыв (модуль вектора  $\vec{B}$  возрастает в  $\mu$  раз при переходе в сердечник, линии  $\vec{B}$  сгущаются), а тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  при таком переходе не изменяется (модуль вектора  $\vec{H}$  остается неизменным, расположение линий  $\vec{H}$  не изменяется).

**Пример 2.** Внутри тороида находится железный сердечник с небольшим воздушным зазором (рис. 4.31б). Оказывается, что наличие зазора приводит к существенному уменьшению значения модуля вектора  $\vec{B}$  как внутри сердечника, так и в его зазоре.

Рассмотрим соотношения, связывающие составляющие векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела в точке Б:

**Точка Б:**

$$B_{1\tau} = B_{2\tau} = 0, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad B_1 = B_2,$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} = 0, \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu, \quad H_{1n} = \mu H_{2n}, \quad H_1 = \mu H_2.$$

Из полученных формул следует, что на поверхности сердечника внутри зазора (точка Б) тангенциальные составляющие векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  равны нулю; нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  не изменяется при переходе из сердечника в вакуум, а нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  терпит разрыв. Это означает, что при таком переходе линии  $\vec{B}$  не прерываются ( $B_1 = B_2 = B$ ), а линии  $\vec{H}$  терпят разрыв, в зазоре их количество возрастает в  $\mu$  раз.

Найдем формулу для расчета модуля вектора  $\vec{B}$  внутри железного сердечника ( $B_1$ ) и внутри зазора ( $B_2$ ). Для этого рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по контуру  $\Gamma$ , проходящему по оси сердечника:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{B_1}{\mu_0} l_1 + \frac{B_2}{\mu \mu_0} l_2 = \frac{B}{\mu_0} \left( l_1 + \frac{l_2}{\mu} \right) \approx \frac{B}{\mu_0} l_1 = I N.$$

Отсюда следуют выражения:

$$B_{\text{зазор}} = B_1 = B_2 = \mu_0 I \frac{N}{l_1}, \quad H_1 = H_{\text{зазор}} = I \frac{N}{l_1}, \quad H_2 = H_{\text{внутри}} = \frac{H_1}{\mu}. \quad (4.82)$$

При выводе было учтено, что длина участка контура в воздушном зазоре примерно на порядок меньше длины контура ( $l \approx 10l_1$ ,  $l = l_1 + l_2$ ), а магнитная проницаемость железа составляет несколько тысяч единиц и поэтому  $l_1 \gg (l_2/\mu)$ . Такие соотношения приводят к тому, что наличие зазора уменьшает модуль вектора индукции магнитного поля как внутри сердечника, так и в зазоре примерно в несколько сотен раз:  $l/(\mu l_1) \sim (10^2 \div 10^3)$ .

#### 4.3.4. ВИДЫ МАГНЕТИКОВ

Все вещества по магнитным свойствам подразделяются на три группы — диамагнетики, парамагнетики и магнитоупорядоченные вещества (ферро-, антиферро- и ферримангнетики). Рассмотрим эти группы веществ подробнее.

##### 4.3.4.1. ДИАМАГНЕТИКИ

Это вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома равен нулю. Для них магнитная восприимчивость не зависит от индукции внешнего магнитного поля, принимает малые по модулю отрицательные значения  $\chi = -(10^{-4} \div 10^{-5})$ , что означает незначительное ослабление внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  ( $\mu \leq 1$ ) в присутствии диамагнетиков и противоположное направление векторов  $\vec{B}'$ ,  $\vec{J}$  и вектора  $\vec{B}_0$ . Во внешнем неоднородном магнитном поле диамагнетик будет перемещаться и выталкиваться в область более слабого поля.

К диамагнетикам относятся инертные газы, металлы Bi, Zn, Cu, Ag, Au, Hg, стекло, мрамор, различные смолы и т. д.

Рассмотрим, что происходит с атомами диамагнетика во внешнем магнитном поле на примере атома гелия. По теории Бора, в атоме гелия два электрона движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны по круговой орбите, поэтому их суммарный ток будет равен нулю, следовательно, будет равна нулю и сумма орбитальных магнитных моментов электронов (рис. 4.32a). Так как спиновые магнитные моменты электронов на-

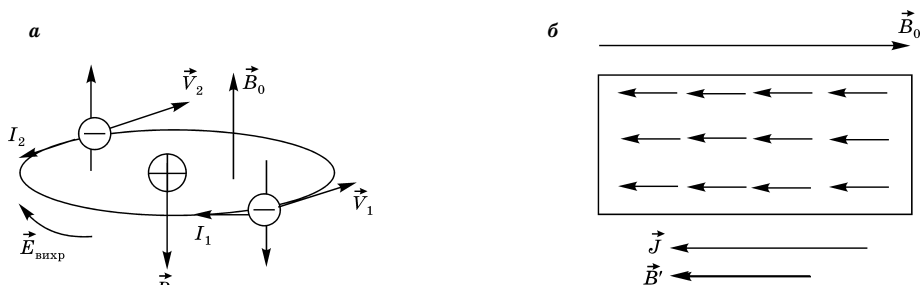


Рис. 4.32



правлены в противоположные стороны (рис. 4.32а), то их сумма также равна нулю, следовательно, равен нулю и магнитный момент атома:  $\vec{p}_{\text{м.ат}} = 0$ .

При включении внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  во время его изменения от нуля до  $B_0$  возникающее при этом вихревое электрическое поле  $\vec{E}_B$  совершает работу по увеличению скорости первого электрона и уменьшению скорости второго электрона, и суммарный кольцевой ток будет направлен в сторону первого тока ( $|I_1| > |I_2|$ , рис. 4.32а). Тогда магнитный момент суммарного тока будет направлен против вектора  $\vec{B}_0$ . Его называют индуцированным магнитным моментом  $\vec{p}_{\text{м.инд}}$ . Их ориентация для атомов диамагнетика, находящегося во внешнем магнитном поле, показана на рис. 4.32б.

**Диамагнитный эффект** — возникновение индуцированного магнитного момента атома  $\vec{p}_{\text{м.инд}}$ , направленного противоположно внешнему магнитному полю  $\vec{B}_0$ , свойствен всем веществам, но для остальных групп магнетиков не учитывается ввиду его незначительности.

#### 4.3.4.2. ПАРАМАГНЕТИКИ

Так называют вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома отличен от нуля. Для них магнитная восприимчивость  $\chi$  не зависит от модуля  $\vec{B}_0$  и принимает малые числовые значения  $\chi = (10^{-3} \cdot 10^{-2}) > 0$ . Это приводит к незначительному увеличению внешнего магнитного поля в присутствии парамагнетика ( $\mu \geq 1$ ) и параллельности векторов  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  вектору  $\vec{B}_0$ . Во внешнем неоднородном магнитном поле парамагнетик будет втягиваться в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся щелочные и щелочноземельные металлы, алюминий, платина, растворы солей железа, газы азот и кислород, редкоземельные металлы и их соединения и т. д.

Рассмотрим теорию Ланжевена, объясняющую поведение парамагнетиков во внешнем магнитном поле. В этой теории парамагнетик по отношению к магнитным свойствам заменяется газом магнитных стрелок, принимающих участие в тепловом движении. Стрелки моделируют магнитные моменты атомов. В отсутствие внешнего магнитного поля тепловое движение разбрасывает стрелки хаотично по всем направлениям, поэтому  $\vec{B}' = 0, \vec{J} = 0$ . (рис. 4.33). Во внешнем магнитном поле на магнитные стрелки действуют силы магнитного поля, стремящиеся установить их вдоль линий магнитной индукции. В итоге наблюдается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов вдоль линий магнитного поля, появляется намагниченность  $\vec{J}$  парамагнетика (рис. 4.33).

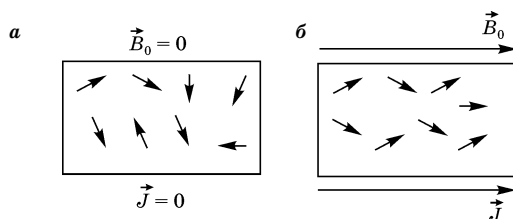


Рис. 4.33

В теории Ланжевена для магнитной восприимчивости справедлив закон Кюри, который определяет зависимость  $\chi$  от температуры

$$\chi = \frac{c}{T}, \quad (4.83)$$

где постоянную величину  $c$  называют постоянной Кюри.

С повышением температуры усиливается фактор теплового движения атомов, и поэтому во внешнем магнитном поле фиксированной величины  $\vec{B}_0$  магнитная восприимчивость уменьшается, что и приводит к уменьшению числовых значений векторов  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$ .

#### 4.3.4.3. ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Группу магнитоупорядоченных веществ составляют вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома не равен нулю. В отличие от парамагнетиков, для них магнитная восприимчивость существенно зависит от индукции  $\vec{B}_0$  внешнего магнитного поля.

Рассмотрим подробнее ферромагнетики, которые наиболее широко применяются на практике.

К ферромагнетикам относятся такие металлы, как Fe, Co, Ni, Gd, сплавы и соединения этих элементов и т. д. Перечислим основные особенности ферромагнетиков.

1. Ферромагнетизм обусловлен спиновыми магнитными моментами атомов. Атомы ферромагнетиков имеют незаполненные внутренние электронные оболочки, что приводит к большим магнитным моментам атомов.

2. Между магнитными моментами соседних атомов устанавливается обменное взаимодействие, которое приводит к параллельной ориентации магнитных моментов атомов в микрорегионах, называемых **доменами**. Направления магнитных моментов атомов различных доменов разные, поэтому общая намагниченность ферромагнетика равна нулю (рис. 4.34а).

Размеры доменов устанавливаются за счет действия двух факторов:

а) энергетически выгодно увеличивать число доменов, так как уменьшается энергия, необходимая для поддержания магнитного поля за пределами ферромагнетика (рис. 4.34б);

б) энергетически выгодно уменьшать число доменов, так как уменьшаются длина границ, на которых из-за большого градиента магнитного поля (на

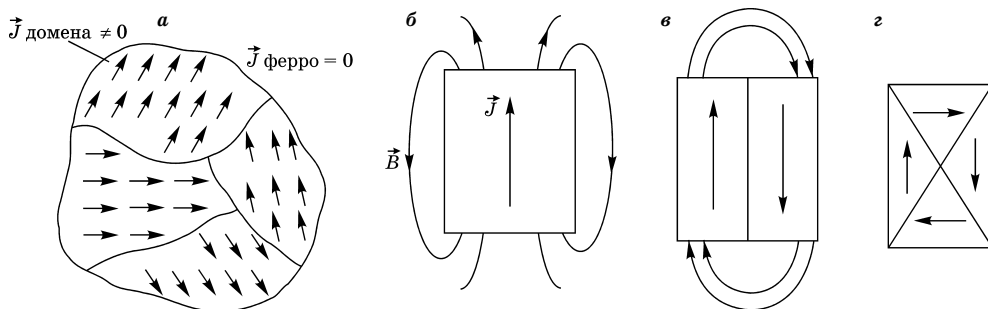


Рис. 4.34

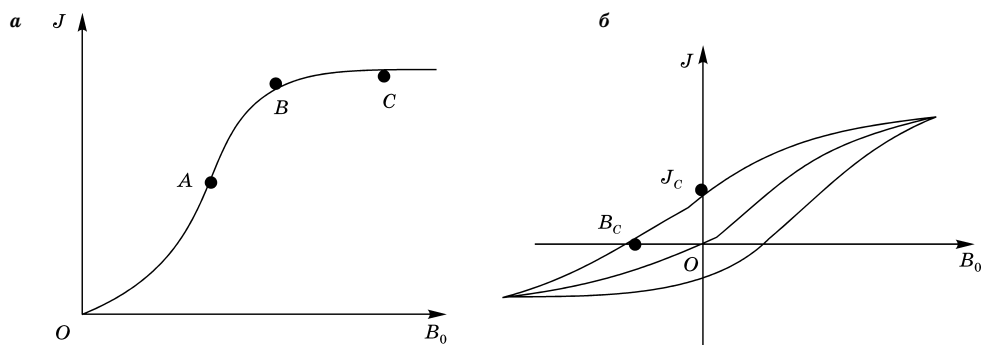


Рис. 4.35

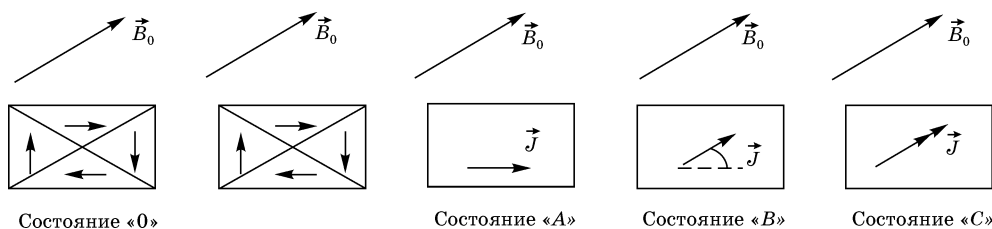


Рис. 4.36

границах между доменами резко изменяется направление магнитных моментов атомов) накапливается магнитная энергия. В итоге размеры доменов составляют порядка  $l \approx (10^{-2} \div 10^{-4})$  см.

3. Магнитная восприимчивость  $\chi$  существенно зависит от величины индукции внешнего магнитного поля, достигая значений, превышающих в ряде случаев в  $10^6$  раз значения  $\chi$  для парамагнетиков. Намагниченность ферромагнетика достигает насыщения в слабых магнитных полях. Основная кривая намагничивания является нелинейной (рис. 4.35а).

При намагничивании ферромагнетика происходят следующие процессы:

1-й этап — смещение границ (участок ОА основной кривой намагничивания рис. 4.35а). На этом участке с увеличением модуля вектора магнитной индукции  $\vec{B}_0$  внешнего магнитного поля происходит рост доменов с выгодной ориентацией магнитных моментов по отношению к направлению внешнего магнитного поля (рис. 4.36). Он сопровождается смещением границ доменов. В конце первого этапа образец становится однодоменным.

2-й этап — вращение (участок АВ на кривой рис. 4.35а). При увеличении модуля вектора  $\vec{B}_0$  на этом участке происходит поворот вектора намагничивания  $\vec{J}$ , и он в итоге устанавливается вдоль вектора  $\vec{B}_0$  (рис. 4.36).

3-й этап — парапроцесс (участок ВС кривой рис. 4.35а). С увеличением модуля вектора  $\vec{B}_0$  происходит незначительный рост  $J$  за счет ориентации вдоль поля магнитных моментов отдельных атомов, которые за счет теплового движения имели другие направления (рис. 4.36).

4. Явление гистерезиса — зависимость свойств образца от его предшествующих состояний или явление отставания изменения намагниченности от

изменения внешнего магнитного поля. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения, а затем начать уменьшать внешнее магнитное поле до нуля, то изменение  $J$  будет отставать от изменения  $\vec{B}_0$ , и в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик будет обладать остаточной намагниченностью  $J_C$  (рис. 4.35б). Для устранения остаточной намагниченности  $J_C$  необходимо приложить внешнее магнитное поле противоположного направления, величину модуля вектора магнитной индукции  $\vec{B}_C$  такого поля называют **коэрцитивной силой**. При дальнейшем увеличении  $\vec{B}_0$  можно выйти на насыщение, и при циклическом изменении  $\vec{B}_0$  намагниченность ферромагнетика будет описывать кривую, называемую **петлей гистерезиса** (рис. 4.35б).

В зависимости от величины коэрцитивной силы  $\vec{B}_C$  различают магнитомягкие материалы ( $B_C \approx 1$  мкТл, узкая петля гистерезиса, они легко перемагничиваются) и магнито жесткие материалы ( $B_C \approx 1$  мТл, широкая петля гистерезиса, их трудно перемагнитить). Магнитомягкие материалы используют для изготовления сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д., то есть в тех случаях, где потери энергии при перемагничивании таких материалов будут незначительными, а магнито жесткие материалы применяются для изготовления постоянных магнитов.

5. Для каждого ферромагнетика существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и становится обычным парамагнетиком, — температура Кюри ( $T_C$ ). Для железа и никеля  $T_C$  составляет 1038 К и 641 К соответственно. Магнитная восприимчивость ферромагнетика при температурах выше температуры Кюри  $T > T_C$  подчиняется закону Кюри–Вейсса

$$\chi = \frac{c}{T - T_C}, \quad (4.84)$$

где  $c$  — постоянная Кюри–Вейсса.

#### 4.3.4.4. АНТИФЕРРОМАГНЕТИКИ И ФЕРРИМАГНЕТИКИ

К антиферромагнетикам относят вещества, для которых обменное взаимодействие приводит к противоположной ориентации магнитных моментов соседних атомов. Кристаллическую структуру таких веществ можно представить как наложение двух или более кристаллических подрешеток, в каждой из которых магнитные моменты атомов параллельны друг другу и одинаковы по модулю. Для разных подрешеток магнитные моменты атомов направлены противоположно и равны по модулю (рис. 4.37а). Поэтому в отсутствие магнитного поля, несмотря на то что векторы намагничивания каждой подрешетки отличны от нуля, намагниченность всего антиферромагнетика равна нулю ( $\vec{J}_1 \neq 0, \vec{J}_2 \neq 0, \vec{J}_{\text{сум}} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = 0$ , рис. 4.37а).

Типичными примерами антиферромагнетиков являются такие металлы, как марганец, хром, самарий, неодим, а также окислы металлов MnO, FeO, CoO NiO, UO<sub>2</sub>, NpO<sub>2</sub> и т. д.

Для антиферромагнетиков существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и становится парамагнетиком, — температура Нееля. Так, например, для марганца она составляет  $T_N = 100$  К, для хро-

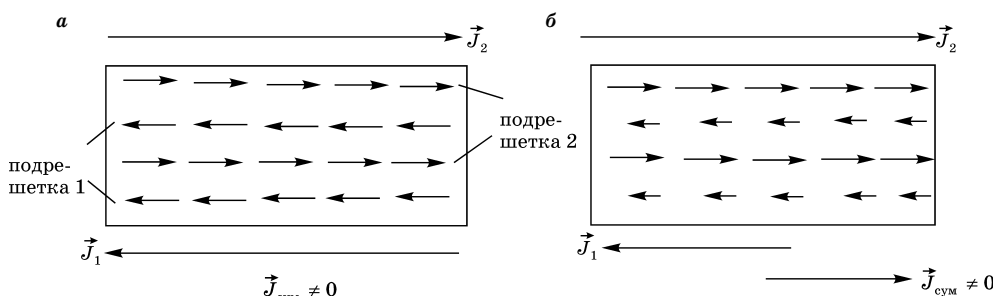


Рис. 4.37

ма  $T_N = 310$  К, для окисла NiO  $T_N = 650$  К. Поведение ферромагнетика ниже температуры Кюри и антиферромагнетика ниже температуры Нееля существенно отличается. У ферромагнетика намагниченность достигает больших значений, а для антиферромагнетика стремится к нулю.

Ферримангнетики имеют такую же кристаллическую структуру, как и антиферромагнетики — она состоит из нескольких подрешеток, магнитные моменты атомов соседних подрешеток направлены противоположно. Но, в отличие от антиферромагнетика, магнитные моменты атомов разных подрешеток не равны по модулю, что приводит к не равному нулю суммарному вектору намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля (рис. 4.37б). Поведение этих веществ во внешнем магнитном поле во многом аналогично поведению ферромагнетиков: они обладают высокими значениями магнитной проницаемости, для них существует температура Кюри, наблюдается магнитный гистерезис и т. д. Различие, например, заключается в существовании двух температур Кюри, при которых сначала происходит исчезновение вектора намагниченности одной подрешетки, а затем при другой температуре другой подрешетки. К таким веществам можно отнести, например, ферриты — двойные окислы переходных металлов, такие как  $\text{NiFe}_2\text{O}_4$ ,  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$ ,  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  и т. д. Они, как и ферромагнетики, обладают высокими значениями магнитной проницаемости, но при этом ферриты являются полупроводниками, их удельное сопротивление порядка в  $10^7$  раз больше, чем у ферромагнетиков. Поэтому использование ферритов в высокочастотных полях резко уменьшает потери энергии на выделение тепла за счет протекания токов Фуко.

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Теория колебательных процессов сначала развивалась в рамках механики (теория механических колебаний). В ее развитие внесли вклад работы Х. Гюйгенса (в труде «Маятниковые часы» приведена теория физического маятника), Э. Хладни — в 1787 г. он открыл продольные колебания струн и стержней, осуществил опыты по изучению колебаний пластин с образованием акустических фигур (фигуры Хладни). В 1799 году Э. Хладни открыл вращательные колебания стержней.

Развитие теории электромагнитных колебаний связано с развитием электродинамики. Так, после открытия конденсатора и соленоида (первый соленоид построил А. Ампер) У. Томсон в 1853 г. изучал электрические колебания (точнее, электромагнитные) в электрическом контуре, состоящем из конденсатора и катушки, и вывел формулу для периода собственных колебаний (формула Томсона).

После открытия электромагнитных колебаний стал формироваться отдельный раздел знаний — теория колебаний, в которой рассматривались общие закономерности (математические и физические модели, общие методы исследования, одинаковые по структуре уравнения, величины), присущие колебаниям разной природы.

Нужно отметить вклад в развитие теории колебаний французского ученого Ж. Фурье (1768–1830). Он разработал метод представления периодической функции тригонометрическими рядами — так называемыми рядами Фурье, — который в настоящее время широко применяется как метод решения многих задач в различных разделах физики.

Разложение периодической функции и, следовательно, разложение различных периодических процессов (механических, электрических и т. д.) на гармонические колебания позволяет достаточно детально описать и проанализировать любой сложный колебательный процесс; этот метод находит применение в акустике, радиотехнике, электронике и других областях науки и техники.

## 5.1. ВВЕДЕНИЕ

Различные виды движений и процессов, происходящих в природе, можно классифицировать по-разному. По одной из таких классификаций принято выделять колебательные движения (колебания), частный случай колебательных движений — периодические колебания, а самый простой вид периодических колебаний — гармонические.

К **колебательным движениям (колебаниям)** относят такие движения, которые *характеризуются той или иной степенью повторяемости во времени описывающих их величин*. К колебательным процессам можно, например, отнести механические колебания груза пружинного и математического маятников, автоколебания голосовых связок при разговоре, электромагнитные колебания силы тока, заряда, напряжения, вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного поля катушки в колебательном контуре, периодические колебания цвета продуктов некоторых химических реакций и т. д. В качестве примера колебательного движения на рис. 5.1а приведена зависимость от времени  $t$  смещения  $x$  груза (материальной точки) пружинного маятника от положения равновесия.

К периодическим колебаниям относят колебания, при которых описывающие их величины повторяются через промежуток времени, называемый периодом  $T$  (рис. 5.1б). При гармонических колебаниях (ГК) эти величины изменяются по гармоническому закону, то есть по закону синуса или косинуса (рис. 5.1в).

ГК, как наиболее простые колебания, играют особую роль среди других видов колебаний. Оказывается, что при достаточно общих условиях, которые обычно выполняются в физических задачах, любой сложный процесс, описываемый какой-либо периодической или непериодической функцией времени  $f(t)$ , можно представить в виде совокупности конечного или бесконечного набора гармонических колебаний разной частоты, то есть представить его в виде ряда или интеграла Фурье (см. раздел 5.8). Это позволяет, например, предложить общую методику анализа различных временных процессов по их частотному спектру, методику воздействия сигналов на любые системы по изменению их частотного спектра и т. д.

Между различными видами колебаний — механических, электромагнитных, химических и прочих, происходящих в замкнутых и открытых системах, — существует много общего. Поэтому в этом разделе наряду с рассмотрением отдельных видов колебаний изучается и то, что их объединяет,

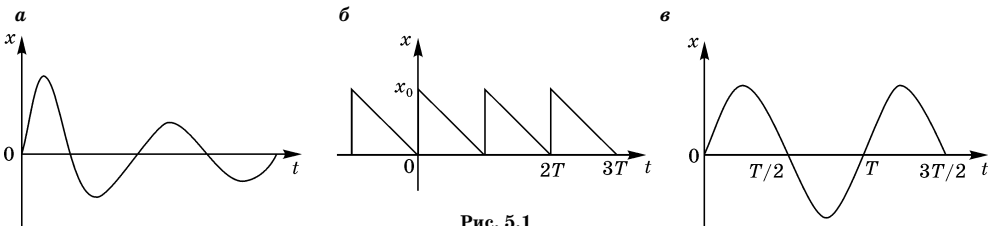


Рис. 5.1

а именно: **общие для них понятия** (период  $T$ , амплитуда  $A$ , фаза колебаний  $\varphi$  и т. д.), **дифференциальные уравнения и их решения**. В связи с этим широкое применение в этом разделе находит **метод аналогий**, при котором результаты, полученные при рассмотрении одного вида колебаний, используются для описания других видов.

## 5.2. УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ. ТАБЛИЦА АНАЛОГИЙ МЕЖДУ МЕХАНИЧЕСКИМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Рассмотрим подробнее аналогию между наиболее часто встречающимися в природе механическими и электромагнитными колебаниями. Для этого подробно остановимся на электромагнитных колебаниях, происходящих в идеальном колебательном контуре (отсутствуют потери энергии колебаний на нагревание проводников), и механических колебаниях груза (материальной точки) пружинного маятника в отсутствие сил трения и сопротивления.

Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) груз пружинного маятника максимально отклонен от положения равновесия ( $x = x_m$ , рис. 5.2а), а на обкладки конденсатора колебательного контура сообщают максимальный заряд ( $q = q_m$ , рис. 5.2б).

**Состояние 1** пружинного маятника характеризуется тем, что скорость груза и его кинетическая энергия равны нулю, а полная энергия колебаний равна максимальной потенциальной энергии пружины:

$$x = x_m, v_x = 0, W = W_{Pm} = \frac{kx^2}{2}, W_K = 0.$$

Для колебательного контура в **состоянии 1** сила тока и энергия магнитного поля катушки равны нулю, а полная энергия колебаний совпадает с максимальной энергией электрического поля конденсатора:

$$q = q_m, I = 0, W = W_{элm} = \frac{q^2}{2C}, W_M = 0.$$

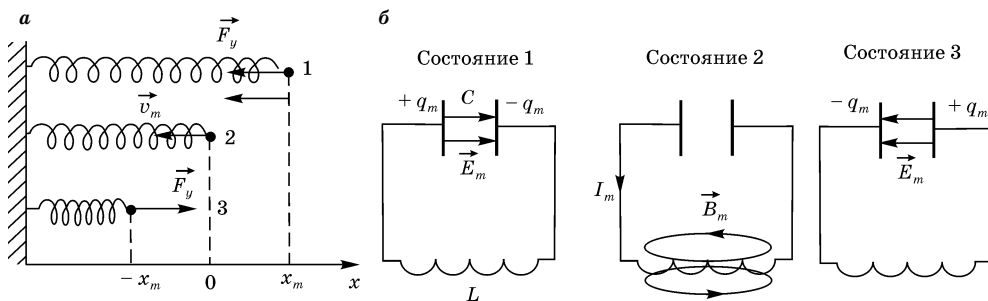


Рис. 5.2



В течение времени  $0 < t < T/4$  происходят следующие процессы.

*Пружинный маятник.* Под действием силы упругости груз начинает двигаться, скорость груза нарастает постепенно из-за наличия у него инерционных свойств (массы) и в момент времени  $t$ , равный четверти периода колебаний  $T (t = T/4)$ , груз проходит положение равновесия (**состояние 2**, рис. 5.2а). При этом потенциальная энергия пружины полностью переходит в кинетическую энергию груза:

$$x = 0, v_x = -v_m, W = W_{Km} = \frac{mv^2}{2}, W_p = 0.$$

*Колебательный контур.* Конденсатор начинает разряжаться, сила тока в контуре постепенно возрастает из-за возникновения в катушке ЭДС самоиндукции, которая препятствует нарастанию основного тока в контуре.

Сила тока достигает максимального значения в момент времени  $t = T/4$ . При этом энергия электрического поля конденсатора полностью переходит в энергию магнитного поля катушки (**состояние 2**, рис. 5.2б).

$$q = 0, I = -I_m, W = W_{Mm} = \frac{LI^2}{2}, W_{эл} = 0.$$

В следующие четверть периода ( $T/4 < t < T/2$ ) наблюдаются такие процессы.

*Пружинный маятник.* Под действием силы упругости скорость груза начинает постепенно уменьшаться из-за наличия у груза массы, и в момент времени  $t = T/2$  (**состояние 3**, рис. 5.2а) она обращается в ноль, кинетическая энергия груза полностью переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$x = -x_m, v_x = 0, W = W_{pm} = \frac{kx^2}{2}, W_k = 0.$$

*Колебательный контур.* Сила тока в контуре начинает постепенно убывать, так как в катушке возникает ток самоиндукции, который препятствует убыванию основного тока в контуре, и в момент времени  $t = T/2$  (**состояние 3**, рис. 5.2б) сила тока обращается в ноль. Конденсатор перезаряжается, энергия магнитного поля катушки полностью переходит в энергию электрического поля конденсатора:

$$x = -x_m, v_x = 0, W = W_{pm} = \frac{kx^2}{2}, W_k = 0,$$

$$q = -q_m, I = 0, W = W_{элm} = \frac{q^2}{2C}, W_M = 0.$$

Из описанных выше колебательных процессов можно сделать вывод об условиях возникновения колебаний в любой системе. Система должна обладать инерционными свойствами, устойчивым положением равновесия и потери энергии колебаний (на преодоление сил трения в случае механических колебаний и на нагревание проводников в случае электромагнитных колебаний в контуре) должны быть небольшими. Рассмотренные примеры позволяют установить аналогию между механическими и электромагнитными колебаниями, которая отражена в табл. 5.1.

Таблица 5.1

| Механические колебания              | Электромагнитные колебания в контуре       |
|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| Смещение $x$                        | Электрический заряд $q$                    |
| Проекция скорости $v_x = x'$        | Сила тока $I = q'$                         |
| Масса тела $m$                      | Индуктивность катушки $L$                  |
| Коэффициент жесткости системы $k$   | $1/C$ ( $C$ — электроемкость конденсатора) |
| Коэффициент сопротивления среды $r$ | Активное сопротивление $R$                 |

С помощью данной таблицы можно записывать формулы для одного вида колебаний, если известны аналогичные формулы для другого вида колебаний. Так, например,

$$W_K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_M = \frac{LI^2}{2}, \quad W_P = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow W_{эл} = \frac{CU^2}{2},$$

$$F = k|x| \Rightarrow U_C = \frac{q}{C}, \quad F_X = ma_X \Rightarrow U_L = L \frac{dI}{dt}.$$

В дальнейшем эта таблица будет использоваться для записи без вывода различных формул теории колебаний.

### 5.3. ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Выведем общее дифференциальное уравнение, описывающее достаточно широкий круг происходящих в системе колебаний. Для этого рассмотрим открытый колебательный контур, в который подается внешнее напряжение  $U_{\text{внеш}}$  и имеются потери энергии на нагревание проводников (рис. 5.3).

Из закона сохранения энергии следует, что элементарная работа  $A_{\text{внеш}}$  тока, поступающего в контур извне  $dA_{\text{внеш}}$ , расходуется на изменение энергии колебаний  $dW$  и на нагревание проводников  $dQ$ :

$$dW + dQ = dA_{\text{внеш}}.$$

Запишем это выражение более подробно:

$$dW = d(W_M + W_{эл}) = d\left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = LI dI + \frac{q}{C} dq,$$

$$dQ = I^2 R dt, \quad dA_{\text{внеш}} = IU_{\text{внеш}} dt,$$

$$LI dI + I^2 R dt + \frac{q}{C} dq = IU_{\text{внеш}} dt \times \frac{1}{dt}, \Rightarrow LI dI + I^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = IU_{\text{внеш}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LI q'' + I q' R + \frac{q}{C} I = IU_{\text{внеш}},$$

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{U_{\text{внеш}}}{L}, \quad (5.1)$$

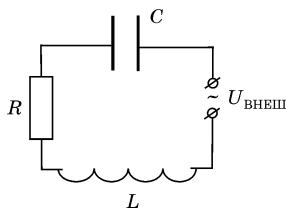


Рис. 5.3

где введены следующие обозначения:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad (5.2)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.3)$$

Буквой  $\beta$  в формуле (5.2) обозначен **коэффициент затухания колебаний**, а величина  $\omega_0$  в формуле (5.3) — **циклическая (круговая) частота свободных незатухающих гармонических колебаний** контура. Свободные незатухающие колебания происходят в выведенной из состояния равновесия замкнутой системе (нет поступления энергии извне), в которой отсутствуют потери энергии колебаний ( $\beta = 0$ ).

Уравнение (5.1) описывает различные случаи колебаний в открытом и закрытом колебательном контуре. Для получения аналогичного уравнения, описывающего колебания в механической системе, воспользуемся таблицей аналогий 5.1 и получим:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{внеш}}}{m}; \quad (5.4)$$

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5.5)$$

где  $F_{\text{внеш}}$  — проекция вектора внешней силы на ось  $Ox$ , вдоль которой происходят колебания.

Рассмотрим частные случаи решения уравнений (5.1) и (5.4).

#### 5.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ

Для замкнутой системы ( $F_{\text{внеш}} = 0$ ), в которой отсутствуют потери энергии на преодоление сил сопротивления или трения ( $\beta = 0$ ), дифференциальное уравнение (5.4) примет вид

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.6)$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что решением этого уравнения (его называют однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка) является **гармоническое колебание**

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x_m \cos \varphi, \quad (5.7)$$

то есть смещение тела  $x$  (материальной точки) от положения равновесия изменяется по гармоническому закону. В уравнении (5.7) введены такие понятия, как:

$x_m$  — максимальное смещение, или **амплитуда колебания**. В общем случае под амплитудой колебаний понимают положительную величину, стоящую перед знаком синуса или косинуса;

$\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$  — **фаза колебаний** — величина, стоящая под знаком синуса или косинуса;

$\varphi_0$  — **начальная фаза колебаний** — фаза колебаний в начальный момент времени  $t = 0$ ;

$\omega_0$  — **циклическая (круговая) частота свободных незатухающих гармонических колебаний системы**, определяемая свойствами системы по формуле (5.5).

Циклическая частота  $\omega_0$  связана с **периодом колебаний**  $T$  и **линейной частотой**  $\nu$  соотношениями

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (5.8)$$

Запишем выражения для проекций скорости, проекции ускорения тела (м. т.) на ось  $Ox$ , а также для потенциальной, кинетической и полной энергий тела, совершающего гармонические колебания:

$$v_X = x' = -x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -x_m \sin \varphi, \quad v_m = \omega_0 x_m; \quad (5.9)$$

$$a_X = x'' = v'_X = -a_m \cos \varphi, \quad a_m = \omega_0^2 x_m = \omega_0 v_m, \quad a_X = -\omega_0^2 x; \quad (5.10)$$

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = W_{pm} \cos^2 \varphi, \quad W_{pm} = \frac{kx_m^2}{2}; \quad (5.11)$$

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = W_{Km} \sin^2 \varphi, \quad W_{Km} = \frac{mv_m^2}{2}. \quad (5.12)$$

Покажем, что амплитуды колебаний кинетической и потенциальной энергии совпадают:

$$W_{Km} = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} = W_{pm}.$$

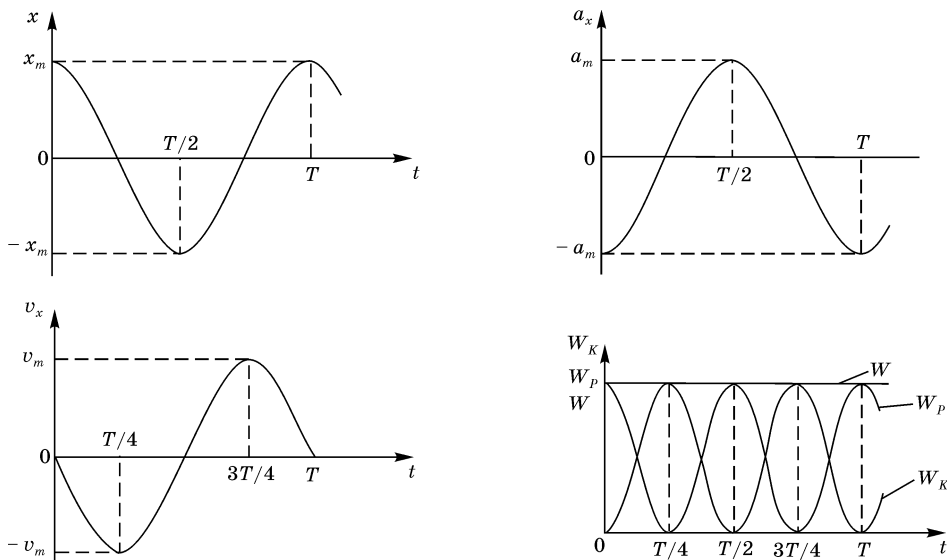


Рис. 5.4

Тогда

$$W = W_p + W_K = W_{pm} = W_{Km} = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} = \text{const.} \quad (5.13)$$

Итак, из полученных формул следует, что проекция скорости  $v_x$  и ускорения  $a_x$ , кинетическая и потенциальная энергии  $W_K$ ,  $W_p$  тела (м. т.) изменяются по гармоническому закону подобно ее смещению  $x$ , а полная энергия  $W$  колебаний материальной точки остается при этом неизменной.

Приведем в пределах одного периода колебаний  $T$  графики зависимости  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x$ ,  $W_K$ ,  $W_p$  и  $W$  от времени  $t$  для материальной точки при ее гармонических колебаниях (рис. 5.4,  $\phi_0 = 0$ ). При построении графиков удобно записать уравнения колебаний в виде

$$x = x_m \cos(\omega_0 t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

и выбирать моменты времени, равные  $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ ,

$$T \Rightarrow T \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 1; 0; -1; 0; 1.$$

Отметим, что для потенциальной и кинетической энергий период гармонических колебаний в два раза меньше, чем для смещения  $x$ .

## 5.5. КВАЗИУПРУГАЯ СИЛА. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Докажем следующее утверждение: *если в системе результирующая сила является квазиупругой, то в такой системе происходят гармонические колебания.* Под квазиупругой силой  $F_{Ky}$  понимают силу, которая подчиняется закону Гука, но не является по своей природе упругой силой. Учтем, что для  $F_{Ky}$  выполняется одновременно и II закон Ньютона, и закон Гука, из которых можно получить дифференциальное уравнение колебаний в системе

$$(F_{Ky})_x = ma_x = -kx, \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $k$  — коэффициент жесткости системы,  $x$  — смещение тела (м. т.) от положения равновесия.

Как уже было отмечено выше, решением такого дифференциального уравнения является гармоническое колебание (5.7), что и требовалось доказать.

В качестве примера справедливости этого утверждения рассмотрим колебания **математического маятника** — это материальная

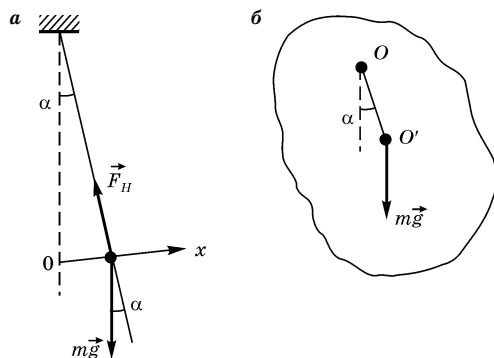


Рис. 5.5

точка массой  $m$ , подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$  (см. рис. 5.5а).

Найдем проекцию на ось  $Ox$  результирующей силы, действующей на груз математического маятника. Учитывая малые значения угла отклонения  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx x/l$ ), запишем:

$$(\vec{F}_H + m\vec{g})_x = -mg \sin \alpha = -\frac{mg}{l}x = -kx \Rightarrow k = \frac{mg}{l}.$$

Итак, при малых отклонениях от положения равновесия (при малых амплитудах колебаний) колебания груза будут гармоническими. Это позволяет найти период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.14)$$

Как следует из формулы (5.14), период колебаний математического маятника будет зависеть от длины нити  $l$  и числового значения ускорения  $g$  свободного падения.

Рассмотрим теперь общий случай — колебания физического маятника.

**Физическим маятником** называют твердое тело, способное под действием силы тяжести совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси (точка  $O$ , рис. 5.5б). При этом ось вращения не проходит через центр тяжести (центр масс) тела (точка  $O'$ , рис. 5.5б). Расстояние между точками  $O$  и  $O'$  обозначено буквой  $a$  ( $OO' = a$ ).

Покажем, что при малых углах отклонения  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ) от положения равновесия (ему соответствует расположение точек  $O$  и  $O'$  на одной вертикальной прямой) колебания физического маятника будут гармоническими. Для этого запишем II закон Ньютона для вращательного движения в векторном виде и в проекциях на ось вращения (см. формула (1.44)):

$$I\ddot{\epsilon} = \vec{M}, \quad I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mga \sin \alpha, \quad I\alpha'' = -mga\alpha, \\ \alpha'' + \omega_0^2 \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}. \quad (5.15)$$

Как уже было отмечено выше, решением полученного дифференциального уравнения является гармоническое колебание. Тогда для периода колебаний физического маятника можно записать следующую формулу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_n}{g}}, \quad l_n = \frac{I}{ma}, \quad (5.16)$$

где для физического маятника введена **приведенная длина**  $l_n$  — это длина математического маятника, при которой периоды колебаний физического и математического маятников совпадают.

Рассмотренные выше примеры (колебательный контур, математический и физический маятники, колебания груза на пружине) являются частными случаями движения **гармонического осциллятора**. Под **осциллятором** (от *лат. oscillo* — «качаюсь») понимают любую физическую систему, совершаю-

щую колебания. Если колебания в системе будут гармоническими, то такой осциллятор называют **гармоническим**. Для механических систем результирующая сила в этом случае является квазиупругой, а потенциальное поле, в котором движется тело, имеет параболический вид ( $U(x) = kx^2/2$ ), что наблюдается при малых отклонениях  $x$  системы от положения равновесия.

Если отклонение  $x$  нельзя считать малым, то тогда в разложении  $U(x)$  по степеням  $x$  необходимо учитывать члены более высокого порядка (потенциальное поле становится не параболическим:  $U(x) = kx^2/2 - gx^3/3 + \dots$ ), уравнения движения — нелинейными, а сам осциллятор в этом случае называют **ангармоническим**.

Понятие осциллятора применяется также и к немеханическим колебательным системам. В частности, колебательный контур является электрическим осциллятором.

## 5.6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗАКРЫТОМ ИДЕАЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

В такой контур не подается внешнее напряжение ( $U_{\text{внеш}} = 0$ ) и в нем отсутствуют потери энергии на нагревание проводников ( $\beta = 0$ ), поэтому общее дифференциальное уравнение колебаний (5.1) для такого контура

$$q'' + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.17)$$

его решением является гармоническое колебание

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = q_m \cos \varphi. \quad (5.18)$$

Используя таблицу аналогий между механическими и электромагнитными колебаниями (табл. 5.1), можно переписать формулы (5.9)–(5.13) для случая колебательного контура. В результате получим зависимости от времени силы тока  $I$ , напряжения на конденсаторе  $U_C$ , напряжения на катушке  $U_L$ , ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_S$ , энергий электрического поля конденсатора  $W_C$  и магнитного поля катушки  $W_L$ , полной энергии колебаний  $W$  и проекций вектора напряженности  $E_X$  электрического поля конденсатора и вектора магнитной индукции  $B_X$  магнитного поля катушки. Итак, эти формулы имеют следующий вид:

$$I = q' = -I_m \sin \varphi, \quad I_m = \omega_0 q_m, \quad U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm} \cos \varphi, \quad U_{Cm} = \frac{q_m}{C}; \quad (5.19)$$

$$U_L = Lq'' = -U_{Lm} \sin \varphi, \quad U_{Lm} = L\omega_0^2 q_m = \frac{q_m}{C} = U_{Cm}, \quad \varepsilon_S = -Lq'' = -U_L; \quad (5.20)$$

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = W_{Mm} \sin^2 \varphi, \quad W_{Mm} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} W_{\text{эл}m} \cos^2 \varphi, \quad (5.21)$$

$$W_{\text{эл}m} = \frac{q_m^2}{2C};$$

$$W = W_{\text{эл}} + W_M = W_{\text{эл}m} = W_{Mm} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad (5.22)$$

$$E_X = \frac{U_C}{d} = E_m \cos \varphi, \quad E_m = \frac{U_{Cm}}{d}, \quad B_X = -B_m \sin \varphi, \quad B_m = I_m \sqrt{\frac{\mu_0 L}{V}}, \quad (5.23)$$

где  $d$  — расстояние между обкладками плоского конденсатора;  $V$  — объем катушки (она представляет собой длинный соленоид);  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

## 5.7. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

### 5.7.1. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТЫ

Возьмем ось  $Ox$ . Из ее начала (точка  $O$ ) отложим вектор  $\vec{A}$  под углом  $\varphi_0$  к оси  $Ox$  (рис. 5.6). Если этот вектор вращать вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , то тогда проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $Ox$  будет изменяться по гармоническому закону

$$x(0) = A \cos \varphi_0, \quad x(t) = A \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Такое построение называют **векторной диаграммой**. Гармоническое колебание на векторной диаграмме совершает проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $Ox$ . Причем циклическая частота колебаний  $\omega$  будет равна по модулю угловой скорости  $\omega$  вращения вектора  $\vec{A}$ .

Пусть тело (м. т.) одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих в одном направлении, причем амплитуды и начальные фазы колебаний различны ( $A_1 \neq A_2$ ,  $\varphi_{01} \neq \varphi_{02}$ ):

$$x_1 = A_1 \cos (\omega t + \varphi_{01}), \quad x_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_{02}). \quad (5.24)$$

Результирующее движение, равное сумме колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , будет также гармоническим колебанием той же циклической частоты  $\omega$ :

$$x = x_1 + x_2 = A \cos (\omega t + \varphi_0).$$

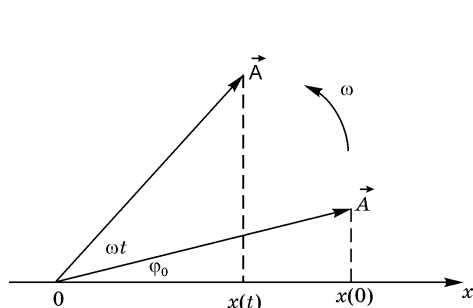


Рис. 5.6

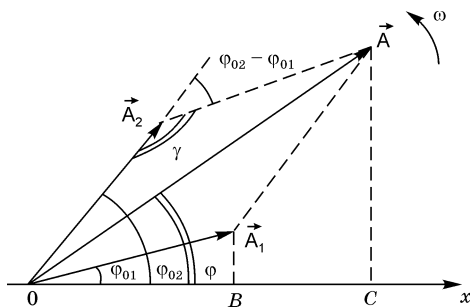


Рис. 5.7



Необходимо найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Это можно сделать с помощью векторной диаграммы. Для этого проведем из точки  $O$  векторы с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  под углами  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  к оси  $Ox$  и приведем их во вращение с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  (рис. 5.7).

Проекции векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на ось  $Ox$  при этом совершают гармонические колебания в соответствии с уравнениями (5.24). Результирующее колебание будет изображаться проекцией на ось  $Ox$  вектора  $\vec{A}$ , полученного из векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  по правилу параллелограмма. Из построения на рис. 5.7 следует, что квадрат амплитуды вектора  $\vec{A}$  можно найти по теореме косинусов из треугольника  $\triangle O A_2 A$ :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \gamma, \quad \gamma = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pi - \Delta\varphi,$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (5.25)$$

Из треугольников  $\triangle O A_1 B$  и  $\triangle O A C$  для начальной фазы  $\varphi_0$  результирующего колебания следует выражение

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{AC}{OC} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (5.26)$$

Рассмотрим частные случаи сложения колебаний.

$$1. \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = A_1 + A_2, \quad (5.27)$$

то есть если разность фаз складываемых колебаний равна четному числу  $\pi$ , то тогда колебания максимально усиливают друг друга.

$$2. \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = |A_1 - A_2|, \quad (5.28)$$

то есть если разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу  $\pi$ , то тогда колебания максимально ослабляют друг друга.

$$3. \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

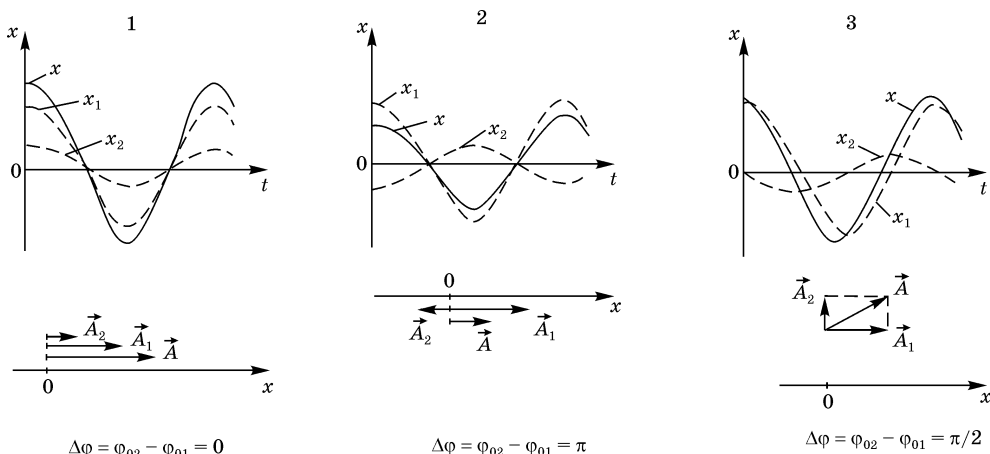


Рис. 5.8

На рис. 5.8 приведены результаты сложения гармонических колебаний в рассмотренных выше случаях 1, 2 и 3, при условии, что  $\varphi_{01} = 0$  и  $A_1 > A_2$ .

Полученные условия максимального усиления (5.27) и ослабления (5.28) колебаний при сложении колебаний одного направления и одинаковой частоты будут использованы при изучении интерференции когерентных волн.

### 5.7.2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ, ОДИНАКОВОЙ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ, НАЧАЛЬНЫЕ ФАЗЫ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ АРИФМЕТИЧЕСКУЮ ПРОГРЕССИЮ

Рассмотрим сложение гармонических колебаний  $N$ , происходящих вдоль оси  $Ox$ :

$$x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta), \quad \dots, \\ x_N = A \cos(\omega t + \varphi_0 + (N-1)\delta).$$

Найдем с помощью векторной диаграммы амплитуду результирующего колебания  $A_p$  (рис. 5.9). Для этого отложим вектор первого колебания амплитуды  $A$  из точки  $O$ , он составит угол  $\varphi_0$  с осью  $Ox$ ; вектор второго колебания отложим от конца первого вектора, угол между вторым вектором и осью  $Ox$  будет равен  $(\varphi_0 + \delta)$  и т. д. В результате получается ломаная линия, вписанная в окружность радиуса  $R$ . Вектор результирующего колебания замыкает эту ломаную линию и определяется следующим образом:

$$\triangle OMC: A_p = 2OM \sin \frac{\beta}{2} = 2OM \sin \left( \frac{2\pi - N\delta}{2} \right) = 2OM \sin \frac{N\delta}{2},$$

$$\triangle OMB: OB = A = 2R \sin \frac{\delta}{2} \Rightarrow OM = \frac{A}{2 \sin(\delta/2)},$$

тогда

$$A_p = A \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}. \quad (5.29)$$

Полученная формула будет использована при расчете результата многолучевой интерференции на дифракционной решетке.

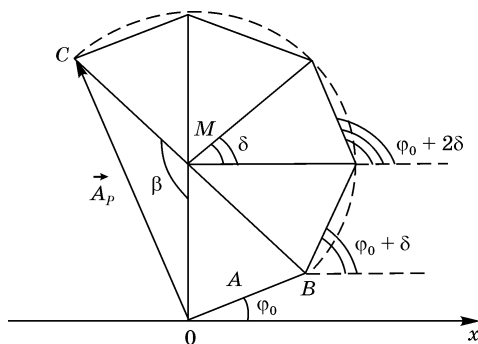


Рис. 5.9

### 5.7.3. БИЕНИЯ

**Биения** — это колебания, которые получаются в результате сложения двух гармонических колебаний  $x_1$  и  $x_2$  одного направления с близкими частотами ( $\omega_2, \omega_1 \gg \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ):

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

Рассмотрим подробнее результат сложения таких колебаний. Для простоты будем считать, что амплитуды складываемых колебаний одинаковы:  $A_1 = A_2 = A$ . Используя известную формулу сложения косинусов, получим:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

и определим:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (5.30)$$

Первый сомножитель в выражении (5.30) изменяется со временем значительно медленнее второго ( $\Delta\omega \ll \omega_2, \omega_1$ ), поэтому можно считать, что результирующее колебание  $x$  представляет собой колебание с циклической частотой  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  и с изменяющейся со временем амплитудой биений:

$$A_B(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (5.31)$$

Итак, биения можно представить как колебания с периодически изменяющейся амплитудой; эти колебания не являются гармоническими. В общем случае амплитуда биений изменяется в пределах, заключенных от  $|A_1 - A_2|$  до  $(A_1 + A_2)$ . При этом период изменения амплитуды (период биений  $T_B$ ) и циклическая частота биений  $\Omega$  будут определяться по формулам:

$$\Omega = |\omega_1 - \omega_2|, \quad T_B = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (5.32)$$

На рис. 5.10 приведены графики зависимости амплитуды биений  $A_B$  и смещения  $x$  м. т. от времени  $t$ .

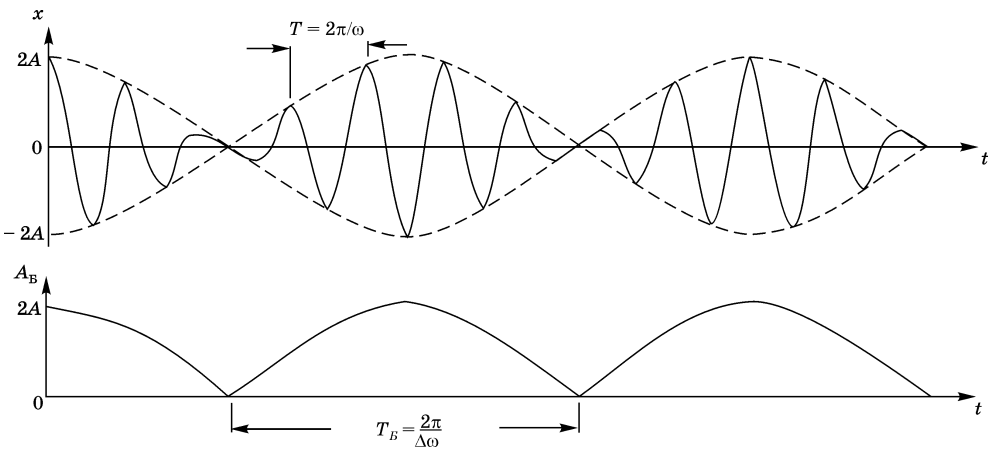


Рис. 5.10

Метод биений применяют, например, для настройки музыкальных инструментов, при анализе восприятия звуков человеком.

Наглядно биения можно продемонстрировать на опыте, в котором звуковой генератор возбуждает два колебания разной частоты, которые человеческое ухо различает как два отдельных звуковых сигнала. Если сближать частоты этих сигналов, то при некоторой разности частот (она зависит от слухового восприятия конкретного человека) вместо двух сигналов ухо человека будет воспринимать звуковой сигнал одной частоты, амплитуда которого будет изменяться, то есть в этом случае наблюдаются биения. При дальнейшем сближении частот период биений увеличивается и при совпадении частот сигналов будет слышен звук одной частоты, амплитуда которого не будет изменяться.

Биения можно использовать, например, для определения частоты какого-либо гармонического электрического колебания. Для этого на вход осциллографа подают гармонические колебания от звукового генератора (частоту  $\nu_{\Gamma}$  этих колебаний можно изменять) и гармонические колебания с неизвестной частотой  $\nu$  от какого-либо источника. По наблюдаемой на экране осциллографа картине биений определяют период биений  $T_{\text{Б}}$  и частоту колебаний ( $\nu = \nu_{\Gamma} \pm 1/T$ ). Знак «+» или «-» в записанной формуле определяется следующим образом: если при увеличении частоты  $\nu_{\Gamma}$  генератора период биений, наблюдаемых на экране, увеличивается, то тогда в формуле выбирается «+» ( $\nu_{\Gamma} < \nu$ ), в противном случае — «-» ( $\nu_{\Gamma} > \nu$ ).

#### 5.7.4. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

Пусть тело (м. т.) одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$

$$x = A_1 \cos \omega_1 t, \quad y = A_2 \cos (\omega_2 t + \Delta\varphi). \quad (5.33)$$

В общем случае в результате сложения этих колебаний материальная точка будет двигаться по траектории, определяемой соотношением их частот ( $\omega_2, \omega_1$ ), амплитуд ( $A_1, A_2$ ) и разности начальных фаз  $\Delta\varphi$ . Эти траектории можно описать уравнениями, которые не содержат явно время  $t$  и определяют зависимость координаты  $y$  от  $x$ . Форма этих траекторий и уравнения, описывающие их, и представляют интерес при таком сложении колебаний.

Рассмотрим некоторые примеры сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

**Пример 1.**  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\Delta\varphi = 0, \pi$ .

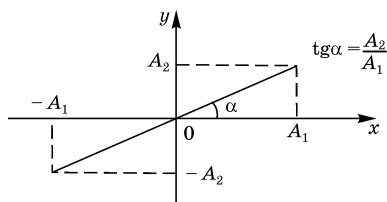
Делим одно уравнение (5.33) на другое и получим

$$y = \frac{A_2}{A_1} x,$$

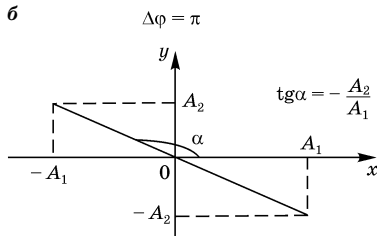
то есть траектория результирующего движения представляет собой прямую линию, лежащую в первой и третьей четвертях (рис. 5.11а).

Если разность фаз  $\Delta\varphi$  складываемых колебаний равна  $\pi$ , то тогда прямая линия будет располагаться во второй и четвертой четвертях (рис. 5.11б). Угол  $\alpha$  на рис. 5.11 — это угол наклона прямой к оси  $Ox$ , он определяется

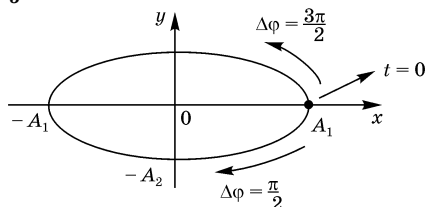
а



б



в



г

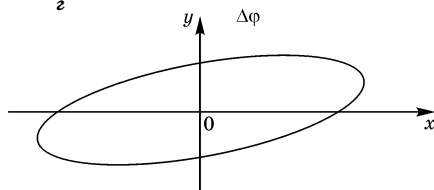


Рис. 5.11

отношением амплитуд складываемых колебаний ( $\Delta\varphi = 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = A_2/A_1$ ,  $\Delta\varphi = \pi$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -A_2/A_1$ ). Получаемое при этом движение материальной точки является гармоническим колебанием, так как изменение координаты  $r$ , определяющей положение м. т. на траектории движения, происходит по гармоническому закону

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega t.$$

Такое движение м. т. также называют **линейно поляризованным колебанием**. Оно повторяется через время, равное периоду складываемых колебаний  $T = 2\pi/\omega$ .

**Пример 2.**  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ :

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{A_2} = \mp \sin \omega t, \quad \leftarrow \rightarrow \text{ для } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 1,$$

то есть траектория результирующего движения является эллипсом, оси которого совпадают с осями  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 5.11в). В этом случае результирующее движение материальной точки, движущейся по эллипсу, называют **эллиптически поляризованным колебанием** (для одинаковых амплитуд колебаний  $A_1 = A_2$  траектория движения становится окружностью, и движение м. т. называют **колебаниями, поляризованными по кругу**). Такие движения повторяются через время, равное периоду складываемых гармонических колебаний ( $T = 2\pi/\omega$ ).

Рассмотрим направление движения материальной точки по эллиптической траектории. В момент времени  $t = 0$  м. т. находится в точке с координатами  $x = A$ ,  $y = 0$ . Для  $\Delta\varphi = \pi/2$  ее движение по эллиптической траектории будет происходить по направлению движения часовой стрелки, и соответственно против движения часовой стрелки — для  $\Delta\varphi = 3\pi/2$ .

Действительно, если  $\Delta\varphi = \pi/2$ , то тогда для малых значений времени  $t$  координата  $y$  будет меньше нуля ( $y = -\sin \omega t < 0$ ), что соответствует движению по часовой стрелке.

Если взять произвольное значение  $\Delta\varphi$  ( $\Delta\varphi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ), то тогда траектория результирующего движения будет также эллипсом, но ориентация его осей будет зависеть от амплитуды складываемых колебаний и разности фаз  $\Delta\varphi$  (рис. 5.11з).

Действительно

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_1} &= \cos \omega t, \quad \frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \cos \omega t \cos \Delta\varphi + \sin \omega t \sin \Delta\varphi = \\ &= \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi + \sqrt{1 - (x/A_1)^2} \sin \Delta\varphi \Rightarrow \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2 \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Приведенные на рис. 5.11 траектории движения материальной точки называют **фигурами Лиссажу**. В общем случае они получаются при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, отношение циклических частот которых является кратным отношением целых чисел ( $\omega_1 = n\omega$ ,  $\omega_2 = m\omega$ ,  $\omega_2/\omega_1 = n/m$ ;  $n, m$  — целые числа). Тогда за промежуток времени, равный наименьшему кратному периодов двух складываемых колебаний  $T_1 = 2\pi/(n\omega)$  и  $T_2 = 2\pi/(m\omega)$ , движущаяся материальная точка возвращается в начальное положение — получается замкнутая линия. Она называется фигурой Лиссажу.

Если в рассмотренных примерах угловые частоты складываемых колебаний незначительно отличаются друг от друга ( $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$ ), то такое различие в частотах можно трактовать как медленное изменение во времени разности фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2(t) + \Delta\varphi) - \omega_1 t = \Delta\omega t + \Delta\varphi.$$

В результате вид фигуры Лиссажу будет непрерывно изменяться, принимая вид траекторий движения, изображенных на рис. 5.11. Поэтому наблюдаемое во времени изменение фигуры Лиссажу означает, что частоты складываемых колебаний неодинаковы.

**Пример 3.**  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,  $\Delta\varphi = 0$ :

$$y = A_2 \cos 2\omega_1 t = A_2 (2\cos^2 \omega_1 t - 1) = A_2 \left[ 2\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 - 1 \right],$$

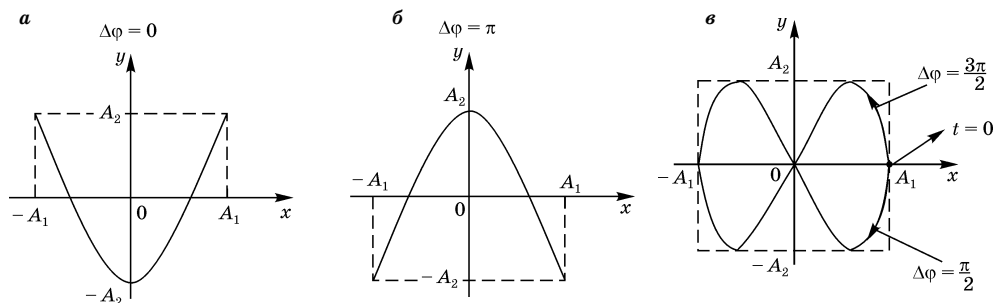


Рис. 5.12

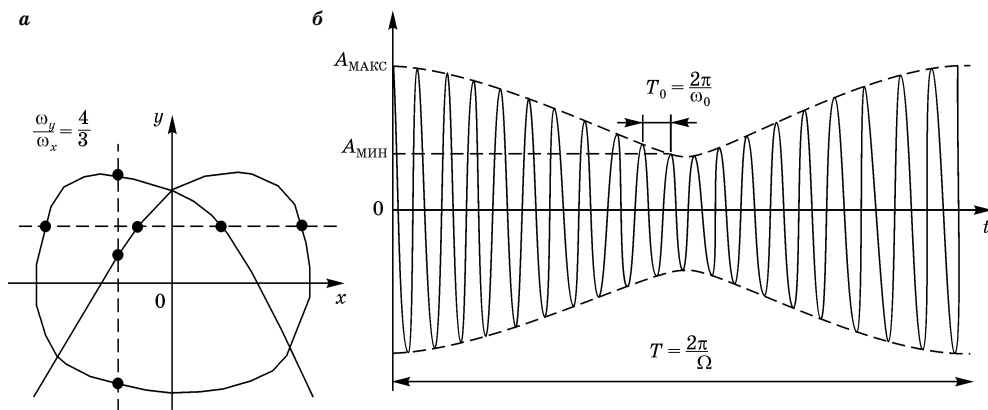


Рис. 5.13

что дает фигуру Лиссажу в виде параболы (рис. 5.12б). При других значениях разности фаз получаются фигуры Лиссажу, вид которых приведен на рис. 5.12б, в.

Отметим, что фигуры Лиссажу можно применять для определения частоты какого-либо гармонического колебания (сигнала). Для этого нужно на входы  $x$  и  $y$  осциллографа подать два сигнала — два гармонических колебания с известной (оно поступает от генератора электромагнитных колебаний, частоту этого колебания можно плавно изменять) и неизвестной частотами. Изменяя частоту генератора, можно добиться устойчивой фигуры Лиссажу и, зная по ее виду отношение частот складываемых колебаний (отношение частот равно отношению числа пересечений фигуры Лиссажу прямыми, параллельными осям координат, рис. 5.13а), определить неизвестную частоту.

#### \*5.7.5.

#### МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Под **модуляцией колебаний** понимают медленное (по сравнению с периодом колебаний) изменение по определенному закону его амплитуды, частоты или фазы. Различают амплитудную, частотную или фазовую модуляции.

В случае амплитудной модуляции амплитуду гармонического колебания  $x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  можно изменять, например, по гармоническому закону —  $A(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t)$ . Тогда модулированное колебание может быть записано в следующем виде:

$$x = A_0(1 + m \cos \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.34)$$

где частота изменения амплитуды  $\Omega$  (ее называют частотой модуляции, она описывает скорость изменения амплитуды колебания) должна быть во много раз меньше, чем циклическая частота  $\omega_0$ . График такого модулированного колебания представлен на рис. 5.13б.

Параметр  $m$ , входящий в формулу (5.34), называют **глубиной модуляции**. Он определяет разность между максимальным и минимальным значениями амплитуды модулированного колебания:

$$m = (A_{\text{макс}} - A_{\text{мин}}) / (A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}}) < 1. \quad (5.35)$$

Амплитудно-модулированное колебание можно представить в виде суммы трех гармонических колебаний с циклическими частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$  ( $\omega_0$  называют **несущей частотой**, а две остальные — **боковыми частотами**) и с амплитудами  $A_0$ ,  $mA_0/2$  и  $mA_0/2$  соответственно:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} mA_0 \sin((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0) + \frac{1}{2} mA_0 \sin((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0). \quad (5.36)$$

Модулированные колебания применяются для передачи информации с помощью электромагнитных волн радио- или оптического диапазонов, а также акустических волн. Любая передающая радиостанция, работающая в режиме амплитудной модуляции, излучает не одну частоту, а спектр частот — несущую и две боковые. Если модулирующий сигнал более сложный, то вместо двух боковых частот будут две боковые полосы. Поэтому каждая передающая станция занимает определенный частотный интервал; для радиовещания ширина боковой полосы составляет 10 кГц.

### \*5.8.

## СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СИГНАЛОВ

Как известно, общий подход к анализу сложных процессов и явлений заключается в их разложении на более простые процессы и явления. Этот же подход может быть применен к анализу периодических процессов, учитывая, что наиболее простыми среди периодических функций являются гармонические колебания.

Любое сложное колебание можно представить в виде суммы гармонических колебаний, их называют **гармониками**. Разложение сложного колеба-

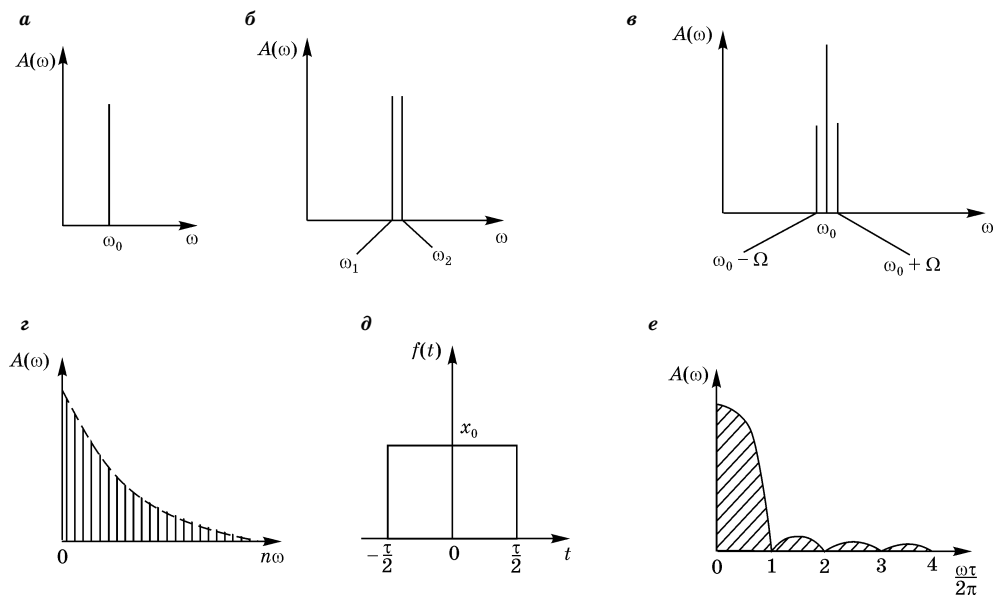


Рис. 5.14



ния на гармонические колебания (без учета их фаз) называется **спектральным разложением**. Диаграмму, изображающую зависимость амплитуды каждой гармоники от ее частоты, называют **спектром сложного колебания**, или **спектром амплитуд**.

В качестве примера приведем спектры амплитуд для различных периодических колебаний  $f(t)$ .

**1. Гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ :**  $f(t) = A \cos \omega_0 t$ .

Спектр амплитуд для такой функции представляет собой одну линию амплитуды  $A$  на частоте  $\omega_0$  (рис. 5.14а).

**2. Биения** (частный случай одинаковых амплитуд складываемых колебаний —  $A_1 = A_2 = A$ ):

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Спектр амплитуд представляет собой две близко расположенные линии с амплитудами  $A$  и с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 5.14б).

**3. Амплитудно-модулированное колебание:**

$$f(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Как следует из формулы (5.36), спектр этого колебания представляет собой три линии с частотами  $\omega_0 - \Omega$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_0 + \Omega$  и с амплитудами  $mA_0/2$ ,  $A$  и  $mA_0/2$  соответственно (рис. 5.14в).

**4. Наиболее общий случай — произвольная периодическая функция  $f(t)$ .** Здесь спектр амплитуд не будет таким простым, как в приведенных выше примерах. В математике доказывается, что при условиях, которые обычно выполняются в физических задачах, периодическую функцию  $f(t)$  с периодом  $T$  (см., например, рис. 5.1б) можно представить в виде суперпозиции бесконечного числа гармонических колебаний, частоты которых образуют дискретную последовательность. Эти частоты кратны основной циклической частоте  $\omega$  ( $\omega = 2\pi/T$ ) изменения функции  $f(t)$  и принимают значения  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  и т. д. Такая сумма называется **рядом Фурье**, или **гармоническим разложением сложного периодического колебания**:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \quad (5.37)$$

где коэффициенты Фурье  $A_n$ ,  $\varphi_n$  определяются видом функции  $f(t)$ .

Совокупность величин  $A_n$  называется **спектром амплитуд** функции  $f(t)$ , а совокупность  $\varphi_n$  — **спектром фаз**. Слагаемое ряда Фурье с частотой  $\omega$  называют **первой (основной) гармоникой**, а остальные — **высшими** (второй, третьей и т. д.) **гармониками** или **обертонами** функции  $f(t)$ .

В качестве примера приведем спектр амплитуд пилообразной периодической функции  $f(t)$  (она приведена на рис. 5.1б), временная зависимость которой описывается следующим образом:

$$nT < t < (n+1)T: f(t) = x_0((n+1)T - t)/T, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Можно показать, что коэффициенты Фурье в этом случае

$$A_n = x_0/(\pi \cdot n), \quad \varphi_n = \pi/2.$$

Спектр амплитуд для такой периодической функции приведен на рис. 5.14г. Он представляет собой бесконечный дискретный набор гармоник, амплитуды которых убывают обратно пропорционально номеру гармоники.

**5. Функция  $f(t)$  не является периодической функцией времени.** Тогда она также может быть представлена в виде бесконечной суммы гармонических колебаний, но в этом случае их частоты образуют **непрерывную последовательность**. Эта сумма будет записываться в виде **интеграла Фурье**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega; \quad (5.38)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad A(\omega) = 2|F(\omega)|, \quad \tan \varphi(\omega) = -\operatorname{Im} F(\omega) / \operatorname{Re} F(\omega). \quad (5.39)$$

Величины  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  представляют амплитудный спектр и фазовый спектр функции  $f(t)$ . Функцию  $F(\omega)$  называют Фурье-образом функции  $f(t)$ , ее комплексным спектром или просто спектром  $f(t)$ . Функция  $F(\omega)$  полностью определяет функцию  $f(t)$  и эквивалентна ее амплитудному и фазовому спектрам.

При записи формул (5.38) и (5.39) была использована формула Эйлера для комплексного представления гармонического колебания:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha, \quad (5.40)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $i = \sqrt{-1}$ .

Следует помнить, что комплексная форма записи гармонических колебаний удобна при проведении расчетов или математических выкладок. При переходе от комплексной формы записи к реальной функции берут вещественную часть комплексного числа:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.41)$$

В качестве примера непериодической функции  $f(t)$  можно привести изолированный прямоугольный импульс высотой  $x_0$ , ограниченный интервалом времени  $\tau$  (рис. 5.14д). Спектр амплитуд такого импульса является сплошным (рис. 5.14е), причем

$$A(\omega) = 2x_0\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|, \quad \varphi(\omega) = 0. \quad (5.42)$$

Таким образом, периодические функции характеризуются дискретными спектрами амплитуд, а непериодические — непрерывными спектрами.

Ограниченные во времени непериодические функции представляют собой **импульсные сигналы** (их еще называют **импульсами**), для которых можно ввести понятия продолжительности импульса  $\Delta t$  и ширины спектра импульса  $\Delta\omega$ .

Первое — это промежуток времени, в течение которого амплитуда импульса существенно отличается от нуля, а второе — интервал частот, на котором амплитуда спектра существенно отличается от нуля.

Можно показать, что ширина спектра импульса  $\Delta\omega$  обратно пропорциональна его продолжительности  $\Delta t$ . Действительно, на рассмотренном выше примере прямоугольного импульса можно записать приближенное равенство

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi, \quad (5.43)$$

где за ширину спектра  $\Delta\omega$  была принята частота, при которой впервые амплитуда спектра обращается в ноль:  $\omega_1\tau/(2\pi) = 1 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/\tau$ ,  $\Delta t = \tau$  (рис. 5.14e). Равенство (5.43) часто используется для приближенной оценки ширины частотного спектра различных импульсов.

В заключение отметим, что исследование спектрального состава временных процессов, представление их в виде набора самого простого вида колебаний — гармонических — имеет ряд неоспоримых преимуществ и поэтому широко применяется во многих разделах не только физики, но и других естественных наук. К таким преимуществам можно отнести, например, простую и наглядную классификацию временных процессов по спектру их амплитуд; методику анализа распространения различных сигналов в средах, по изменению частотного спектра сигнала; целенаправленное изменение временных сигналов по преобразованию их частотного спектра и т. д.

## 5.9. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 5.9.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ, ЕГО РЕШЕНИЕ

Затухающие колебания происходят в замкнутой механической системе ( $F_{\text{внеш}} = 0$ ), в которой имеются потери энергии на преодоление сил сопротивления ( $\beta \neq 0$ ), или в закрытом колебательном контуре ( $U_{\text{внеш}} = 0$ ), где наличие сопротивления  $R$  приводит к потерям энергии колебаний на нагревание проводников ( $\beta \neq 0$ ). В этом случае общее дифференциальное уравнение колебаний (5.1) примет вид

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad (5.44)$$

Решением уравнения (5.44) являются затухающие колебания

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0), \quad (5.45)$$

где амплитуда колебаний  $A(t)$  убывает со временем по экспоненциальному закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad A_0 = q_m, \quad (5.46)$$

а циклическая частота затухающих колебаний  $\omega_3$  определяется формулой

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (5.47)$$

из которой следует, что  $\omega_3 < \omega_0$ .

Графики зависимости от времени  $t$  амплитуды  $A(t)$  и заряда  $q(t)$  на обкладках конденсатора приведены на рис. 5.15.

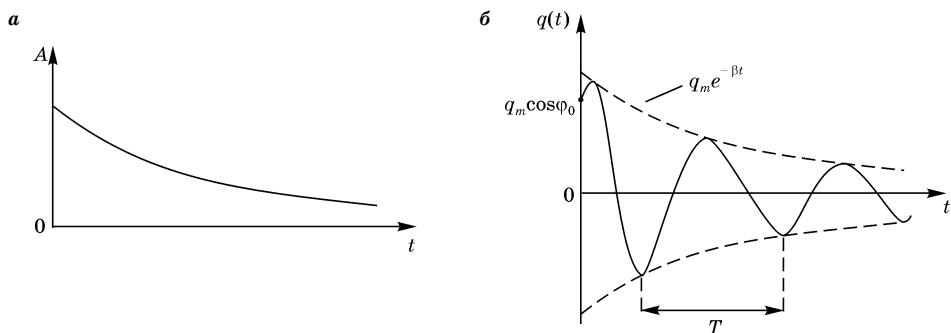


Рис. 5.15

В случае механической системы по таблице аналогий 5.1 можно получить уравнения, подобные уравнениям (5.44) и (5.45):

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0; \quad (5.48)$$

$$x(t) = x_m e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0). \quad (5.49)$$

Отметим, что для получения затухающих колебаний вида (5.49) необходимо, чтобы сила сопротивления, действующая в механической системе, была пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{\text{сопр}X} = -rv_X = -rx'. \quad (5.50)$$

Только в этом случае получается дифференциальное уравнение затухающих колебаний вида (5.48). Формула (5.50) справедлива для небольших числовых значений скоростей движения тела (м. т.).

В заключение отметим, что из-за уменьшения с течением времени амплитуды колебаний затухающие колебания не являются периодическими. Но при малом затухании под **периодом** (его также называют **условным периодом**) можно понимать минимальное время, за которое повторяются минимальные значения или максимальные значения величин, описывающих колебательное движение (рис. 5.15). Аналогично **циклическую частоту** затухающих колебаний называют **условной циклической частотой**.

### 5.9.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ, ВВОДИМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим кратко величины, вводимые для описания затухающих колебаний.

**1. Критическое сопротивление контура  $R_K$  (критический коэффициент сопротивления среды  $r_K$ )** — это такое сопротивление, при котором в контуре начинается **апериодический разряд**. В этом случае колебания в контуре отсутствуют, заряд на обкладках конденсатора убывает монотонно до нуля (кривая 1 на рис. 5.16) или, пройдя один раз положение равновесия, заряд конденсатора в итоге монотонно будет убывать до нуля (кривая 2 на рис. 5.16).

Убывание заряда  $q$ , смещение тела  $x$  в механической системе по кривым 1 или 2 либо по кривой, расположенной между ними, зависят от началь-

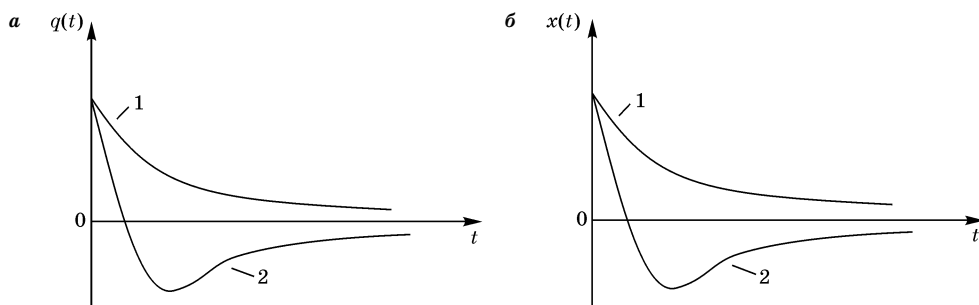


Рис. 5.16

ных условий. Например, если поместить физический маятник в жидкую вязкую среду и, отклонив его от положения равновесия, отпустить без начальной скорости, то тогда смещение  $x(t)$  маятника будет изменяться по кривой 1 (рис. 5.16б). Если же отпустить маятник с начальной скоростью, направленной к положению равновесия, то тогда его смещение может со временем изменяться по кривой 2 (рис. 5.16б), то есть он пройдет один раз положение равновесия, затем отклонится и после этого будет монотонно приближаться к положению равновесия.

Выведем формулу для критического сопротивления контура  $R_K$  через параметры контура  $L$  и  $C$ . При увеличении сопротивления  $R$  угловая частота затухающих колебаний будет уменьшаться, а период колебаний  $T_3$  будет возрастать и для сопротивления  $R$ , равного  $R_K$ , можно записать:

$$R = R_K: \omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0, T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \infty, \omega_0 = \beta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R_K}{2L},$$

$$R_K = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.51)$$

Для  $R \geq R_K$  в контуре наблюдается аperiодический разряд, а при  $R < R_K$  в контуре происходят затухающие колебания.

По табл. 5.1 для критического коэффициента сопротивления среды  $r_K$  можно записать ( $L \rightarrow m, 1/C \rightarrow K$ ):

$$r_K = 2\sqrt{mk}. \quad (5.52)$$

**2. Время релаксации  $\tau$**  — это время, в течение которого амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз ( $e$  — основание натурального логарифма):

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e, A(t) = A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.53)$$

За время релаксации в системе совершается  $N_e$  полных колебаний:

$$N_e = \frac{\tau}{T_3} = \frac{1}{\beta T_3}. \quad (5.54)$$

**3. Логарифмический декремент затухания  $\delta$**  равен натуральному логарифму отношения двух амплитуд, взятых через период:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_3)} = \beta T_3 = \frac{1}{N_e}. \quad (5.55)$$

**4. Добротность системы  $Q$**  можно ввести как величину, определяющую потери энергии колебаний системы за один условный период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T_3)}. \quad (5.56)$$

Полная энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому выражение (5.56) можно записать в следующем виде:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T_3)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}. \quad (5.57)$$

Из формулы (5.56) следует, что чем выше  $Q$ , тем медленнее в ней затухают колебания. Приведем ориентировочные значения  $Q$  для различных систем: колебательный контур на радиочастотах ( $\omega \sim 10^6$  рад/с):  $Q \sim 100$ ; полый резонатор диапазона сверхвысоких частот ( $\omega \sim 10^{11}$  рад/с):  $Q \sim 10^5$ ; камертон:  $Q \sim 10^4$ ; колебания кварцевой пластины:  $Q \sim 10^5$ ; излучение атома как колебательной системы:  $Q \sim 10^7$ .

Как видно, для применяемых на практике систем  $Q \geq 100$ , то есть для них выполняются **условия малого затухания**:

$$Q \gg 1 \Rightarrow \beta \ll \omega_0, \omega \cong \omega_0, T_3 = T, \delta = \beta T \ll 1.$$

Тогда из формулы (5.57) получим ( $e^x \approx 1 + x$ ,  $x \ll 1$ ):

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\tau}{T} = \pi N_e = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (5.58)$$

Для добротности механической системы и колебательного контура из формулы (5.58) в условиях малого затухания можно получить следующие формулы:

$$Q = \frac{r_k}{2r} = \frac{\sqrt{mk}}{r} = \frac{k}{\omega_0 r} = \frac{\omega_0 m}{r}, \quad Q = \frac{R_K}{2R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (5.59)$$

## 5.10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 5.10.1. УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ, ИХ РЕШЕНИЯ

Под **вынужденными колебаниями** понимают колебания, происходящие в системе в результате внешнего воздействия (внешней силы или внешнего напряжения), изменяющегося со временем по гармоническому закону. При этом колебания в системе происходят на циклической частоте  $\omega$  внешнего воздействия, а амплитуды колебаний различных величин в системе будут зависеть от этой частоты.

Рассмотрим дифференциальное уравнение и его решение для вынужденных колебаний, происходящих в колебательном контуре под действием внешнего напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$U_{\text{внеш}} = U_m \cos \omega t. \quad (5.60)$$

В этом случае дифференциальное уравнение (5.1) примет следующий вид:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (5.61)$$

Известно, что решением этого уравнения является следующее выражение:

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (5.62)$$

Из формулы (5.62) следует, что первое слагаемое представляет собой уравнение свободных затухающих колебаний системы и амплитуда этих колебаний с течением времени уменьшается. Если взять время  $t$  больше времени установления стационарного режима колебаний в контуре ( $t > t_{\text{уст}}$ ), то тогда в выражении (5.62) останется только второе слагаемое (первым слагаемым можно пренебречь), которое представляет собой уравнение вынужденных колебаний заряда  $q$  на обкладках конденсатора

$$t > t_{\text{уст}}: q(t) q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (5.63)$$

Аналогичные уравнения можно записать для напряжения  $U_C$  на конденсаторе и силы тока  $I$  в контуре:

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm} \cos(\omega t - \psi), \quad I = q' = -I_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.64)$$

Как уже отмечалось, амплитуды колебаний этих величин зависят от частоты внешнего напряжения  $\omega$ , такие зависимости называют **резонансными кривыми**:

$$q_m = q_m(\omega), \quad U_{Cm} = U_{Cm}(\omega), \quad I_m = I_m(\omega).$$

Выведем для них формулы, с этой целью используем формулу Эйлера (5.40) для комплексной формы записи гармонического колебания:

$$q(t) = q_m \cos(\omega t - \psi) = q_m e^{i(\omega t - \psi)}, \quad q' = i\omega q_m e^{i(\omega t - \psi)}, \quad q'' = -\omega^2 q_m e^{i(\omega t - \psi)}, \\ U_{\text{внеш}} = U_m \cos \omega t = U_m e^{i\omega t}.$$

Подставим эти выражения в формулу (5.61):

$$q_m e^{i\omega t} e^{-i\psi} (-\omega^2 + 2\beta\omega i + \omega_0^2) = \frac{U_m}{L} e^{i\omega t}, \\ q_m ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta\omega i) = \frac{U_m}{L} e^{i\psi} = \frac{U_m}{L} \cos \psi + i \frac{U_m}{L} \sin \psi.$$

Два комплексных числа равны, если будут равны их вещественные и мнимые части, поэтому

$$q_m (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{U_m}{L} \cos \psi, \quad q_m 2\beta\omega = \frac{U_m}{L} \sin \psi. \quad (*)$$

Возведем каждое уравнение (\*) в квадрат, сложим их и получим

$$q_m = \frac{U_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (5.65)$$

Разделим уравнения (\*) одно на другое, что приводит к формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.66)$$

Используя выражение (5.65), запишем:

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}; \quad (5.67)$$

$$I_m = \omega q_m = \frac{\omega U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (5.68)$$

Рассмотрим подробнее резонансные кривые для амплитуды напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}(\omega)$  и амплитуды силы тока  $I_m(\omega)$  в контуре.

### 5.10.2. РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ НАПРЯЖЕНИЯ НА КОНДЕНСАТОРЕ, ДЛЯ АМПЛИТУДЫ СМЕЩЕНИЯ В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Исследуем функцию  $U_{Cm}(\omega)$  (5.67) для различных значений угловой частоты внешнего напряжения  $\omega$ .

$$1. \omega = 0: U_{Cm}(0) = \frac{U_m}{LC\omega_0^2} = \left| \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right| = U_m,$$

то есть постоянное напряжение, подаваемое в контур, представляет собой напряжение на конденсаторе или все резонансные кривые для частоты  $\omega$ , равной нулю ( $\omega = 0$ ), выходят из одной точки.

$$2. \omega \rightarrow \infty: U_{Cm} \rightarrow \frac{U_m}{LC\omega^2} \rightarrow 0,$$

то есть при больших частотах внешнего воздействия все резонансные кривые стремятся к нулю. Это связано с тем, что система не успевает за изменениями внешнего воздействия и амплитуда колебаний в контуре уменьшается.

3.  $\omega = \omega_p$ . Найдем угловую частоту  $\omega_p$ , при которой зависимость  $U_{Cm}(\omega)$  имеет максимальное значение. Оно наблюдается в том случае, когда выражение под знаком квадратного корня в формуле (5.67) будет минимальным. Поэтому

$$\begin{aligned} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_p &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Подставляя  $\omega_p$  в формулу (5.67) для максимального значения амплитуды напряжения на конденсаторе получим

$$U_{Cm}(\omega_p) = \frac{U_m}{2LC\beta\omega_3}. \quad (5.70)$$

Величина  $\omega_p$  получила название резонансной частоты. В условиях малого затухания ( $Q \gg 1$ ) для  $\omega = \omega_p$  можно записать:



$$U_{Cm}(\omega_p) = U_m Q \left( \frac{\omega_0}{\omega_3} \right)^2 = U_m Q U_{Cm}(\omega_p) \gg U_m, \quad (5.71)$$

то есть амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе во много раз превышает амплитуду внешнего напряжения, подаваемого в контур. Это явление получило название **резонанса**, под которым понимают *резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего воздействия к частоте собственных свободных незатухающих колебаний системы*.

На рис. 5.17а приведены резонансные кривые  $U_{Cm}(\omega)$  для идеального колебательного контура ( $R = 0, \beta = 0$ ) и для двух значений сопротивления  $R$  в нем ( $R_2 > R_1$ , то есть  $\beta_2 > \beta_1$ ). При этом считается, что индуктивность  $L$  катушки и емкость  $C$  конденсатора контура не изменяются, то есть частота  $\omega_0$  при этом остается неизменной.

Можно отметить, что для идеального колебательного контура максимум резонансной кривой  $U_{Cm}(\omega)$  приходится на частоту  $\omega$ , равную  $\omega_0$ , причем максимальное значение при этом стремится к бесконечности (рис. 5.17а). При увеличении сопротивления  $R$  контура коэффициент затухания  $\beta$  увеличивается, а максимальное значение  $U_{Cm}(\omega_p)$  и частота  $\omega_p$ , на которую он приходится, уменьшаются (рис. 5.17а).

В случае механической системы резонансную кривую  $x_m(\omega)$  для амплитуды смещения груза (м. т.) от положения равновесия можно получить, используя таблицу аналогий 5.1:

$$U_{\text{внеш}} = U_m \cos \omega t \rightarrow F_{\text{внеш } x} = F_m \cos \omega t, \\ q_m(\omega) \rightarrow x_m(\omega) = \frac{F_m}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad x_m(0) = \frac{F_m}{k}, \quad x_m(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0; \quad (5.72)$$

$$q_m(\omega_p) = C U_{Cm}(\omega_p) = \frac{U_m}{2L\beta\omega_3} \rightarrow x_m(\omega_p) = \frac{F_m}{2m\beta\omega_3}. \quad (5.73)$$

Графики резонансных зависимостей  $x_m$  от  $\omega$  для различных значений коэффициента затухания  $\beta$ , то есть при различных значениях коэффициента сопротивления среды  $r$  и постоянной частоты  $\omega_0$ , приведены на рис. 5.17б.

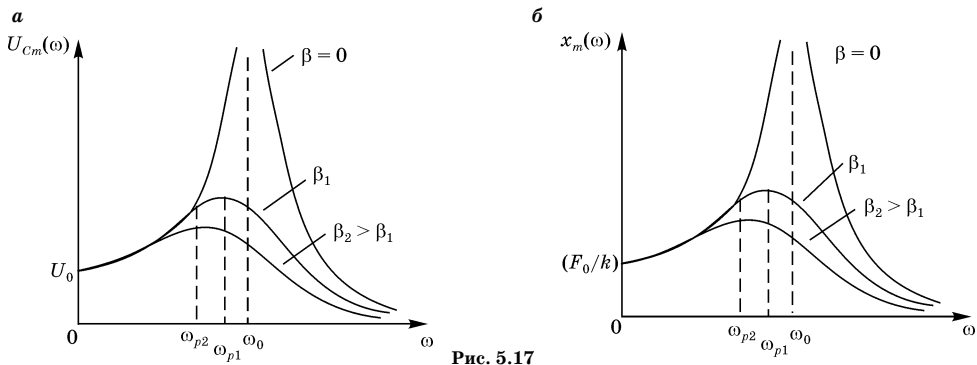


Рис. 5.17

**5.10.3.**  
**РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ**  
**ДЛЯ АМПЛИТУДЫ СИЛЫ ТОКА В КОНТУРЕ,**  
**ДЛЯ АМПЛИТУДЫ СКОРОСТИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**  
**В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ**

Запишем формулу (5.68) для амплитуды силы тока  $I_m(\omega)$  в наиболее удобном виде:

$$I_m(\omega) = \frac{U_m}{L \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2}}$$

и исследуем эту зависимость для различных значений  $\omega$ .

1.  $\omega = 0$ :  $I_m(0) = 0$ , то есть постоянный электрический ток через цепь, содержащую конденсатор, не протекает;

2.  $\omega \rightarrow \infty$ :  $I_m(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{U_m}{L\omega} \rightarrow 0$ ;

3. Максимум функции  $I_m(\omega)$  наблюдается тогда, когда подкоренное выражение в знаменателе будет минимальным, то есть первое слагаемое в подкоренном выражении должно быть равным нулю. Поэтому максимум  $I_m(\omega)$  соответствует  $\omega_p = \omega_0$ , а само максимальное значение

$$I_m(\omega_0) = \frac{U_m}{R}. \quad (5.74)$$

На рис. 5.18 приведены резонансные кривые  $I_m(\omega)$  в случае идеального колебательного контура ( $R = 0$ ,  $\beta = 0$ ) и для двух разных значений сопротивления  $R$  в нем ( $R_2 > R_1$ , то есть  $\beta_2 > \beta_1$ ) при постоянном значении  $\omega_0$ . Как видно, максимум функции с увеличением  $R$  уменьшается, а его смещение по оси частот  $\omega$  не происходит.

Используя таблицу аналогий 5.1, можно записать формулы, описывающие резонансные кривые для амплитуды колебаний скорости  $v_m(\omega)$  тела (м. т.) в механической системе:

$$I_m(\omega) \rightarrow v_m(\omega) = \frac{F_m \omega}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad (5.75)$$

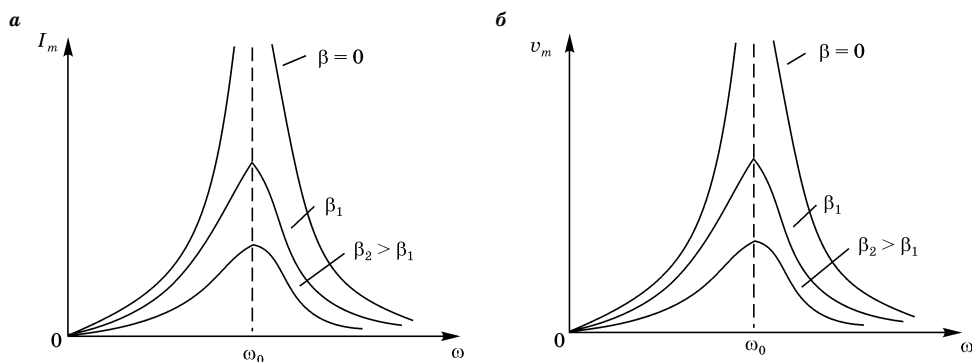


Рис. 5.18

$$\omega_P = \omega_0 : v_m(\omega_0) = \frac{F_m}{r}. \quad (5.76)$$

Графики  $v_m(\omega)$  для трех значений коэффициента сопротивления ( $r = 0$ ,  $r_2 > r_1 \neq 0$ ) среды приведены на рис. 5.18б. Эти графики аналогичны графикам резонансных кривых  $I_m(\omega)$ .

**5.10.4.  
РАЗНОСТЬ ФАЗ КОЛЕБАНИЙ  
МЕЖДУ СИЛОЙ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯМИ  
НА КОНДЕНСАТОРЕ, ИНДУКТИВНОСТЬЮ  
И АКТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ  
КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА.  
ФАЗОВЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ**

Перепишем формулы (5.64) для  $I$  и  $U_C$  в удобном виде:

$$I = q' = -I_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm} \cos(\omega t - \psi)$$

и добавим к ним формулы для  $U_L$  и  $U_R$ :

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{dI}{dt} = -U_{Lm} \sin\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \cos(\omega t - \psi + \pi), \\ U_R &= IR = U_{Rm} \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Найдем в соответствии с полученными формулами разность фаз колебаний между силой тока  $\varphi_I$  и напряжениями на конденсаторе  $\varphi_C$ , индуктивности  $\varphi_L$  и активном сопротивлении  $\varphi_R$ :

$$\Delta\varphi_{C,I} = (\varphi_C - \varphi_I) = (\omega t - \psi) - \left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}; \quad (5.78)$$

$$\Delta\varphi_{L,I} = (\varphi_L - \varphi_I) = (\omega t - \psi + \pi) - \left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \quad (5.79)$$

$$\Delta\varphi_{R,I} = (\varphi_R - \varphi_I) = (\omega t - \psi) - (\omega t - \psi) = 0. \quad (5.80)$$

Как следует из формул (5.78)–(5.80), фаза колебаний напряжения на конденсаторе отстает по фазе от колебаний тока в цепи на  $\pi/2$ , а фаза колебаний напряжения на катушке опережает фазу колебаний силы тока на  $\pi/2$ . Фазы колебаний напряжения на активном сопротивлении  $R$  и силы тока в цепи совпадают. Это наглядно видно на векторной диаграмме (рис. 5.19), где указаны амплитуды векторов напряжений на отдельных участках электрической цепи.

При этом фаза колебания силы тока в контуре принимается равной нулю, то есть

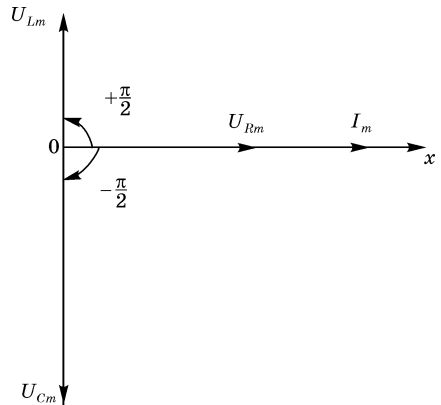


Рис. 5.19

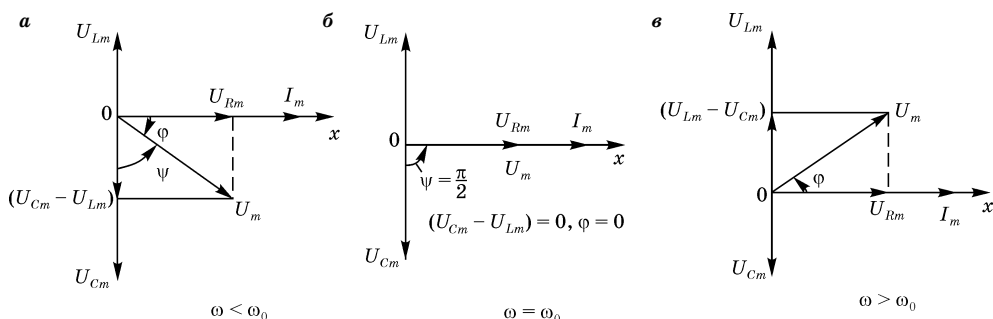


Рис. 5.20

амплитуда вектора силы тока располагается вдоль оси  $Ox$ . На такой диаграмме вектор амплитуды внешнего напряжения  $\vec{U}_m$ , подаваемого в колебательный контур, можно представить как сумму векторов амплитуд напряжений ( $\vec{U}_C, \vec{U}_L, \vec{U}_R$ ) на разных его участках. Это позволяет записать следующую формулу для модуля вектора амплитуды внешнего напряжения (например для частот  $\omega < \omega_0$ , рис. 5.20а)

$$U_m = \sqrt{(U_{Cm} - U_{Lm})^2 + U_R^2}, \quad (5.81)$$

из которой с учетом формул (5.19) и (5.20) ( $U_{Cm} = q_m/C$ ,  $U_{Lm} = L\omega^2 q_m$ ,  $U_{Rm} = \omega R q_m$ ) можно получить выражение (5.65) для зависимости амплитуды колебания заряда от частоты внешнего напряжения:

$$U_m = \sqrt{(q_m/C - L\omega^2 q_m)^2 + \omega^2 R^2 q_m^2} = q_m L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow q_m = \frac{U_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Под **фазовыми резонансными кривыми** понимают, например, зависимости разности фаз  $\Delta\varphi_{\text{внеш},C}$  между внешним напряжением  $U_{\text{внеш}}$  и напряжением  $U_C$  на конденсаторе, разности фаз  $\Delta\varphi_{\text{внеш},I}$  между внешним напряжением  $U_{\text{внеш}}$  и силой тока  $I$  в контуре от частоты  $\omega$  внешнего напряжения. Наиболее интересными из них являются зависимости  $\Delta\varphi_{\text{внеш},I}(\omega)$ , так как они позволяют выяснить эффективность поступления энергии в контур (колебательную систему). В соответствии с формулами (5.64) и (5.60) для разности фаз  $\Delta\varphi_{\text{внеш},C}$  и  $\Delta\varphi_{\text{внеш},I}$  можно записать:

$$\Delta\varphi_{\text{внеш},C} = \omega t - (\omega t - \psi) = \psi, \quad \Delta\varphi_{\text{внеш},I} = \omega t - \left( \omega t - \psi + \frac{\pi}{2} \right) = \psi - \frac{\pi}{2} = \varphi. \quad (5.82)$$

Отметим, что разность фаз  $\Delta\varphi_{\text{внеш},I}$  для цепей переменного тока обозначают буквой  $\varphi$ :  $\Delta\varphi = \varphi$ .

На рис. 5.21 приведены фазовые резонансные кривые  $\Delta\varphi_{\text{внеш},C}(\omega)$  и  $\Delta\varphi_{\text{внеш},I}(\omega) = \varphi(\omega)$ , построенные по формулам (5.66) и (5.82) при трех значениях параметра  $\beta$ :  $\beta = 0$ ,  $\beta_2 > \beta_1 \neq 0$ .

Из них следует, что внешнее напряжение опережает по фазе напряжение на конденсаторе на угол  $\psi$ . На векторной диаграмме это означает, что вектор

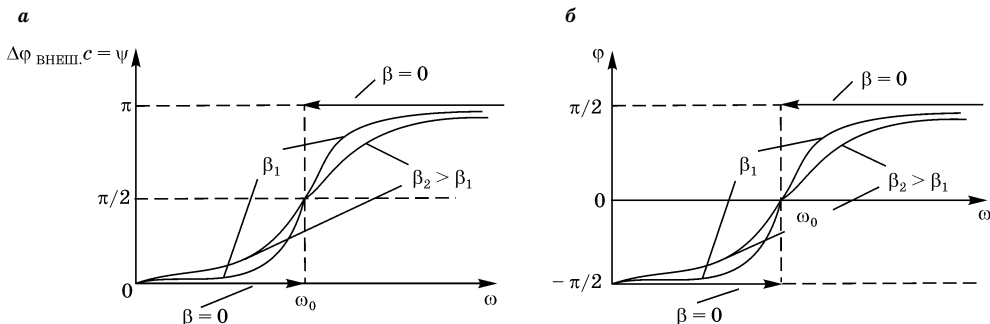


Рис. 5.21

амплитуды  $U_m$  располагается выше вектора амплитуды  $U_{Cm}$  (рис. 5.20). При этом угол  $\psi$  изменяется от нулевого значения для частоты  $\omega$ , равной нулю ( $\omega = 0$ ), до значения, равного  $\pi$ , при частоте внешнего напряжения, стремящегося к бесконечности ( $\omega \rightarrow \infty$ , рис. 5.21а). При резонансе амплитуды векторов внешнего напряжения  $U_m$  и напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}$  взаимно перпендикулярны (рис. 5.20б), что приводит к разности фаз между ними, равной  $\pi/2$  ( $\Delta\varphi_{\text{внеш},с} = \psi = \pi/2$ , рис. 5.21а).

Из другой фазовой резонансной кривой следует, что фаза внешнего напряжения для частот  $\omega < \omega_0$  отстает от фазы тока в контуре на угол  $\varphi$  (рис. 5.21б). Для частот  $\omega > \omega_0$  фаза внешнего напряжения опережает на угол  $\varphi$  фазу колебаний силы тока в контуре и при увеличении частоты  $\omega$  стремится к значению, равному  $\pi/2$ . При резонансе ( $\omega = \omega_0$ ,  $U_{Cm} = U_{Lm}$ ) фаза колебаний силы тока и внешнего напряжения совпадают, то есть  $\varphi(\omega_0) = 0$ , и вектора амплитуд  $U_m$  и  $I_m$  направлены одинаково вдоль оси  $Ox$  (рис. 5.21б). При этом энергия поступает в контур согласованно с колебаниями в ней. Действительно, учитывая выполнение условий малого затухания ( $Q \gg 1$ ) и формул (5.64) и (5.66), запишем:

$$\omega = \omega_P \cong \omega_0: \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega_P}{\omega_0^2 - \omega_P^2} = \frac{\omega_P}{\beta} \gg 1 \Rightarrow \psi \cong \frac{\pi}{2},$$

$$I = -I_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos \omega t, \quad U_{\text{внеш}} = U_m \cos \omega t.$$

Такое поступление энергии в контур при резонансе приводит к большим амплитудам колебаний, их числовые значения определяются диссипацией (рассеянием) энергии системы, то есть коэффициентом затухания  $\beta$  (формула (5.70)).

При частотах  $\omega$ , больших или меньших  $\omega_0$  ( $\omega < \omega_0$ ,  $\omega > \omega_0$ ), амплитуда вынужденных колебаний даже в отсутствие диссипации энергии ( $\beta = 0$ ) будет уменьшаться, она определяется расстройкой резонанса  $(\omega - \omega_0)$ , то есть разностью частот  $\omega$  и  $\omega_0$ .

Можно отметить, что с использованием таблицы аналогий можно построить фазовые резонансные кривые для разности фаз между скоростью колебаний тела и действующей на него внешней силой в случае механической системы и т. д.

### 5.10.5. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Переменный электрический ток также представляет собой вынужденные колебания силы тока, напряжения, происходящие в электрической цепи под действием напряжения, вырабатываемого генератором переменного тока на электростанциях. Электрическая цепь в этом случае представляет собой колебательный контур (рис. 5.3,  $U_{\text{внеш}} = U_m \cos \omega t$ ), и поэтому здесь применимы формулы, которые были получены в разделах 5.10.1–5.10.4.

Простейшей моделью генератора переменного тока является рамка площадью  $S$ , содержащая  $N$  витков, которая равномерно вращается в магнитном поле с угловой частотой  $\omega$  (рис. 5.22). Для максимальной ЭДС индукции  $\varepsilon_{im}$ , наводимой в такой рамке, можно получить следующее выражение:

$$\varepsilon_i = -N\Phi' = -N(BS \cos \omega t)' = NBS\omega \sin \omega t, \quad \varepsilon_{im} = NBS\omega. \quad (5.83)$$

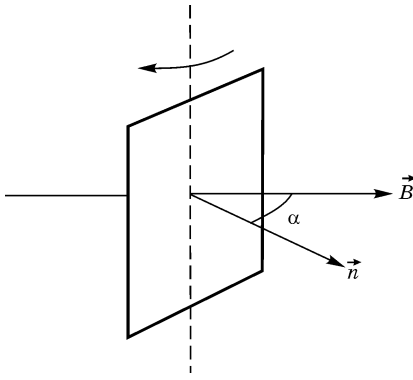


Рис. 5.22

Отметим, что линейная частота переменного тока в России составляет 50 Гц.

Перечислим вопросы и понятия, которые вводят для описания переменного тока в электрической цепи.

**1. Разность фаз колебаний между силой тока и напряжениями на конденсаторе, индуктивности и активном сопротивлении электрической цепи.** Как уже было отмечено раньше (см. 5.10.4), фаза колебаний напряжения на конденсаторе отстает по фазе от колебаний тока в цепи на  $\pi/2$ , а фаза колебаний напряжения на катушке опережает фазу колебаний силы тока на  $\pi/2$ . Фазы колебаний

напряжения на активном сопротивлении  $R$  и силы тока в цепи совпадают.

**2. Емкостное  $X_C$ , индуктивное  $X_L$ , активное  $R$ , реактивное  $X$  и полное  $Z$  сопротивления цепи.** В соответствии с законом Ома для однородного участка цепи по формулам (5.67) можно ввести емкостное  $X_C$  и индуктивное  $X_L$  сопротивления:

$$\begin{aligned} I_m &= \omega q_m, \quad U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{1}{\omega C} (q_m \omega) = X_C I_m, \\ U_{Lm} &= L q_m \omega^2 = (\omega L) (q_m \omega) = X_L I_m \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X_L = \omega L. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Они характеризуют способность катушки и конденсатора оказывать препятствие протеканию переменного электрического тока. Как видно из формул (5.84), при возрастании частоты переменного тока емкостное сопротивление  $X_C$  будет уменьшаться, то есть конденсатор оказывает меньшее препятствие протеканию тока, а индуктивное сопротивление  $X_L$  будет возрастать — катушка оказывает большее препятствие протеканию переменного

го тока. Постоянный ток через участок цепи, содержащий конденсатор, не протекает ( $\omega = 0$ :  $X_C = \infty$ ). Индуктивное сопротивление катушки в этом случае будет равно нулю ( $\omega = 0$ :  $X_L = 0$ ), то есть катушка не оказывает препятствия протеканию постоянного тока. Сопротивление  $R$ , которое ранее рассматривалось в разделе «Постоянный ток», называется здесь активным сопротивлением.

Учитывая введенные сопротивления, перепишем формулу (5.68) для резонансной кривой амплитуды силы тока в контуре следующим образом:

$$I_m = \frac{\omega U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{X^2 + R^2}} = \frac{U_m}{Z},$$

где введены реактивное  $X$  и полное  $Z$  сопротивления цепи:

$$X = X_L - X_C, \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{X^2 + R^2}. \quad (5.85)$$

**3. Мощность, потребляемая электрической цепью.** Учитывая разность фаз колебаний силы тока и внешнего напряжения в электрической цепи

$$\varphi = (\varphi_{\text{внеш}} - \varphi_I) = \left( \omega t - \left( \omega t - \psi + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \psi - \frac{\pi}{2},$$

для мгновенной мощности, потребляемой электрической цепью, получим

$$P = IU_{\text{внеш}} = I_m U_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

Ввиду малого периода колебаний переменного тока ( $T = 0,02$  с) многие приборы измеряют усредненные по времени значения мощности

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= I_m U_m \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \rangle = \\ &= I_m U_m \langle \cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Согласно векторной диаграмме (рис. 5.21)

$$U_m \cos \varphi = U_{Rm} = I_m R, \quad (5.87)$$

что приводит к следующему выражению для усредненной мощности:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m = \frac{1}{2} I_m^2 R. \quad (5.88)$$

**4. Эффективные (действующие) значения силы тока и напряжения** для гармонических колебаний вводятся по формулам

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{эф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad (5.89)$$

что позволяет переписать формулу (5.88) без коэффициента  $1/2$ ; это удобно при записи формул для средней мощности и количества теплоты в случаях переменного и постоянного тока:

$$\langle P \rangle = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}}, \quad Q = I_{\text{эф}}^2 R t.$$

Отметим, что многие амперметры и вольтметры измеряют эффективные (действующие) значения силы тока и напряжения.

**5. Коэффициент мощности.** Входящий в формулу (5.86) коэффициент  $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности. В соответствии с выражениями (5.85) и (5.87) для него можно записать

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad (5.90)$$

то есть он равен отношению активного  $R$  и полного  $Z$  сопротивлений электрической цепи.

Коэффициент мощности показывает зависимость мощности, выделяемой в электрической цепи переменного тока, от разности фаз колебаний силы тока в ней и внешнего напряжения, поступающего в цепь. Так, если реактивное сопротивление цепи будет равно нулю ( $X = 0$ ,  $Z = R$ ), то тогда  $\cos \varphi = 1$  и электрическая цепь полностью потребляет поступающую в нее энергию. При отсутствии же в цепи активного сопротивления ( $R = 0$ ,  $\cos \varphi = 0$ ) электрическая цепь энергии не потребляет. Это приводит к тому, что энергия, поступающая в цепь, передается по проводам обратно к источнику энергии, что приводит к ее потерям в подводящих проводах за счет выделения джоулевого тепла. На практике стремятся увеличить  $\cos \varphi$  до максимально возможных значений (обычно  $\cos \varphi > 0,85$ ).

#### 5.10.6. ЭНЕРГЕТИКА РЕЗОНАНСА. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОЯВЛЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ РЕЗОНАНСА В ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ

При резонансе энергия поступает в систему согласованно с колебаниями в ней, постоянно увеличивая их амплитуду. В стационарном режиме большая амплитуда колебаний поддерживается малыми поступлениями энергии в систему, восполняющими потери энергии колебаний (нагрев проводников, преодоление сил сопротивления, потери на излучение электромагнитных и механических волн) за один период. В системе при резонансе созданы наиболее благоприятные условия для реализации свойственных системе свободных незатухающих колебаний, поэтому амплитуда колебаний резко возрастает.

Рассмотрим некоторые примеры проявления резонанса в природе.

**Пример 1.** Солдаты проходят по мосту строевым шагом, частота ударов ног о поверхность моста может совпасть с собственной частотой колебаний моста как колебательной системы, наступает явление резонанса, при котором амплитуда колебаний моста постепенно нарастает и при больших числовых значениях может привести к его разрушению.

**Пример 2.** Вентилятор плохо прикреплен к потолку и своим вращением он создает толчки на потолок, частота которых может совпасть с собственной частотой колебаний комнаты (потолка) как колебательной системы, амплитуда колебаний потолка нарастает и может привести к его обрушению.

**Пример 3.** Приборы на кораблях максимально утяжеляют (делают тяжелыми подставки) и подвешивают на мягких пружинах (коэффициент жесткости для них будет малым). В этом случае частота качки корабля будет боль-



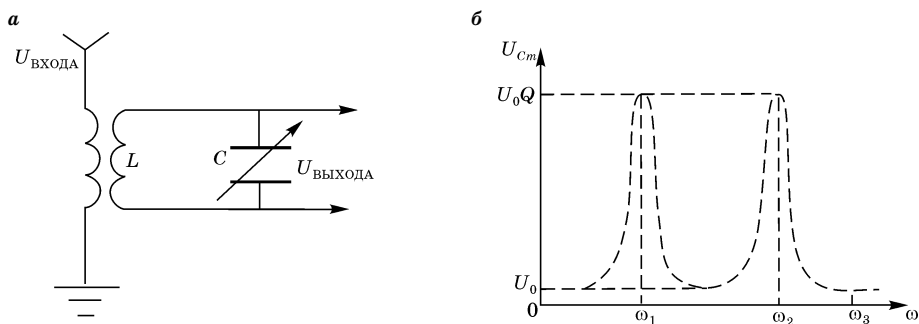


Рис. 5.23

ше собственной частоты колебаний ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ) приборов на пружинах и поэтому резонанса не наступает.

**Пример 4.** В радиоприемниках на основе явления резонанса можно выделить нужный сигнал из большого числа сигналов разных радиостанций, поступающих на его приемную антенну (рис. 5.23а).

Пусть на вход радиоприемника поступают сигналы малой амплитуды с различной несущей частотой  $\omega$ :

$$U_{\text{входа}} = U_C = QU_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t + U_{m3} \cos \omega_3 t + \dots \approx QU_{m1} \cos \omega_1 t + \dots$$

Выделим, например, сигнал с несущей частотой  $\omega_1$ . Для этого необходимо изменять емкость конденсатора до тех пор, пока частота  $\omega_0$  собственных свободных незатухающих колебаний приемного контура не совпадет с частотой  $\omega_1$  ( $\omega_0 = \omega_1$ ). Тогда за счет явления резонанса амплитуда сигнала с частотой  $\omega_1$  на выходе конденсатора резко возрастает, чего нельзя сказать про амплитуды остальных сигналов:

$$U_{\text{выхода}} = U_C = QU_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t + U_{m3} \cos \omega_3 t + \dots \approx QU_{m1} \cos \omega_1 t.$$

На рис. 5.23б сплошной линией показана резонансная кривая, максимум которой приходится на частоту  $\omega_1$ . Изменяя емкость конденсатора, можно настроить приемный контур антенны на несущую частоту  $\omega_2$  (на рис. 5.22б пик резонансной кривой смещается на частоту  $\omega_2$ ).

## 5.11. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. АВТОКОЛЕБАНИЯ

Под **нелинейными системами** понимают такие колебательные системы, свойства которых зависят от происходящих в них процессов. В таких системах существуют нелинейные связи, например в механической системе между силой упругости  $\vec{F}_y$  и смещением груза  $x$  относительно положения равновесия. Это приводит к нарушению закона Гука и к зависимости коэффициента  $k$  жесткости системы от смещения  $x$ , что изменяет собственную частоту колебаний системы  $\omega_0$ . В колебательном контуре нелинейные эффекты могут возникать между электрическими зарядами конденсатора и создаваемой ими

напряженностью поля, в частности это наблюдается, если поместить сегнетоэлектрик между пластинами конденсатора. Тогда под действием электрического поля сегнетоэлектрик изменяет свою диэлектрическую проницаемость и тем самым приводит к изменению емкости конденсатора в зависимости от подаваемого в контур напряжения, то есть к изменению собственной частоты колебаний контура  $\omega_0$  и. т. д.

**Все физические системы являются нелинейными системами.** При малых амплитудах колебаний (при малых отклонениях от положения равновесия) физические системы можно считать линейными, колебания в них описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, что и позволяет построить общую теорию колебаний.

Нелинейные эффекты в физических системах обычно проявляются при увеличении амплитуды колебаний — это приводит к тому, что собственные колебания системы (осциллятора) уже не будут гармоническими, а их частота  $\omega_0$  будет зависеть от амплитуды колебаний. Уравнения движения для них являются нелинейными, а такие системы называют ангармоническими осцилляторами (см. раздел 5.5).

Действительно, например, для малых отклонений потенциального поля от параболического вида ( $U(x) = kx^2/2 - gx^3/3 + \dots$ ) дифференциальное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx - gx^2 = mx'' \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x + \frac{g}{m}x^2,$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k(x)}{m}}, \quad k(x) = k + gx.$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx - 3\alpha x^2 = mx'' \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x + \frac{3\alpha}{m}x^2 = 0,$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k(x)}{m}}, \quad k(x) = k + 3\alpha x.$$

Из записанного дифференциального уравнения видно, что коэффициент жесткости зависит от амплитуды колебаний, что приводит к зависимости угловой частоты свободных незатухающих колебаний системы от амплитуды колебаний  $\omega_0 = \omega_0(x)$ .

Для больших отклонений от линейного поведения зависимость  $\omega_0(x)$  усложняется, и поэтому усложняются уравнения, описывающие колебания в системе.

*Для нелинейных систем, в отличие от линейных, нарушается принцип суперпозиции, согласно которому результирующий эффект от сложного процесса воздействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Изменение в нелинейных системах формы гармонического внешнего воздействия и нарушение принципа суперпозиции позволяют осуществлять с помощью таких систем генерирование и преобразование частоты электромагнитных колебаний — **выпрямление, умножение частоты, модуляцию колебаний** и. т. д.

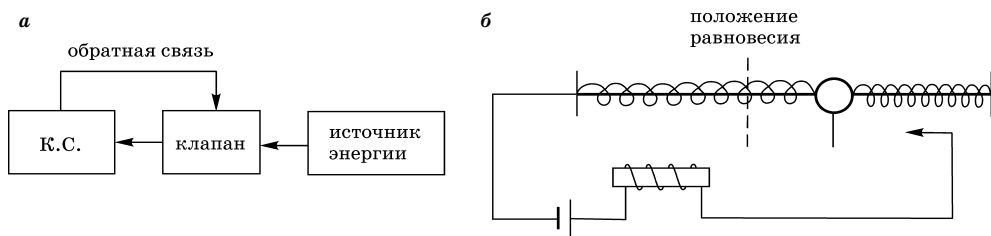


Рис. 5.24

Резонанс в такой нелинейной системе будет отличаться тем, что в ходе раскочки осциллятора внешней силой величина расстройки ( $\omega - \omega_0$ ) будет изменяться, так как частота  $\omega_0$  будет зависеть от амплитуды колебаний.

Рассмотрим подробнее один из примеров нелинейных систем — **автоколебательные системы**.

Преимуществом использования резонансных явлений является их экономичность и большая амплитуда колебаний. Недостатком является нестациональность работы системы, связанная с необходимостью с большой степенью точности поддерживать условие резонанса ( $\omega = \omega_p$ ), так как любые отклонения частоты внешнего воздействия от резонансной частоты при узкой резонансной кривой резко изменяют амплитуду колебаний в системе (рис. 5.17). Чтобы избежать таких нежелательных явлений, можно заставить саму систему поддерживать это резонансное условие; такая система и является автоколебательной системой. **Автоколебательная система** относится к группе нелинейных колебательных систем, в которых происходит компенсация диссипативных потерь за счет притока энергии от внешнего постоянного источника. При этом система сама регулирует подвод энергии в систему, подавая ее в нужный момент времени в нужном количестве.

Автоколебательная система состоит из колебательной системы, источника энергии и клапана — устройства, которое регулирует подвод энергии в систему. Работой клапана управляет сама система с помощью обратной связи (рис. 5.24а).

В качестве примера автоколебательной системы можно привести систему, состоящую из груза, прикрепленного к двум пружинам и совершающего колебания на металлическом стержне (рис. 5.24б). Источник постоянного тока с помощью электромагнита за каждый период колебаний совершает работу по увеличению кинетической энергии груза, восполняя потери энергии колебаний на преодоление сил сопротивления. При своем движении металлическая пластина, прикрепленная к грузу, касается контакта-прерывателя (он играет роль клапана), электрическая цепь замыкается, и электромагнит притягивает к себе пластину, сообщая при этом дополнительную скорость грузу. Таким образом, в системе возникают незатухающие колебания на частоте  $\omega_p$  с большой амплитудой, которую можно регулировать, меняя положение контакта прерывателя.

Примерами автоколебательных систем могут служить духовые и смычковые инструменты, колебания голосовых связок при разговоре, механические

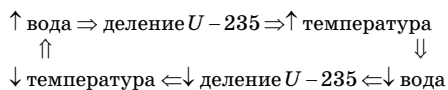


Рис. 5.25

димо было достаточное количество урана-235, который делится под действием медленных нейтронов, и замедлитель нейтронов — вода. В определенный момент времени вода скопилась в достаточном количестве, и реактор заработал. Его работу поддерживала цепочка процессов, указанных на рис. 5.25.

Эта автоколебательная система работала до тех пор, пока не выгорело ядерное топливо. Здесь источником энергии является деление ядер урана-235, клапаном служит изменение температуры воды, а колебательной системой является вода, уровень которой совершает колебания.

### \*5.12.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

**Параметрические колебания** — это колебания, происходящие в системе за счет периодического изменения тех параметров системы, которые определяют величину запасенной колебательной энергии. Так, например, можно возбудить параметрические колебания в колебательном контуре за счет периодического изменения емкости конденсатора или индуктивности катушки, параметрические колебания маятника за счет изменения длины его нити или массы груза.

Если обозначить через  $\omega_0$  частоту собственных незатухающих колебаний в системе, то параметрическое возбуждение колебаний в системе наступает в тех случаях, когда частота периодического изменения  $\omega_H$  параметра системы будет удовлетворять условию

$$\omega_H = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.91)$$

При таких значениях частоты  $\omega_H$  в системе будут возбуждаться собственные колебания системы на частоте  $\omega_0$ . Наиболее благоприятной для возбуждения колебаний является частота  $\omega_H$ , равная  $2\omega_0$ , так как на этой частоте совершает колебания энергия системы (потенциальная и кинетическая энергии, энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки индуктивности). При такой частоте колебания в системе будут наиболее интенсивными.

Поясним это на примере периодического изменения емкости конденсатора колебательного контура. Пусть в момент времени  $t = 0$  заряд на обкладках конденсатора будет максимальным, и в этот момент времени скачком (за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний) раздвигаются пластины конденсатора. Тогда энергия электрического поля конденсатора будет увеличиваться, в контур поступает энергия:  $q_{\text{макс}} = \text{const}, d \uparrow \Rightarrow W = q_{\text{макс}}^2 / (2C) = q_{\text{макс}}^2 d / (\epsilon \epsilon_0 S)$ . Через четверть периода колебаний ( $t = T/4$ ) конденсатор будет разряжен ( $q = 0, W_{\text{эл}} = 0$ ), вся энер-

гия контура будет сосредоточена в катушке в виде энергии магнитного поля. Поэтому сближение обкладок конденсатора в этот момент времени не приводит к отводу энергии колебаний из контура.

Таким образом, за один период колебаний в контур два раза подводится энергия. Аналогичные процессы протекают при периодическом изменении индуктивности катушки контура.

Возникновение параметрических колебаний возможно и при отсутствии энергии колебаний в системе; это объясняется следующим образом. В любой колебательной системе вследствие воздействия на нее различных случайных факторов всегда существуют малые отклонения различных физических величин от их средних значений (их называют флуктуациями). Спектр частот таких флуктуаций будет непрерывным с малыми амплитудами отдельных гармоник (для напряжения на конденсаторе или индуктивности они составляют значение порядка микровольта). Периодическое изменение параметра системы на частоте, кратной  $\omega_0$ , приводит к тому, что амплитуда гармоники с частотой  $\omega_0$  все время будет увеличиваться за счет подвода энергии в систему извне и в системе возникают незатухающие колебания с большой амплитудой. Такое возбуждение колебаний в системе получило название **параметрического резонанса**.

Наращивание амплитуды колебаний при параметрическом резонансе ограничивается при достаточно больших амплитудах нелинейными эффектами. К ним можно отнести, например, возникновение зависимости активного сопротивления  $R$  от амплитуды силы тока в контуре (это приводит к увеличению потерь энергии на выделение джоулевой теплоты) или зависимости емкости конденсатора от напряжения (это приводит к изменению частоты собственных колебаний  $\omega_0$  и в результате к увеличению расстройки  $(\omega_H - \omega_0)$  между частотами  $\omega_H$  и  $\omega_0$ ). Равновесное значение амплитуды колебаний наступает тогда, когда параметрическая накачка энергии в среднем за период компенсируется джоулевыми потерями.

Явление параметрического резонанса используется при работе малошумящих параметрических усилителей СВЧ-диапазона, в которых применяются параметрические полупроводниковые диоды с управляемой емкостью  $p$ - $n$  перехода.

Примером параметрического резонанса в механической системе является маятник в виде груза массы  $m$ , подвешенного на нити, длину  $l$  которой можно изменять (рис. 5.26а). Если уменьшать длину в нижнем положении и увеличивать в крайних положениях, то работа внешней силы за один период колебаний будет положительной и амплитуда колебаний будет возрастать. Траектория движения груза при таких колебаниях показана на рис. 5.26б.

Раскачка качелей также обусловлена параметрическим резонансом, когда эффективная длина маятника (положение центра тяжести) изменяется при приседаниях и вставаниях человека.

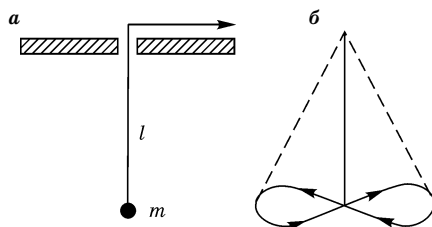


Рис. 5.26

### \*5.13. НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ (МОДЫ). СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Под **нормальными колебаниями (нормальными модами)** понимают собственные (свободные) незатухающие гармонические колебания в замкнутых линейных колебательных системах (в них отсутствуют как потери энергии, так и приток извне колебательной энергии).

Каждое нормальное колебание характеризуется определенным значением частоты. Эти частоты называются **собственными частотами** системы.

Под **степенями свободы системы** понимают число независимых параметров, описывающих возможные изменения состояния системы. Линейные колебательные системы (они представляют собой гармонические осцилляторы, такие как колебательный контур, пружинный маятник, математический маятник) являются системами с одной степенью свободы. Действительно, для описания их движения необходимо задать только один параметр. Например, для механической системы это координата  $x$ , описывающая движение материальной точки относительно положения равновесия (другие координаты  $y$  и  $z$  в этом случае не нужны). Для колебательного контура таким параметром будет заряд  $q$  на обкладках конденсатора (другие величины, такие как сила тока, напряжения на конденсаторе и на катушке, определяются из зависимости заряда  $q$  от времени  $t$ ). Для линейных систем с одной степенью свободы существует только одно нормальное колебание — нормальная мода.

**Связанные колебательные системы** представляют собой системы с двумя и более степенями свободы, рассматриваемые как совокупность систем с одной степенью свободы, взаимодействующих между собой. Колебания, возникающие в связанных системах, называют **связанными колебаниями**.

В дискретных связанных системах, состоящих из  $N$  связанных гармонических осцилляторов (например механических маятников, колебательных контуров), число нормальных колебаний равно  $N$ .

Примером связанных систем могут служить два колебательных контура, связанных между собой индуктивной связью (рис. 5.27а). Колебания в одном контуре из-за наличия связи вызывают колебания в другом, то есть происходит переход энергии из одного контура в другой. Число нормальных колебаний для таких контуров равно двум.

В линейных распределенных системах (струна, мембрана, резонатор) существует бесконечное, но счетное множество нормальных колебаний.

Произвольное свободное колебание системы может быть представлено в виде суперпозиции нормальных колебаний. При этом полная энергия дви-

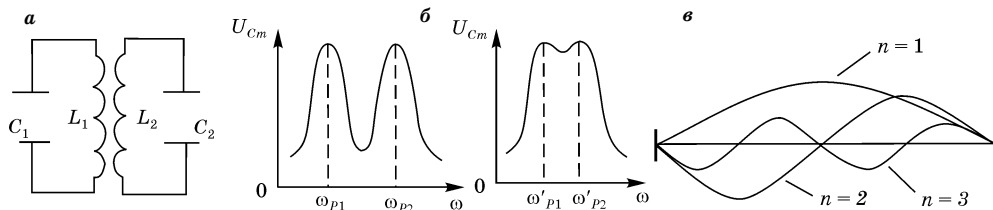


Рис. 5.27

жения распадается на сумму энергий отдельных нормальных колебаний. Примером такой системы являются колебания струны, закрепленной на концах. Возбуждение в ней поперечных колебаний приводит к образованию стоячей волны, узлы которой приходятся на закрепленные концы (рис. 5.27*е*). На длине струны  $l$  укладывается целое число полувольт

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \lambda_n = \frac{2l}{n}, v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n = v_1 n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.92)$$

Все частоты  $v_n$  представляют собой частоты нормальных колебаний струны, частота  $v_1$ , соответствующая  $n = 1$ , называется **основной частотой**. Основную частоту можно изменить, уменьшая или увеличивая натяжение струны:

$$v_1 = \sqrt{F/(\rho S)}, \quad (5.93)$$

где  $F$  — сила натяжения струны;  $\rho$ ,  $S$  — плотность материала струны и площадь ее поперечного сечения соответственно.

Любое колебание струны можно представить в виде суммы ее нормальных колебаний. Таким образом, линейная распределенная система ведет себя как набор независимых гармонических осцилляторов.

Полученная формула (5.92) используется, в частности, для определения спектра частот нормальных колебаний кристаллической решетки, связанных с тепловыми колебаниями атомов.

**Резонанс в системах с несколькими степенями свободы.** При внешнем возбуждении системы нормальные колебания в значительной мере определяют ее резонансные свойства. Резонанс может возникнуть лишь в том случае, когда частота гармонического внешнего воздействия близка к одной из собственных частот системы либо к их линейной комбинации, если внешнее воздействие меняет параметры системы (параметрический резонанс).

В линейном приближении собственные колебания этих систем представляют собой набор нормальных колебаний (мод). Если отклик системы — это суммарный отклик всех степеней свободы, то тогда резонансная кривая будет наложением резонансных кривых отдельных нормальных колебаний и может иметь сложный характер. Так, в системе с двумя степенями свободы, ввиду того что собственные колебания могут происходить с двумя различными частотами, резонанс наступает при совпадении частоты гармонического внешнего воздействия как с одной, так и с другой нормальной частотой системы. Подбором параметров нормальных колебаний можно создать резонансную кривую любой формы, что широко используется, например, в радиотехнике для создания фильтрации частот (рис. 5.27*б*).

Наличие связи изменяет характер резонансных явлений в связанных системах по сравнению с одиночным контуром. В связанных системах резонанс наступает всякий раз, когда частота внешнего воздействия совпадает с одной из частот собственных колебаний всей системы, отличающихся от собственных частот отдельных контуров. Например, в связанных системах, состоящих из двух контуров, резонанс наступает на двух резонансных частотах. При этом для двух слабо взаимодействующих систем с близкими собственными частотами колебаний может происходить резонансная перекачка энергии из одной подсистемы в другую.

## ЧАСТЬ 6

# ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

### 6.1. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Исторически сначала развивалась теория волн в упругих средах, так как электромагнитные волны еще не были открыты, а свет рассматривался в соответствии с механикой И. Ньютона как поток частиц — корпускул.

Приведем ряд экспериментальных результатов, способствовавших развитию теории упругих волн. Так, в работах Ж. Савера (1701) рассматривались стоячие волны. В 1796 г. Э. Хладни измерил скорость звука в твердых телах по отношению к скорости звука в воздухе. В 1801 г. Т. Юнг открыл явление интерференции звука и установил принцип суперпозиции волн. В 1809 г. Ж. Био провел измерения скорости звука в твердых телах. В 1839 г. У. Гамильтон ввел понятие групповой скорости. В 1842 г. Х. Доплер предположил наличие влияния относительного движения на высоту звука (эффект Доплера). В 1874 г. Н. А. Умов ввел понятие о скорости и направлении движения энергии и потоке энергии для упругих волн (вектор Умова).

В начале XIX века под давлением многочисленных фактов корпускулярная природа света уступила волновой теории света, то есть свет стал рассматриваться как волна.

В настоящее время получила развитие единая теория колебаний и волн, которая изучает общие закономерности для колебательных и волновых процессов различной природы. Так, в частности, в ней рассматриваются такие вопросы, как теория автоколебательных и автоволновых процессов, теория ударных волн и солитонов, кинетика колебаний и волн в системах с большим числом степеней свободы, теория стохастических систем (со сложной динамикой).

#### 6.1.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Под упругой средой понимают среду, между частицами которой действуют упругие силы. Если какую-либо частицу среды заставить совершать колебания, то за счет действия упругих сил в колебательное движение придут сначала ближайшие к ней частицы, затем соседние с этими частицы



и т. д. Так в колебательный процесс вовлекаются все новые и новые частицы, то есть в среде распространяется упругая волна. Итак, под **бегущей волной** понимают процесс распространения колебаний в среде. Этот процесс сопровождается переносом энергии от источника колебаний, причем переноса частиц в направлении движения волны не происходит — они совершают колебания около своих положений равновесия.

Нужно отметить, что под **частицей среды** понимают не отдельную молекулу, а совокупность большого числа молекул, обладающих примерно одинаковыми свойствами (одинаковыми смещениями от своих положений равновесия, одинаковыми скоростями и т. д.). Размеры частиц должны быть достаточно малыми, значительно меньше возмущений, возникающих в среде, в частности значительно меньше длины волны, распространяющейся в среде. Такие частицы препятствуют различным деформациям, и, таким образом, среда проявляет упругие свойства. Молекулярное строение среды при этом не рассматривается, она считается сплошной.

Различают **продольные и поперечные волны**; в продольной частицы среды совершают колебания вдоль вектора скорости распространения волны, а в поперечной — перпендикулярно к нему (рис. 6.1а).

Продольные волны связаны с деформациями сжатия и растяжения малых объемов среды (рис. 6.1а) и поэтому они распространяются во всех средах. В отличие от продольных, поперечные волны обусловлены деформацией сдвига (рис. 6.1б), поэтому они распространяются только в твердых телах, так как у жидкостей или газов такая деформация отсутствует. Отметим, что кроме волн в упругой среде также выделяют волны на поверхности жидкости, здесь частицы среды совершают сложные колебания, включающие в себя и поперечные, и продольные движения.

Введем характеристики, описывающие волновой процесс, на **примере гармонической (синусоидальной) волны**, для которой частицы среды совершают

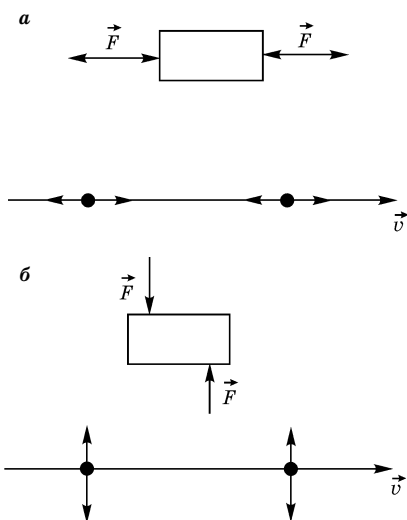


Рис. 6.1

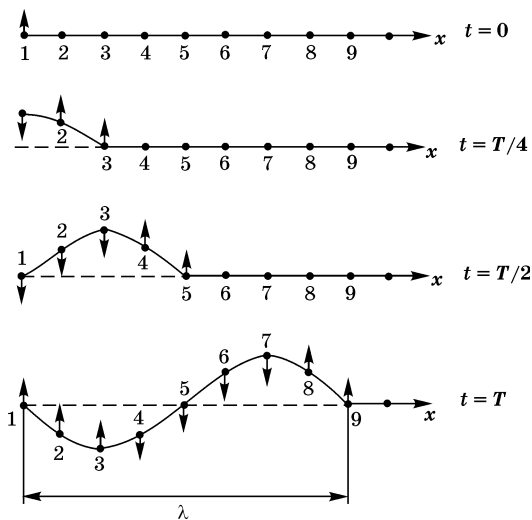


Рис. 6.2

гармонические колебания около своих положений равновесия с циклической частотой  $\omega$ .

Рассмотрим процесс возникновения в среде поперечной плоской гармонической волны. Пусть в момент времени  $t = 0$  все частицы в плоскости  $yOz$  (для этой плоскости  $x = 0$ ) начинают совершать гармонические колебания с периодом колебаний  $T$ . На рис. 6.2 для частиц, расположенных на оси  $Ox$ , показаны фотографии волны в моменты времени  $t = 0, T/4, T/2$  и  $T$ .

Фотографии демонстрируют в эти моменты времени смещения  $\xi(x, y = 0, z = 0, t)$  частиц среды около своих положений равновесия. Так, например, в момент времени  $t = T/4$  частица 1 будет максимально отклонена от своего положения равновесия, ее смещение равно амплитуде колебания  $\xi(x = 0, y = 0, z = 0, t = T/4) = A$ , при этом волна за это время проходит расстояние до частицы с номером 3. В момент времени  $t = T/2$ , частица 1 проходит положение равновесия  $\xi(x = 0, y = 0, z = 0, t = T/2) = 0$ , частица 3 максимально отклонена вверх  $\xi(x = \lambda/4, y = 0, z = 0, t = T/2) = A$ , волна доходит до частицы с номером 5. В момент времени  $t = T$  волна достигает частицы с номером 9, и расстояние, пройденное волной за это время, называют длиной волны  $\lambda$ .

Из рис. 6.2 видно, что чем дальше частица отстоит от источника колебаний, тем больше она запаздывает в совершении колебаний по сравнению с источником колебаний.

Учитывая приведенные выше фотографии распространения плоской поперечной гармонической волны в среде, можно дать следующие определения основных характеристик волнового процесса.

**1. Период волны  $T$**  — время одного полного колебания частиц среды.

**2. Фазовая скорость волны  $\bar{v}$**  или скорость распространения волны — скорость перемещения данной фазы колебаний в среде.

**3. Длина волны  $\lambda$**  — расстояние, которое проходит волна за один период или минимальное расстояние между частицами среды, совершающими колебания с разностью фаз  $\Delta\varphi = 2\pi$ . Из определения длины волны можно записать следующую формулу:

$$\lambda = vT = v/\nu = 2\pi v/\omega. \quad (6.1)$$

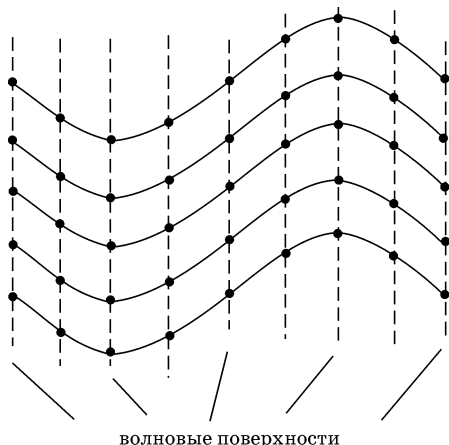


Рис. 6.3

**4. Волновая поверхность** — поверхность, проведенная через равновесные положения частиц среды, совершающих колебания в одинаковой фазе (на рис. 6.3 приведены волновые поверхности для плоской гармонической волны). Волновых поверхностей много, и они неподвижны.

**5. Фронт волны** — поверхность, разделяющая частицы среды на вовлеченные и не вовлеченные в колебательное движение. Фронт волны один и он движется со скоростью волны. Можно сказать, что фронт вол-

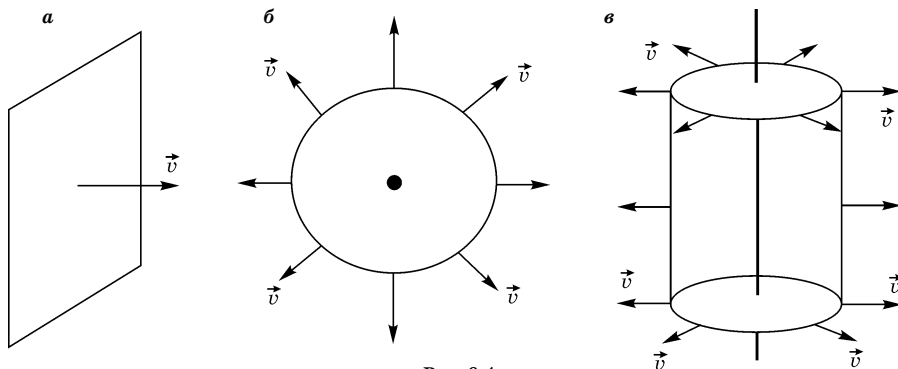


Рис. 6.4

ны — это самая дальняя от источника колебаний в данный момент времени волновая поверхность. В каждой точке фронта волны вектор фазовой скорости направлен перпендикулярно к ней.

Форма волновых поверхностей и фронта волны зависит от условий возникновения и распространения волны. По виду фронта волны выделяют плоские, сферические и цилиндрические волны (рис. 6.4). Для этих волн источником колебаний являются соответственно плоскость, точка и протяженная нить.

#### 6.1.2. УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

**Уравнением упругой волны** называют функцию  $\xi(x, y, z, t)$ , которая определяет смещение любой частицы среды с координатами  $(x, y, z)$  относительно своего положения равновесия в произвольный момент времени  $t$ . В общем случае уравнение волны определяет зависимость от координат и времени величин, описывающих волновой процесс, как для упругих, так и для электромагнитных волн. Часто функцию  $\xi(x, y, z, t)$  называют **волновой функцией**.

Выведем **уравнение плоской гармонической волны**, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ . Как известно, в плоскости фронта волны —  $yOz$  — и параллельных ей плоскостях все частицы среды совершают колебания в одинаковой фазе, поэтому в уравнении волны будет отсутствовать зависимость от координат  $y$  и  $z$ :  $\xi(x, y, z, t) = \xi(x, t)$ .

Для гармонической волны все частицы среды совершают колебания с одинаковой циклической частотой  $\omega$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  частицы среды с координатой  $x = 0$ , расположенные в плоскости  $yOz$ , начинают совершать колебания по закону

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.2)$$

Частицы с координатой  $x$  начнут совершать гармонические колебания только после прихода к ним волны. Для этого требуется время  $\tau = x/v$ , и поэтому уравнение колебаний для таких частиц примет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) представляет собой уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ . В эту формулу входит **волновое число**  $k$ , которое связано с циклической частотой  $\omega$ , фазовой скоростью волны  $v$  и ее периодом  $\lambda$  соотношением

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.4)$$

Волновое число  $k$  представляет собой модуль волнового вектора  $\vec{k}$ . Его направление  $\vec{k}$  совпадает с направлением скорости распространения бегущей волны, сам же модуль определяется формулой (6.4).

Покажем, что входящая в формулу (6.3) фазовая скорость  $\bar{v}$  волны представляет собой скорость движения фиксированного значения фазы волны. Действительно,

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}, \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \omega - k \frac{dx}{dt} = \omega - kv = 0,$$

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (6.5)$$

что согласуется с формулой (6.4).

**Волновым уравнением** называют уравнение, решением которого является уравнение волны  $\xi(x, y, z, t)$ . Найдем волновое уравнение для волновой функции (6.3). Если взять частные производные по координате  $x$  и времени  $t$  от  $\xi(x, y, z, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= Ak \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \end{aligned}$$

то тогда волновое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (6.6)$$

Оказывается, что решением этого уравнения, кроме плоской гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси  $Ox$ , является также плоская гармоническая волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси  $Ox$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0).$$

Для плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении, которое можно задать радиус-вектором  $\vec{r}$ , уравнение волны и волновое уравнение запишутся следующим образом

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (6.7)$$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi_0). \quad (6.8)$$

Можно показать, что волновому уравнению (6.7) удовлетворяет также и уравнение сферической волны

$$\xi(\vec{r}, t) = A(r) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0). \quad (6.9)$$

Это уравнение отличается от уравнения плоской гармонической волны тем, что для сферической волны амплитуда  $A$  будет зависеть от расстояния  $r$  между точечным источником колебаний и рассматриваемой точкой пространства, а именно амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$ .

Действительно, амплитуда колебаний частиц среды определяется энергией волны  $W$ , приходящейся на единицу поверхности фронта волны (площадь поверхности фронта волны равна  $S = 4\pi r^2$ ) вблизи рассматриваемой точки, и поэтому

$$A \sim \sqrt{\frac{W}{S}} \sim \sqrt{\frac{W}{4\pi r^2}} \sim \frac{1}{r}.$$

Рассмотрим ряд примеров, поясняющих распространение плоской гармонической волны (6.3) в положительном направлении оси  $Ox$ .

**Пример 1.** Запишем уравнение колебаний для смещения  $\xi$  частицы среды с координатой  $x = \lambda$  около своего положения равновесия в зависимости от времени  $t$  (начальная фаза колебаний источника  $\varphi_0 = 0$ ):

$$\xi(\lambda, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cos(\omega t - 2\pi) = A \cos(\omega t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Построим график этой зависимости в пределах одного периода, подставляя в формулу (6.3) значение  $x = \lambda$ ; он представлен на рис. 6.5а.

**Пример 2.** Запишем уравнение, описывающее положения всех частиц среды около своих положений равновесия в момент времени  $t = T/2$  при начальной фазе колебаний источника  $\varphi_0 = 0$ . Подставляя в формулу (6.3) значение  $t = T/2$ , получим

$$\xi(x, T/2) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cos(\pi - kx) = -A \cos(kx) = -A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

График этой зависимости представлен на рис. 6.5б. Из него следует, что периодом по координате является длина волны  $\lambda$ , то есть вдоль скорости

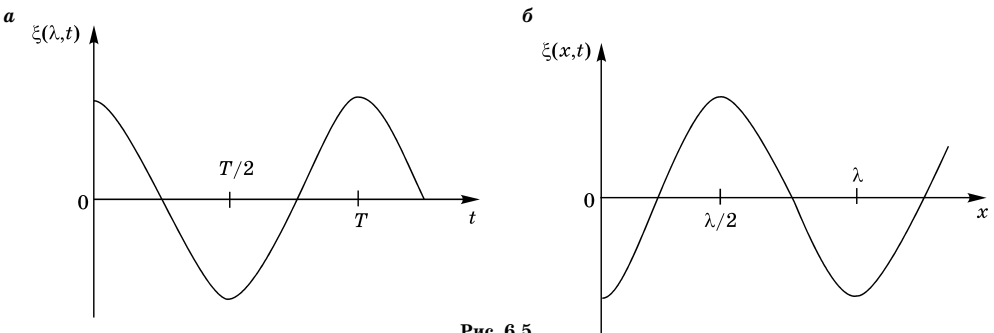


Рис. 6.5

распространения волны через расстояние, равное длине волны  $\lambda$ , смещения частиц относительно своих положений равновесия будут повторяться.

**Пример 3.** Найдем разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний двух частиц среды, отстоящих от источника колебаний на расстоянии  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Согласно уравнению (6.3) запишем:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_2 + \varphi_0) - (\omega t - kx_1 + \varphi_0) = -k(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

**Пример 4.** Рассчитаем отношение максимальной скорости  $v_m$  колебаний частиц воздуха  $v_m$  к скорости  $v$  звуковой волны  $v = 330$  м/с, если амплитуда колебаний частиц среды  $A = 0,2$  мм. Используя  $v_m$  формулу (5.9), получим

$$\frac{v_m}{v} = \frac{A\omega}{v} = \frac{A2\pi\nu}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{330} (16 \div 20\,000) = (0,61 \cdot 10^{-4} \div 0,076),$$

то есть для волн звуковой частоты скорость распространения колебаний в воздухе значительно превосходит максимальную скорость колебаний частиц воздуха.

### 6.1.3. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ. ВЕКТОР УМОВА

Упругая волна, распространяясь в среде, несет с собой энергию от источника колебаний, что приводит к появлению в среде дополнительной энергии, связанной с колебаниями частиц среды — это и есть энергия волны. Запишем для нее формулу. Для этого рассмотрим плоскую продольную гармоническую волну (6.3), распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ .

Для малого объема среды (он представляет собой цилиндр площади основания  $S$  и высоты  $\Delta x$ , рис. 6.6а) скорости всех частиц будут одинаковы:

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

и поэтому кинетическая энергия частиц в этом объеме, связанная с их колебаниями около своих положений равновесия, запишется как

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho VA^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad W_{Km} = \frac{1}{2}\rho VA^2\omega^2. \quad (6.10)$$

Здесь введена плотность среды  $\rho$ , позволяющая выразить массу всех частиц  $m$  в объеме  $V$ .

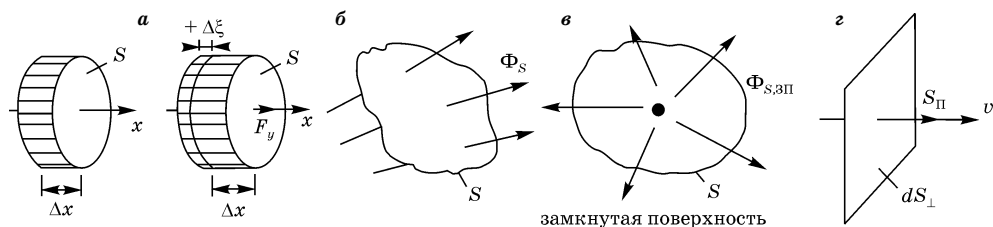


Рис. 6.6

Величина деформации этого малого объема будет равна  $\Delta\xi$ , а относительная деформация  $\Delta\xi/\Delta x$  ввиду малости объема  $V$  ( $V = S\Delta x$ ) (рис. 6.6a) будет равна  $\partial\xi/\partial x$ . Потенциальную энергию  $W_p$  такого деформированного объема можно оценить по формуле

$$W_p = \frac{1}{2} k_{\text{ж}} (\Delta\xi)^2,$$

где  $k_{\text{ж}}$  представляет коэффициент жесткости среды.

Обычно упругие свойства твердого тела определяют модулем Юнга  $E$ , который характеризует сопротивляемость материала упругой твердой среды деформациям сжатия или растяжения. Поэтому выразим через него потенциальную энергию. Для этого на основе двух выражений закона Гука запишем формулу связи между коэффициентом  $k_{\text{ж}}$  жесткости и модулем Юнга:

$$\sigma = E\varepsilon, F_y = k_{\text{ж}}\Delta\xi, \Rightarrow \sigma = \frac{F_y}{S}, \varepsilon = \frac{\Delta\xi}{\Delta x}, \Rightarrow k_{\text{ж}} = ES/\Delta x, \quad (6.11)$$

где  $\sigma$  — механическое напряжение,  $\varepsilon$  — относительное удлинение.

Тогда для потенциальной энергии  $W_p$  деформированного объема можно записать:

$$W_p = \frac{1}{2} k_{\text{ж}} (\Delta\xi)^2 = \frac{1}{2} (ES/\Delta x) \cdot (\Delta\xi^2) = \frac{1}{2} E(S\Delta x) \cdot \left( \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \right)^2 = \frac{1}{2} VE \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2, \\ W_p = \frac{1}{2} VE \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 = W_{p\text{max}} \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad W_{p\text{max}} = \frac{1}{2} VE k^2 A^2, \quad (6.12)$$

где

$$\left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) = -kA \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

В случае жидких и газообразных сред вместо модуля Юнга  $E$  нужно в формулу (6.12) подставить модуль объемной упругости газа или жидкости  $K$ , который характеризует способность газа или жидкости сопротивляться изменению их объема.

Из теории колебаний известно, что максимальные значения кинетической и потенциальной энергий при гармонических колебаниях совпадают:  $W_{Km} = W_{pm}$ , и поэтому

$$W_p = \frac{1}{2} \rho V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (6.13)$$

Следовательно, полную энергию волны в объеме  $V$  можно представить в следующем виде:

$$W = W_K + W_p = \rho V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (6.14)$$

Эта формула позволяет ввести объемную плотность энергии волны  $w$ :

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{W}{V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (6.15)$$

где учтено, что рассматриваемый объем  $V$  является малым.

Из формулы (6.15) следует, что объемная плотность энергии бегущей волны зависит от координат и времени по гармоническому закону, то есть представляет собой бегущую волну энергии колебаний в среде, следовательно, в среде происходит перенос энергии источника колебаний.

Полученные выражения справедливы и для поперечной волны, которая распространяется только в твердых телах. В этом случае вместо модуля Юнга необходимо записывать в формулах модуль сдвига  $G$ .

Введем энергетические характеристики, описывающие перенос энергии волнового процесса в среде.

**1. Мощность излучения источника колебаний  $P_{\text{и}}$**  — это энергия, излучаемая источником колебаний за единицу времени:

$$P_{\text{и}} = \frac{dW}{dt}. \quad (6.16)$$

**2. Поток энергии  $\Phi_S$  через какую-либо поверхность  $S$**  — это энергия, переносимая через какую-либо поверхность за единицу времени (рис. 6.6б):

$$\Phi_S = \frac{dW_S}{dt}. \quad (6.17)$$

Из формулы (6.17) следует, что мощность излучения источника равна потоку энергии  $\Phi_{S,3\Pi}$  через замкнутую поверхность  $\Phi_{S,3\Pi}$ , окружающую источник колебаний:  $P_{\text{и}} = \Phi_{S,3\Pi}$  (рис. 6.6в).

**3. Вектор Умова, или вектор плотности потока энергии  $\vec{S}_{\Pi}$** , — это вектор, направление которого совпадает с направлением скорости волны, а его модуль равен энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно направлению переноса энергии (рис. 6.6г):

$$S_{\Pi} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt}. \quad (6.18)$$

Для модуля вектора Умова можно получить следующую формулу:

$$S_{\Pi} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt} \cdot \frac{v}{v} = \frac{dW v}{dS_{\perp} dl} = \frac{dW}{dV} v = wv,$$

где введена объемная плотность энергии волны в среде. Тогда для вектора Умова можно записать:

$$\vec{S}_{\Pi} = w\vec{v} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{v}. \quad (6.19)$$

**4. Интенсивность упругой волны  $I$**  равна усредненному по времени значению модуля вектора Умова:

$$I = \langle S_{\Pi} \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (6.20)$$

Введение интенсивности связано с тем, что многие приборы при достаточно высокой циклической частоте волны измеряют не мгновенное, а усредненное по времени значение модуля вектора Умова.



#### 6.1.4. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

**Стоячей волной** называют волну, образующуюся при сложении двух встречных волн одинаковой частоты и амплитуды.

Здесь рассмотрен случай сложения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $Ox$  в положительном  $\xi_1(x, t)$  и отрицательном  $\xi_2(x, t)$  направлениях:

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx).$$

Для уравнения стоячей волны в соответствии с формулой сложения косинусов можно записать:

$$\xi_{\text{СТ}}(x, t) = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (6.21)$$

Из формулы (6.21) следует, что амплитуда стоячей волны

$$A_{\text{СТ}} = |2A \cos kx| \quad (6.22)$$

зависит от координаты  $x$  выбранной точки пространства, изменяясь от минимального значения, равного нулю ( $A_{\text{СТ}} = 0$ ), до максимального значения, равного  $2A$  ( $A_{\text{СТ}} = 2A$ ).

Найдем координаты точек пространства ( $x = x_{\Pi}$ ), в которых наблюдается максимальная амплитуда колебаний частиц среды, их называют **пучностями стоячей волны**, и координаты **узлов стоячей волны** ( $x = x_{\gamma}$ ), для них амплитуда колебаний частиц среды равна нулю:

$$\begin{aligned} x = x_{\Pi} : A_{\text{СТ}} = 2A \Rightarrow \cos kx_{\Pi} = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x_{\Pi} = \pi n \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{\Pi} = \frac{\lambda}{2} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} x = x_{\gamma} : A_{\text{СТ}} = 0 \Rightarrow \cos kx_{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x_{\gamma} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{\gamma} = \frac{\lambda}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из формул (6.23) и (6.24) следует, что расстояние между соседними узлами  $\Delta x_{\gamma}$  и соседними пучностями  $\Delta x_{\Pi}$  стоячей волны одинаково и равно  $\Delta x = \Delta x_{\Pi} = \Delta x_{\gamma} = \lambda/2$ .

На рис. 6.7 приведены графики стоячей волны для трех моментов времени  $t = 0, T/4, T/2$ , где стрелками указаны направления движения частиц среды. Из них видно, что все частицы среды, находящиеся между соседними узлами, совершают колебания с разными амплитудами и с одинаковой фазой (частицы одновременно достигают положения равновесия и движутся в одну сторону). При переходе через узел фаза колебаний частиц изменяется на  $\pi$  (частицы по разные стороны от узла одновременно достигают положения равновесия и движутся в противоположных направлениях).

Как следует из графиков рис. 6.7, при образовании в среде стоячей волны в среде не происходит переноса энергии от источника колебаний, так как положение узлов и пучностей с течением времени не изменяется; перенос

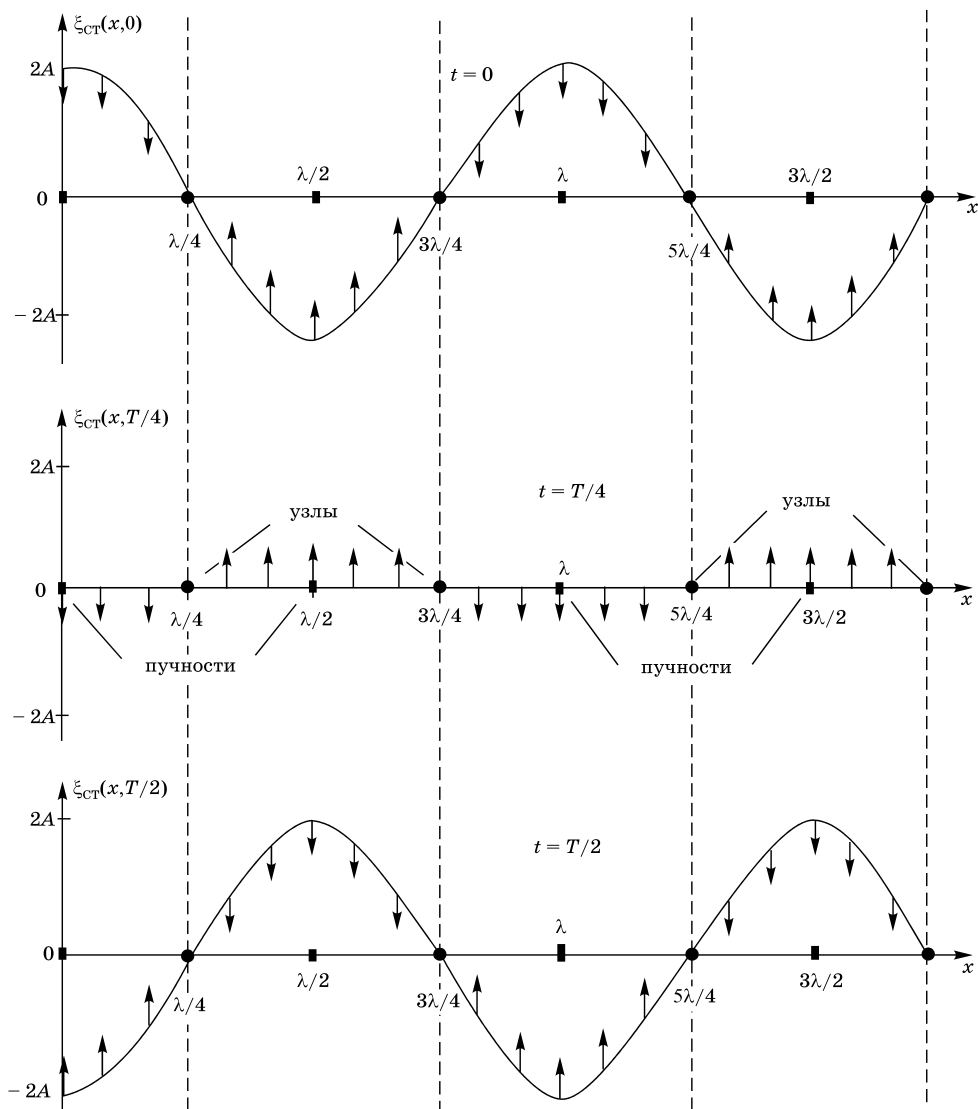


Рис. 6.7

энергии встречных волн одинаковый и происходит в противоположных направлениях.

Наблюдается переход потенциальной энергии колебаний, сосредоточенной в основном в узлах (рис. 6.7, момент времени  $t = 0$ ), в кинетическую энергию колебаний, сосредоточенную в основном в пучностях стоячей волны (рис. 6.7, момент времени  $t = T/4$ ), и наоборот. Средний же по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю.

В соответствии с формулами (6.10), (6.12) и (6.21) для кинетической и потенциальной энергий частиц в случае стоячей волны можно записать следующие формулы:

$$W_p = \frac{1}{2} VE \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 2W_{p\max} \sin^2 kx \cdot \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0),$$

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = 2W_{K\max} \cos^2 kx \cdot \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0),$$

из которых видно, что наибольшая потенциальная энергия частиц наблюдается в узлах стоячей волны ( $\sin^2 kx = 1 \Rightarrow x = x_{\text{уз}}$ ), а наибольшая кинетическая — в пучностях стоячей волны ( $\cos^2 kx = 1 \Rightarrow x = x_{\text{п}}$ ).

Стоячие волны обычно образуются при отражении бегущей волны от границы раздела двух сред. При этом возможны два случая. В первом при отражении волны от более плотной среды фаза волны изменяется на значение, равное  $\pi$ , и на границе раздела ( $x = x_{\text{гр}}$ ) образуется узел стоячей волны

$$\begin{aligned} \xi_{\text{пад}}(x_{\text{гр}}, t) + \xi_{\text{отр}}(x_{\text{гр}}, t) &= A \cos(\omega t - kx_{\text{гр}}) + A \cos(\omega t - kx_{\text{гр}} + \pi) = \\ &= 2A \cos \frac{\pi}{2} \cos \left( \omega t - kx_{\text{гр}} + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Во втором случае при отражении волны от менее плотной среды фаза волны не изменяется и на границе раздела ( $x = x_{\text{гр}}$ ) образуется пучность стоячей волны:

$$\xi_{\text{пад}}(x_{\text{гр}}, t) + \xi_{\text{отр}}(x_{\text{гр}}, t) = A \cos(\omega t - kx_{\text{гр}}) + A \cos(\omega t - kx_{\text{гр}}) = 2A \cos(\omega t - kx_{\text{гр}}).$$

Если, например, в деревянной линейке, закрепленной на одном конце, возбудить стоячую волну, то на втором свободном конце будет либо пучность (отражение бегущей по линейке волны от границы раздела дерево — воздух, рис. 6.8а), либо узел стоячей волны (отражение бегущей по линейке волны от границы раздела дерево — вода, рис. 6.8б). Причем на длине линейки укладывается половина длины волны.

Наиболее наглядным примером стоячей волны являются колебания струны, закрепленной на концах. Возбуждение в ней поперечных колебаний приводит к образованию стоячей волны, узлы которой приходятся на закрепленные концы (см. раздел 5.13, рис. 5.27в и рис. 6.8в). На длине струны  $l$  укладывается целое число полуволн, что позволяет найти частоты нормальных колебаний струны (раздел 5.13, формула (5.92)).

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n = v_1 n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Любое произвольное колебание струны можно представить в виде суммы ее нормальных колебаний.

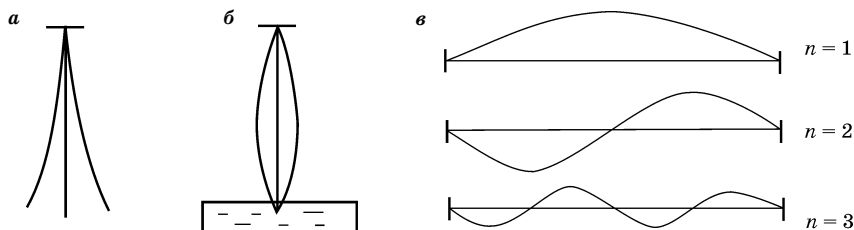


Рис. 6.8

### 6.1.5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

Рассмотренные в предыдущем разделе стоячие волны являются частным случаем **интерференции волн**, под которой понимают такое сложение в пространстве двух (или нескольких) волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. Интерферировать могут только когерентные волны, для них разность фаз не зависит от времени.

Пусть два точечных источника  $S_1$  и  $S_2$  излучают когерентные волны, которые, пройдя расстояния  $r_1$  и  $r_2$ , складываются в точке В (рис. 6.9):

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_{01}), \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_{02}).$$

Как видно из разности фаз складываемых колебаний

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_{02}) - (\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_{01}) = \\ &= (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.25)$$

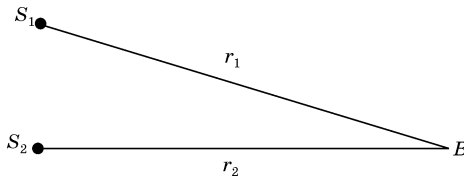


Рис. 6.9

**Когерентные волны** — это прежде всего волны одинаковой частоты:  $\omega_1 = \omega_2$ .

Пусть в точке В наблюдается сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты. Используя результаты раздела 5.7.1, можно записать формулу для квадрата амплитуды суммарного колебания в точке В:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi.$$

Учитывая равенство частот складываемых колебаний ( $\omega_1 = \omega_2$ ), для разности фаз  $\Delta\varphi$  можно записать:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad \Delta = (r_2 - r_1),$$

где величина  $\Delta$  обозначает геометрическую разность хода волн в точке В.

Запишем условия максимального усиления и ослабления амплитуды суммарной волны при интерференции для случая, когда начальные фазы колебаний будут одинаковы:  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ .

#### 1. Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm 2\pi m, \quad \Delta = \pm \frac{\lambda}{2} 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = A_1 + A_2, \quad (6.26)$$

то есть разность фаз колебаний равна четному числу  $\pi$ , или на геометрической разности хода укладывается четное число полуволн.

#### 2. Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm \pi(2m + 1), \quad \Delta = \pm \frac{\lambda}{2} (2m + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = |A_1 - A_2|, \quad (6.27)$$

то есть разность фаз колебаний равна нечетному числу  $\pi$ , или на геометрической разности хода укладывается нечетное число полуволн. Входящее в эти

формулы число  $m$  называют **порядком интерференционного максимума или интерференционного минимума**.

Если частота складываемых волн будет большой (то есть период колебаний будет малым по сравнению со временем наблюдения или временем измерения приборов), то тогда необходимо провести усреднение формулы для амплитуды суммарного колебания по времени наблюдения, то есть перейти к интенсивности волн ( $I \sim A^2$ )

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle. \quad (6.28)$$

Для некогерентных волн разность фаз  $\Delta\varphi$  будет зависеть от времени, поэтому  $\cos \Delta\varphi$  усредняется до нуля ( $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ ) и интерференции не наблюдается, то есть отсутствует устойчивая во времени картина усиления и ослабления амплитуды результирующей волны в разных точках пространства.

#### 6.1.6. ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ. ДИСПЕРСИЯ ВОЛН

Гармоническая (синусоидальная) волна с частотой  $\omega$  является идеализацией, то есть в реальных условиях ее не существует. Это связано с тем, что для нее разброс по частотам  $\Delta\omega$  равен нулю ( $\Delta\omega = 0$ ). Поэтому в соответствии с формулой (5.43) время излучения такой волны стремится к бесконечности ( $\Delta t \approx 2\pi/\Delta\omega = \infty$ ). Это означает, что такая синусоидальная волна занимает все пространство ( $\Delta x = v \cdot \Delta t = \infty$ ) и никакой полезной информации в себе не несет.

В реальных случаях время излучения  $\tau$  волны частоты  $\omega$  является конечным, то есть волна занимает ограниченную область пространства ( $\Delta x = v \cdot \Delta t < \infty$ ). Это приводит к неравному нулю разбросу по частотам ( $\Delta\omega \approx 2\pi/\Delta t < \infty$ ), то есть представляет собой группу волн.

**Волновой пакет** — это группа волн, занимающая в каждый данный момент времени ограниченную область пространства (рис. 6.10).

Для описания движения волнового пакета вводят понятие **групповой скорости**  $\vec{v}_{\text{гп}}$  как:

- 1) скорости движения центра волнового пакета;
- 2) скорости движения максимального значения его амплитуды (наприм. точки  $B$  на рис. 6.10);
- 3) скорости переноса энергии волнового пакета.

Для того чтобы записать формулу для групповой скорости волнового пакета, поступим следующим образом.

1. Возьмем линейную среду, для которой выполняется принцип суперпозиции, а именно возмущение, возникающее в среде при распространении группы волн, можно представить как сумму возмущений, которые возникают в среде при распространении в среде только одной волны этой группы. Принцип суперпозиции позволяет представить волновой пакет в виде суммы гармонических волн, частота которых заключена в узком интервале частот ( $\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2$ ,  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), а модулей волновых чисел — в интервале

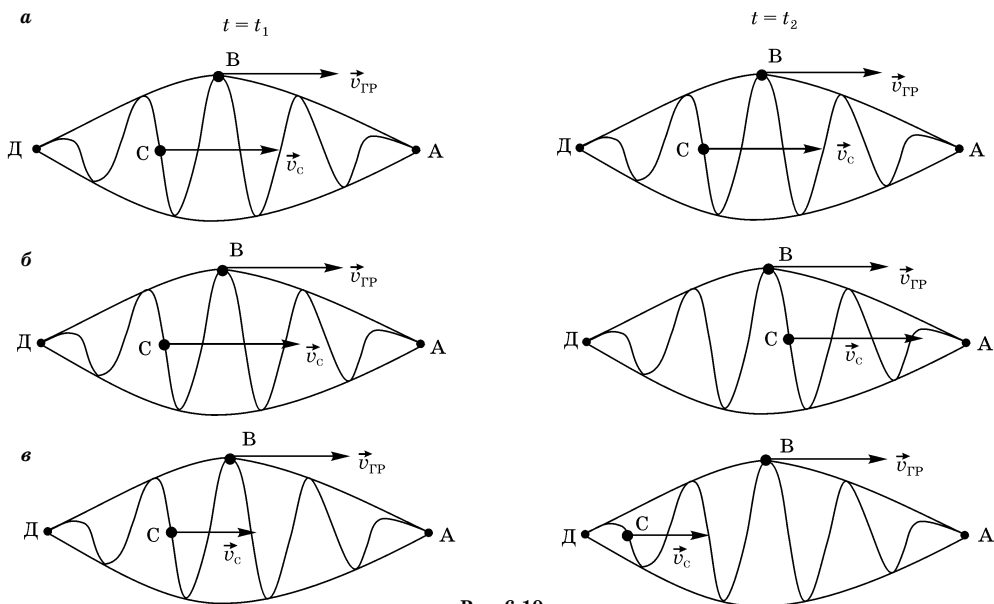


Рис. 6.10

( $k - \Delta k/2 < k_0 < k + \Delta k/2$ ,  $\Delta k \ll k_0$ ), где под  $\omega_0$  можно понимать частоту этого волнового пакета.

2. Рассмотрим частный случай волнового пакета, состоящего из двух гармонических волн одинаковой амплитуды с близкими значениями циклических частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и волновых чисел  $k_1$ ,  $k_2$ :

$$\omega_1 = (\omega_0 - \Delta\omega/2), \quad \omega_2 = (\omega_0 + \Delta\omega/2) \quad \text{и} \quad k_1 = k_0 - \Delta k/2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2,$$

причем

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad \Delta k \ll k_0.$$

Складывая эти волны, можно получить

$$\begin{aligned} \xi_{\text{гр}}(x, t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= A \cos((\omega_0 - \Delta\omega/2)t - (k_0 - \Delta k/2)x) + A \cos((\omega_0 + \Delta\omega/2)t - (k_0 + \Delta k/2)x) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x) = A_{\text{гр}} \cos(\omega_0 t - k_0 x). \end{aligned}$$

Первый сомножитель в этом выражении изменяется значительно медленнее со временем  $t$  и координатой  $x$ , чем второй, и представляет собой амплитуду  $A_{\text{гр}}$  волнового пакета:

$$A_{\text{гр}} = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right|.$$

Максимальное значение амплитуды волнового пакета (оно соответствует точке B на рис. 6.10) наблюдается при фазе колебаний, равной нулю, что приводит к следующей формуле для групповой скорости:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) = 0 \Rightarrow v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (6.29)$$

где учтено, что интервалы частот  $\Delta\omega$  и модулей волновых векторов  $\Delta k$  являются малыми, поэтому их можно записать в виде  $d\omega$  и  $dk$ .

Полученная формула для групповой скорости (6.29) будет справедливой и в общем случае.

**3. Введем понятие дисперсии волн** — это зависимость фазовой скорости волны от частоты или длины волны ( $v = v(\omega)$ ,  $v = v(\lambda)$ ).

Для линейной среды в отсутствие явления дисперсии ( $dv/d\lambda = 0$ ,  $dv/dv = 0$ ) все фазовые скорости волн, составляющих волновой пакет, будут одинаковы и равны групповой скорости волнового пакета (рис. 6.10а — в разные моменты времени положение точки  $C$  относительно центра волнового пакета и относительно других составляющих этот пакет волн не изменяется:  $v = v_{\text{гр}}$ ).

**4. Рассмотрим диспергирующие среды** — это среды, в которых наблюдается явление дисперсии. Для них между групповой скоростью волнового пакета и фазовой скоростью составляющих его волн можно получить следующую формулу связи:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \left| \omega = v \cdot k \right| = \frac{dv \cdot k + v \cdot dk}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = \left| k = \frac{2\pi}{\lambda}, dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda \right| = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (6.30)$$

Из выражения (6.30) видно, что при наличии явления дисперсии ( $dv/d\lambda \neq 0$ ,  $dv/dv \neq 0$ ) фазовые скорости волн  $v$  будут отличаться от групповой скорости волнового пакета. При этом имеются два случая:

1) нормальная дисперсия ( $dv/d\lambda > 0$ ,  $dv/dv < 0$ ) наблюдается для тех сред, для которых фазовая скорость волн будет превышать групповую скорость:  $v > v_{\text{гр}}$ . Так, например, на рис. 6.10б фиксированное значение фазы волны для точки  $C$  перемещается внутри волнового пакета к его конечной точке  $A$ , то есть  $v_C > v_{\text{гр}}$ ;

2) аномальная дисперсия ( $dv/d\lambda < 0$ ,  $dv/dv > 0$ ) наблюдается в тех случаях, когда фазовая скорость волн, составляющих волновой пакет, будет меньше групповой скорости:  $v < v_{\text{гр}}$  (фиксированное значение фазы волны для точки  $C$  перемещается внутри волнового пакета к начальной точке  $D$ ).

Явление нормальной дисперсии наблюдается для прозрачных сред, а аномальной — для сред, поглощающих излучение. Причем для сред с большим коэффициентом поглощения групповая скорость не вводится. Это связано с тем, что в таких средах волновой пакет резко изменяет свою форму, а потеря энергии приводит к тому, что понятие групповой скорости как скорости переноса энергии утрачивает свой смысл.

Понятие групповой скорости используется в методах измерения скоростей распространения волн. Именно она фигурирует при измерении дальности в гидро- и радиолокации, в методах зондирования ионосферы, в системах управления космическими объектами и т. д. Отметим, что согласно теории относительности групповая скорость всегда меньше скорости света в вакууме ( $v_{\text{гр}} < c$ ).

### 6.1.7. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ. СКОРОСТЬ УПРУГИХ ВОЛН В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

Звуковыми волнами называют упругие волны, распространяющиеся в газах, жидкостях и твердых телах. В газах и жидкостях эти волны являются продольными, а в твердых телах могут быть как продольными, так и поперечными.

Под **звуковыми волнами** в узком смысле этого слова понимают также волны с частотами от 16 Гц до 20 кГц. Иначе их называют **слышимым звуком**. Эти волны, воздействуя на ухо человека, вызывают звуковые ощущения. Звуковые волны с частотами ниже 16 Гц называют инфразвуком, а от 20 кГц до  $10^{13}$  Гц — ультразвуком.

Верхний предел по частотам для **ультразвука** достигается тогда, когда упругую среду нельзя рассматривать как сплошную, то есть нельзя пренебрегать ее молекулярным строением. Это будет происходить в том случае, когда длина ультразвуковой волны  $\lambda$  будет сопоставима с межмолекулярными расстояниями в данной среде. Поэтому верхний порог по частотам в жидкости будет составлять порядка  $10^9$  Гц, а в твердом теле —  $10^{13}$  Гц. Для газов верхний порог достигается тогда, когда длина волны ультразвука будет сопоставима со средней длиной свободного пробега молекул.

Для генерации ультразвуковых волн используют механические и электромагнитные излучатели. Недостатком механических (воздушные и жидкостные свистки и сирены) является то, что они излучают широкий спектр частот и отличаются нестабильностью частоты и амплитуды. В магнито-стрикционных излучателях (генерируются частоты до 200 кГц) для возбуждения волн используют изменение размеров тела в переменном магнитном поле. В пьезоэлектрических (до 50 МГц) — используется обратный пьезоэлектрический эффект: пластина из пьезоэлектрика совершает вынужденные колебания в переменном электрическом поле.

Мощные излучатели ультразвука способны вызывать **кавитацию** в жидкостях — явление, при котором в среде за счет больших амплитуд звукового давления возникают внутренние разрывы сплошной среды. Они имеют вид мельчайших пузырьков, исчезновение которых сопровождается кратковременным возрастанием давления до сотен и даже до тысяч атмосфер. Поэтому ультразвук обладает дробящим действием, а именно разрушает находящиеся в жидкостях твердые тела, живые организмы, крупные молекулы и т. д. Это явление широко используется в технике для ускорения различных процессов, получения более однородной структуры металла и т. д.

Ультразвук также широко применяется в методах неразрушающего контроля качества при изготовлении различных твердых изделий, в гидроакустике и гидролокации, так как ультразвуковые волны являются единственным видом волн, хорошо распространяющихся в морской воде.

Источником **инфразвука** являются шумы атмосферы и моря (к ним можно отнести ветер, грозовые разряды), сотрясения и вибрации в земной коре от самых разнообразных источников, а также взрывы, оружейные выстрелы, автомашины и т. д. Эти волны из-за большой длины волны слабо погло-



щаются веществом и поэтому могут распространяться на большие расстояния, их можно использовать для определения места сильных взрывов, землетрясений, с их помощью можно предсказывать цунами и т. д. Инфразвук оказывает неблагоприятное воздействие на состояние человека из-за появления при таких частотах резонансных явлений в организме.

**Скорость упругих волн.** С учетом того, что при распространении в среде упругой волны кинетическая и потенциальная энергии колебаний частиц среды одинаковы, из формул (6.10) и (6.11) можно получить для скорости звуковой волны в твердом теле следующее выражение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}EVA^2k^2 &= \frac{1}{2}\rho VA^2\omega^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= \sqrt{E/\rho},\end{aligned}\tag{6.31}$$

а в газе и жидкости:

$$v = \sqrt{K/\rho}.\tag{6.32}$$

Напомним, что для поперечных волн, которые распространяются только в твердой среде, вместо модуля Юнга записывают модуль сдвига  $G$ :

$$v = \sqrt{G/\rho}.\tag{6.33}$$

Упругие свойства жидкой и твердой среды, которые описываются модулем объемной упругости жидкости  $K$ , модулями Юнга  $E$  и модулем сдвига  $G$  слабо зависят от давления и температуры, поэтому скорости упругих волн в них практически остаются постоянными.

Для газов ситуация другая, и при выводе формулы для скорости упругих волн следует рассмотреть два случая.

1. При больших частотах упругих волн процесс деформации малых объемов газа протекает быстро, без теплообмена, что соответствует адиабатическому процессу (уравнение адиабатного процесса  $PV^\gamma = \text{const}$ ), и для скорости упругой волны в газах можно получить следующую формулу:

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}.\tag{6.34}$$

Согласно выражению (6.34) скорость упругой волны зависит от температуры газа, его молярной массы и коэффициента Пуассона  $\gamma$ , равного отношению молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме  $\gamma = C_p/C_v$  (в формуле (6.34) буквой  $R$  обозначена газовая постоянная).

2. При низких частотах упругих волн процесс деформации в газе протекает медленно, изотермически (уравнение изотермического процесса  $PV = \text{const}$ ), и поэтому в формулу (6.34) не войдет коэффициент Пуассона  $\gamma$ :

$$v = \sqrt{RT/M}.\tag{6.35}$$

Для воздуха  $\gamma = 1,4$ , что приводит к различию в частотах, рассчитанных по формулам (6.34) и (6.35), в 1,18 раза.

Отметим, что для частот, соответствующих звуковым волнам (слышимому звуку), справедлива формула (6.34), то есть практически отсутствует явление дисперсии (скорость звука постоянна для всех частот этого диапазона).

Если подставить в формулу (6.34) значения молярной массы воздуха ( $M = 0,029$  кг/моль) и температуру  $T = 300$  К, то получим значение скорости звуковой волны ( $v = 347$  м/с), которое соответствует экспериментальному значению при давлении воздуха в одну атмосферу.

Оказывается, что скорость звука в газах меньше, чем в жидкостях, а в жидкостях меньше, как правило, чем в твердых телах. Обычно скорость звука является постоянной величиной для данного вещества при заданных внешних условиях и не зависит от частоты волны и ее амплитуды.

Приведем некоторые примеры числовых значений для скоростей звуковых волн в газах, жидкостях и твердых тел. Для воздуха, кислорода и водорода при нормальных условиях ( $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $P = 1$  атм) скорость звука составляет 331 м/с, 316 м/с и 1284 м/с соответственно. Для воды при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  скорость звука — 1402 м/с, а при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  — 1490 м/с.

Для твердой среды скорость распространения продольных волн всегда больше скорости распространения поперечных. Для никеля скорость продольной волны составляет 5630 м/с, поперечной — 2960 м/с, а скорость звука в стержне из никеля определяется не только характеристиками вещества, но и его геометрическими параметрами и равна (4785–4973) м/с.

Измерение скорости звука используется для изучения различных свойств вещества (сжимаемость газов, модулей упругости твердых тел). Изменение скорости звука и ее зависимости от разных параметров позволяет исследовать зонную структуру полупроводников, наличие малых примесей в газах и жидкостях и т. д.

## 6.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В 1865 г. Дж. Максвелл постулировал существование электромагнитных волн. Он выдвинул концепцию об электромагнитной природе света. Спустя восемь лет он теоретически определил величину давления света. Полученная им формула для давления была проверена экспериментально П. Н. Лебедевым. Сначала в 1900 г. он экспериментально измерил давление света на твердые тела, а в 1907 г. — на газы, тем самым была подтверждена электромагнитная природа света.

В 1884 г. Дж. Пойнтингом для описания переноса энергии электромагнитной волной был введен вектор плотности потока энергии. В настоящее время этот вектор называют вектором Умова–Пойнтинга.

В 1887 г. Г. Герц сконструировал генератор электромагнитных колебаний и предложил метод их обнаружения. Через год он экспериментально доказал существование электромагнитных волн, предсказанных Дж. Максвеллом.

В 1894 г. А. С. Попов построил генератор электромагнитных колебаний, когерер, изобрел антенну, год спустя — радио. 24 марта 1896 году он предал на расстояние 250 м первую радиограмму. В это время в США приборы для связи без проводов, аналогичные приборам Попова, и принцип передачи при помощи радиоволн разработал также Г. Маркони.

Созданная Максвеллом в 60-е гг. XIX века теория электромагнитного поля и ее дальнейшее развитие в трудах Г. Герца и Х. Лоренца, привела к противоречиям с классической механикой И. Ньютона, к революционным изменениям в физике, в результате чего была создана электродинамическая картина мира.

**6.2.1.**  
**ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ**  
**ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ.**  
**УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ**  
**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ**

В разделе 4.2.8 было отмечено, что из полной системы уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитного поля в виде электромагнитной волны. Покажем это на конкретном примере.

Пусть имеется однородная, изотропная пластина из диэлектрика, заполняющая полупространство ( $x \geq 0$ , рис. 6.11а). Во всех точках плоскости  $yOz$  на входе пластины создаются гармонические колебания вектора напряженности электрического поля вдоль оси  $Oy$   $\vec{E} = (0, E_y = E_m \cos \omega t, 0)$ . Считается, что в пластине отсутствуют электрические заряды ( $q = 0$ ) и токи проводимости ( $j_{\text{пр}} = 0$ ), а значения относительных диэлектрической и магнитной проницаемости среды являются постоянными, то есть среда не является ферромагнитной и сегнетоэлектрической.

Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме, основываясь на формуле (4.67):

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{k} \right). \end{aligned}$$

Из начальных условий и соображений симметрии для рассматриваемого примера следует, что зависимости вектора  $\vec{E}$  от координат  $y$  и  $z$  не будет, также не будет составляющей вектора  $\vec{E}$  вдоль оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0, \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{k} = -\left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{k} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_x = \text{const}, B_y = \text{const}, \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

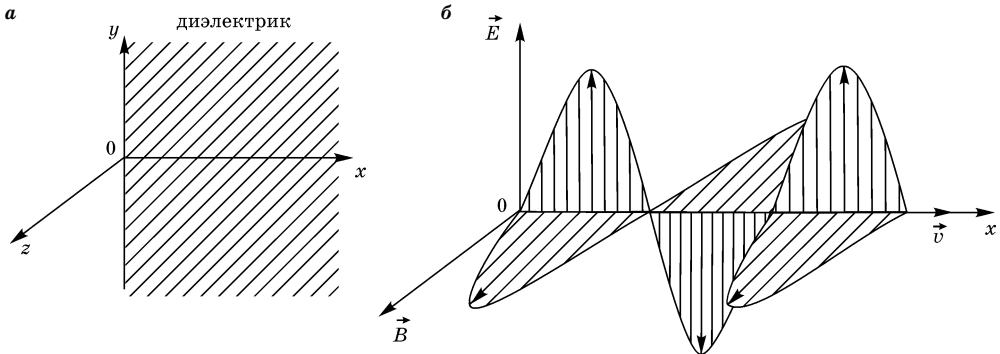


Рис. 6.11

Оставим только зависящие от времени решения, так как только они приводят к возникновению ЭМВ в среде, и в итоге получим одно скалярное уравнение

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (6.36)$$

Аналогично, из второго уравнения Максвелла можно записать:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} &= -\frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \vec{k} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{E_z}{\partial t} \vec{k} \right), \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Возьмем частную производную по координате  $x$  от уравнения (6.36) и частную производную по времени  $t$  от уравнения (6.37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}, \quad -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Аналогично, беря частные производные по времени  $t$  от (6.37) и по координате  $x$  от (6.38), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} &= -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}, \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Если сопоставить выражения (6.38) и (6.39) с уравнением (6.6), то можно их определить как волновые уравнения. Их решением являются плоские монохроматические волны электрического и магнитного полей

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1); \quad (6.40)$$

$$B_z = B_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2), \quad (6.41)$$

распространяющихся вдоль оси  $Ox$  с фазовой скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (6.42)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Итак, ЭМВ представляет собой распространяющиеся в пространстве две волны электрического и магнитного полей, взаимосвязанные и порождающие одна другую.

В общем случае волновые уравнения для ЭМВ будут соответствовать волновому уравнению (6.7):

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (6.43)$$

## 6.2.2. СВОЙСТВА ЭМВ

### 6.2.2.1. СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ. ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ ВЕКТОРОВ $\vec{E}$ и $\vec{B}$ . ПОПЕРЕЧНОСТЬ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

**Скорость электромагнитной волны в вакууме не зависит от частоты и равна скорости света в вакууме ( $v = c$ ).** Это свойство ЭМВ позволило Максвеллу сделать вывод о том, что свет представляет собой электромагнитные волны определенного интервала частот. В среде скорость электромагнитной волны уменьшается и определяется характеристиками среды  $\epsilon$  и  $\mu$ .

**Фазы колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  электромагнитной волны совпадают,** то есть в любой точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  одновременно достигают максимальных значений и обращаются в ноль. Это можно доказать, если подставить уравнения волн (6.40) и (6.41) в выражения (6.36) и (6.37):

$$E_m k \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = B_m \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_2); \quad (6.44)$$

$$-B_m k \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = -\epsilon \mu \epsilon_0 E_m \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (6.45)$$

Система уравнений должна иметь решения для любого момента времени и в любой точке пространства, что возможно только в том случае, если  $\alpha_1 = \alpha_2$ , то есть при совпадении фаз колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

**Электромагнитная волна является поперечной,** так как колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  происходят в направлениях, перпендикулярных к ее скорости. Из рис. 6.13 следует, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  образуют жесткую тройку взаимно перпендикулярных векторов.

**Плоская электромагнитная волна является линейно поляризованной,** так как колебания вектора  $\vec{E}$  происходят вдоль одного направления в пространстве.

Для электромагнитной волны существуют и другие виды поляризаций (эллиптическая и круговая поляризации). Действительно, при распространении ЭМВ в анизотропной среде, свойства которой зависят от выбора направления в ней, разные составляющие вектора  $\vec{E}$  будут распространяться с различной скоростью. На выходе из такой среды может возникнуть случай сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разностью фаз  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; это приводит к эллиптической или круговой поляризации электромагнитной волны (конец вектора  $\vec{E}$  будет вращаться по эллипсу или по окружности в правую или левую стороны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, см. подробнее разделы 7.1.2 и 7.1.5).

### 6.2.2.2. ОБЪЕМНЫЕ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА $S_{\Pi}$

**Объемные плотности энергии электрического и магнитного полей электромагнитной волны одинаковы.** Для того чтобы показать это, запишем формулы взаимосвязи векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , которые вытекают из выражений (6.44) и (6.45):

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \frac{B_m^2}{\mu\mu_0} \Rightarrow E_m = \upsilon B_m. \quad (6.46)$$

Из-за совпадения фаз колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  формула (6.46) будет справедлива для любого момента времени  $t$ , и поэтому можно записать

$$\vec{E} = [\vec{B} \times \vec{\upsilon}], \quad E = \upsilon B. \quad (6.47)$$

В соответствии с формулой (6.46) объемные плотности энергии электрического  $w_{эл}$  и магнитного  $w_m$  полей ЭМВ будут одинаковыми:

$$w_{эл} = w_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

и, следовательно, объемная плотность энергии ЭМВ запишется так:

$$w_{эл-м} = 2w_{эл} = 2w_m = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \quad (6.48)$$

**Вектор Пойнтинга или вектор плотности потока энергии  $\vec{S}_{\Pi}$ .** Из формул (6.18) и (6.46) для вектора плотности потока энергии  $\vec{S}_{\Pi}$  в случае электромагнитной волны можно получить:

$$\vec{S}_{\Pi} = w\vec{\upsilon} = \frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}]. \quad (6.49)$$

Отметим, что вектор плотности потока энергии для ЭМВ был введен Пойнтингом и назван в честь него.

В связи с большой частотой электромагнитной волны многие приборы измеряют усредненные характеристики ЭМВ. Для них можно записать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \langle w_{эл-м} \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2, \\ I = \langle \vec{S}_{\Pi} \rangle &= \langle w \rangle \upsilon = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \upsilon = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_m B_m. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Усредненное по времени значение вектора Пойнтинга  $\vec{S}_{\Pi}$  называют **интенсивностью электромагнитной волны**.

### 6.2.2.3. ОТРАЖЕНИЕ, ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗ КОЛЕБАНИЙ ВЕКТОРОВ $\vec{E}$ И $\vec{B}$ ПРИ ОТРАЖЕНИИ. ИНТЕНСИВНОСТИ ПАДАЮЩЕЙ, ОТРАЖЕННОЙ И ПРЕЛОМЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ

**Электромагнитные волны могут поглощаться, отражаться и преломляться.**

**1. Изменение фаз колебаний векторов при отражении.** При отражении плоской ЭМВ от оптически более плотной среды ( $n_2 > n_1$ ) происходит изменение фазы колебаний вектора  $\vec{E}$  на  $\pi$  ( $\vec{E}$  и  $\vec{E}_{отр}$  направлены в противоположные стороны, рис. 6.12а). При этом изменения фазы вектора  $\vec{B}$  не происходит ( $\vec{B}$  и  $\vec{B}_{отр}$  направлены в одну и ту же сторону, рис. 6.12а). При отраже-

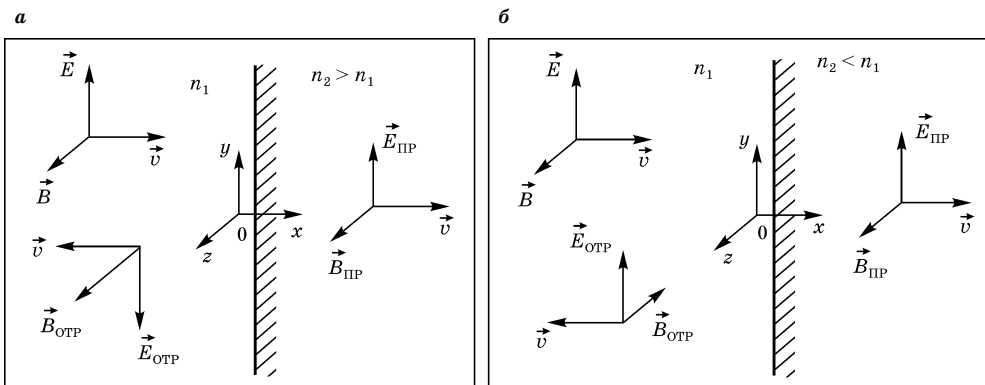


Рис. 6.12

нии от оптически менее плотной среды ( $n_2 < n_1$ ) изменения фазы колебаний вектора  $\vec{E}$  не происходит, а фаза вектора  $\vec{B}$  изменяется на  $\pi$  (рис. 6.12б).

Это означает, что при отражении падающей на границу раздела двух сред плоской электромагнитной волны  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  поворачиваются на угол  $180^\circ$  либо вокруг вектора  $\vec{B}$  ( $n_2 > n_1$ , рис. 6.12а), либо вокруг вектора  $\vec{E}$  ( $n_2 < n_1$ , рис. 6.12б).

Такое поведение  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  следует из условий, накладываемых на эти векторы на границе раздела двух сред. Покажем, например, что если фаза вектора  $\vec{E}$  при отражении электромагнитной волны не изменяется, то отражение происходит от оптически менее плотной среды ( $n_2 < n_1$ ).

Для этого в частном случае для угла падения  $i = 0$  запишем граничные условия для касательных (тангенциальных, направленных параллельно поверхности границе раздела) составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (рис. 6.12б):

$$\text{Oy: } E + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}; \quad (*)$$

$$\text{Oz: } B - B_{\text{отр}} = B_{\text{пр}}, \quad (**)$$

где в этих уравнениях взяты проекции векторов на направления, совпадающие с направлениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  падающей волны. Учитывая формулу

$$(6.47) \quad B = \frac{E}{v} = \frac{n}{c} E, \text{ можно переписать уравнение (**) следующим образом:}$$

$$n_1 E - n_1 E_{\text{отр}} = n_2 E_{\text{пр}}. \quad (***)$$

Решая систему уравнений (\*) и (\*\*\*), получим

$$E_{\text{отр}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E, \quad E_{\text{пр}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E. \quad (6.51 \text{ а})$$

Так как модули векторов всегда больше нуля, то это означает, что  $n_2 < n_1$ , что и требовалось доказать.

Аналогично можно рассмотреть случай отражения электромагнитной волны от более плотной среды и получить формулы:

$$E_{\text{отр}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E, \quad E_{\text{пр}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E. \quad (6.51 \text{ б})$$

**2. Интенсивности падающей, отраженной и преломленной электромагнитной волны.** Граничные условия также позволяют найти формулы, связывающие интенсивности падающей, отраженной и преломленной ЭМВ. Для этого необходимо использовать закон сохранения энергии, выполняющийся на границе раздела двух сред: энергия падающей на границу раздела двух сред электромагнитной волны будет равна сумме энергий, прошедшей в другую среду и отраженной от границы раздела электромагнитных волн. Тогда для векторов Пойнтинга падающей, преломленной и отраженной волн можно записать:

$$\vec{S}_{\text{п пад}} + \vec{S}_{\text{п отр}} = \vec{S}_{\text{п прел}}.$$

При нормальном падении ЭМВ на границу раздела двух сред (угол падения  $i$  равен нулю  $i = 0$ ) можно записать:

$$S_{\text{п пад}} - S_{\text{п отр}} = S_{\text{п прел}}, \quad S_{\text{п}} = \omega \nu = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = n^2 \varepsilon_0 E^2 \frac{c}{n} = c \varepsilon_0 n E^2 \Rightarrow$$

$$n_1 E^2 = n_1 E_{\text{отр}}^2 + n_2 E_{\text{пр}}^2, \quad I_{\text{отр}} = \langle S_{\text{п отр}} \rangle = c \varepsilon_0 n_1 \langle E_{\text{отр}}^2 \rangle, \quad I_{\text{прел}} = \langle S_{\text{п прел}} \rangle = c \varepsilon_0 n_1 \langle E_{\text{прел}}^2 \rangle.$$

Введем коэффициент отражения  $R$  как отношение интенсивности волны, отраженной от границы раздела двух сред, к интенсивности волны, падающей на эту границу:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}. \quad (6.52)$$

В случае нормального падения ЭМВ из уравнения (6.51б) для случая  $n_2 > n_1$  можно получить:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{n_1 \langle E_{\text{отр}}^2 \rangle}{n_1 \langle E^2 \rangle} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (6.53)$$

Для границы раздела воздух ( $n_1 = 1$ ) — стекло ( $n_2 = 1,5$ ) значение коэффициента отражения  $R$  равно 0,04, то есть 4% энергии ЭМВ в области диапазона видимого света теряется на отражение.

При переходе ЭМВ из одной среды в другую изменяются длина волны  $\lambda$  и скорость  $v$ , а период волны  $T$  и ее частота  $\nu$  не изменяются (рис. 6.13а):

$$\lambda = \lambda_0 / n, \quad v = c / n, \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu} = \sqrt{\varepsilon}, \quad (6.54)$$

где абсолютный показатель преломления среды  $n$  зависит от  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Так как для многих сред  $\mu = 1$ , остается зависимость только от  $\varepsilon$ .

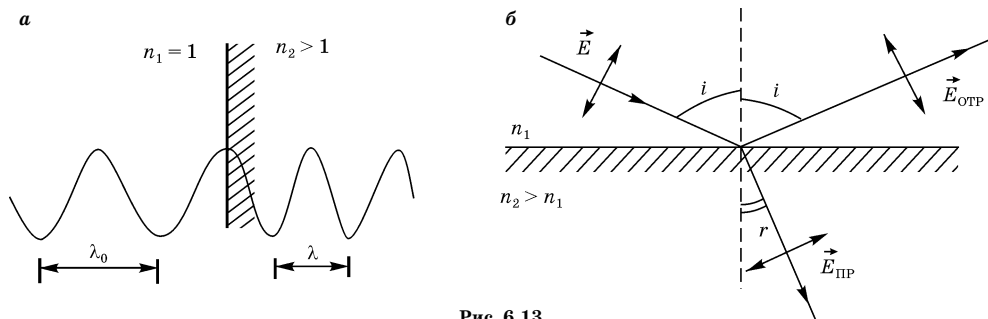


Рис. 6.13



**3. Законы отражения и преломления.** При падении плоской электромагнитной волны на границу раздела двух диэлектриков выполняются законы отражения и преломления (рис. 6.13). **Закон отражения** — падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости; угол падения равен углу отражения. **Закон преломления** — падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению абсолютных показателей преломления второй среды к первой:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6.55)$$

где  $n_{21}$  — абсолютный показатель преломления второй среды относительно первой.

Отметим, что под **лучом электромагнитной волны** понимают направление распространения ее энергии, то есть направление вектора Пойнтинга  $\vec{S}_\Pi$ .

Законы отражения и преломления являются следствием граничных условий, накладываемых на нормальные и касательные составляющие векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}_{\text{отр}}$ ,  $\vec{E}_{\text{пр}}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{B}_{\text{пр}}$  и  $\vec{B}_{\text{отр}}$  (см. разделы 2.1.7 и 4.3.3).

При переходе электромагнитной волны из оптически более плотной среды в оптически менее плотную может наблюдаться **явление полного внутреннего отражения**, при котором падающая на границу раздела ЭМВ полностью отражается, не проникая во вторую среду (рис. 6.14). В этом случае угол преломления всегда будет больше угла падения ( $r > i$ ). При некотором угле падения угол преломления станет равным  $90^\circ$ , преломленный луч скользит по границе раздела двух сред (рис. 6.14). Такой угол падения называют предельным углом  $i_{\text{пред}}$  полного внутреннего отражения.

Таким образом, можно записать условие для расчета  $i_{\text{пред}}$  для различных сред. Так из уравнения (6.55) можно получить

$$\sin i_{\text{пред}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.56)$$

Явление полного внутреннего отражения используется в волоконной оптике, когда ЭМВ видимого диапазона излучения по оптическим волокнам передаются на большие расстояния без потери энергии. Такой способ передачи информации обладает большой пропускной способностью из-за высокой несущей частоты (для видимого диапазона излучения  $\omega$  составляет порядка  $3 \cdot 10^{15}$  рад/с) и большой защищенностью информации.

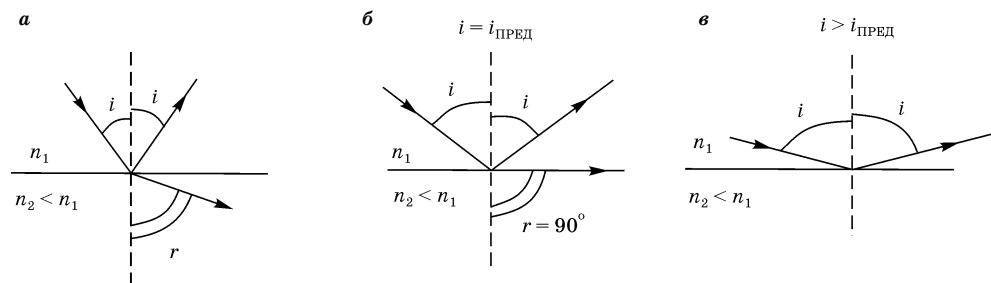


Рис. 6.14

**6.2.3.  
ДАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ.  
ОПЫТЫ П. Н. ЛЕБЕДЕВА, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ ПРИРОДУ СВЕТА**

Согласно теории Максвелла, электромагнитная волна переносит энергию, а следовательно, и импульс, вследствие чего должна оказывать давление на поверхность.

Найдем формулу для давления электромагнитной волны при ее нормальном падении в вакууме на полностью поглощающую ЭМВ поверхность. Как известно, давление  $P$  равно отношению усредненной по времени силы давления  $\langle F \rangle$  к площади поверхности  $S$ .

По II закону Ньютона сила давления равна отношению импульса, переданного поверхности электромагнитной волной за промежуток времени  $\Delta t$ , к этому промежутку времени. Учитывая, что  $\Delta V = S \Delta l c = S \Delta l$  — объем электромагнитного поля, который поглощается поверхностью за время  $\Delta t$ , а  $m$  и  $W = mc^2$  — масса и энергия электромагнитного поля объема  $\Delta V$ , можно получить для давления ЭМВ следующую формулу:

$$P = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle \Delta \vec{p} \rangle}{\Delta t S} \cdot \frac{c}{c} = \frac{\langle mc \rangle c}{S \Delta l} = \frac{\langle mc^2 \rangle}{\Delta V} = \frac{\langle W \rangle}{\Delta V} = \langle w \rangle,$$

или в общем случае для поверхности, которая не только поглощает, но и отражает ЭМВ, запишем:

$$P = \langle w \rangle (1 + R), \quad (6.57)$$

где введен коэффициент отражения  $R$ ; он учитывает изменение давления электромагнитной волны на поверхность в случае частичного отражения ЭМВ от нее. При  $R = 1$  электромагнитная волна полностью отражается поверхностью.

Формула (6.57), полученная Максвеллом на основе его теории ЭМВ, была проверена экспериментально в опытах П. Н. Лебедева. Сначала в 1900 г. он экспериментально измерил давление света на твердые тела, а в 1907 г. — на газы.

Прибор Лебедева представлял собой крутильные весы, подвижной частью которых являлся легкий стержень с укрепленными на нем черными и светлыми дисками толщиной от 0,1 мм до 0,01 мм (рис. 6.15). Если послать на такую установку ЭМВ, то тогда стержень будет поворачиваться, так как давление света на светлый диск в два раза превышает давление на черный диск. По углу поворота можно оценить вращающий момент, действующий на систему, и тем самым оценить давление. Угол поворота определяется с

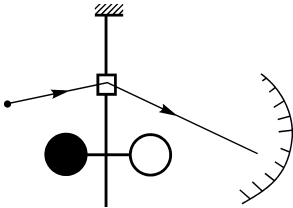


Рис. 6.15

большой точностью отклонением по шкале прибора светового зайчика, отраженного от зеркала. Объемную плотность энергии ЭМВ Лебедев измерял с помощью специального калориметра, он фиксировал повышение температуры калориметра, направляя на него в течение некоторого промежутка времени электромагнитное излучение.

Определяя независимо давление света и среднее значение объемной плотности  $\langle w \rangle$  электромагнит-

ной волны, Лебедев показал справедливость формулы (6.57) и тем самым экспериментально доказал справедливость электромагнитной природы света.

Уникальность опытов П. Н. Лебедева можно понять, если оценить давление, которое оказывает идущий от Солнца световой поток  $\Phi$  (он равен 86 Вт на 1 м<sup>2</sup>) на поверхность Земли:

$$P = \langle w \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta W}{\Delta t S c} = \frac{\Phi}{S c} = \frac{86}{1 \text{ м}^2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Па},$$

что значительно меньше атмосферного давления.

Также оказалось, что в опытах существенное влияние производит **радиометрический эффект**, в соответствии с которым освещенная сторона черного диска за счет поглощения света имеет более высокую температуру, чем неосвещенная. Вследствие этого скорости молекул вблизи этой стороны будут больше и при столкновениях с ней молекулы будут передавать этой стороне диска бóльший импульс. Это создает добавочное давление на черный диск и приводит к искажению результатов опыта. Для устранения этого эффекта опыты проводились в глубоком вакууме, а толщина дисков выбиралась достаточно малой (до 0,01 мм).

Световое давление является одной из причин, обуславливающих появление хвостов у комет при значительном приближении их к Солнцу. В кометах из-за малых размеров частиц вещества их отталкивание световым давлением, пропорциональное площади поверхности частиц, превышает их притяжение гравитационным полем Солнца, пропорциональное объему частиц.

#### 6.2.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

##### 6.2.4.1. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. СПОСОБЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Согласно теории Максвелла, радиоволны, свет, рентгеновское излучение и  $\gamma$ -излучение представляют собой электромагнитные волны, частота которых изменяется практически от нуля до очень больших значений ( $\nu > 10^{20}$  Гц). Это приводит к существенным изменениям свойств электромагнитных волн, способов их возбуждения (генерации) и распространения. В связи с этим всю шкалу ЭМВ разделяют на различные диапазоны, между которыми нет четко обозначенных границ ввиду плавного изменения свойств электромагнитных волн и перекрытия способов их генерации для соседних диапазонов.

На шкале ЭМВ выделяют следующие диапазоны (рис. 6.16).

**1. Радиоволны** ( $1 \cdot 10^3$  Гц  $\leq \nu \leq 6 \cdot 10^{12}$  Гц;  $300$  км  $\leq \lambda \leq 0,005$  мм) излучаются переменными токами, текущими в проводниках (антенны, вибратор Герца), и электронами, движущимися в электромагнитных полях. Колебания здесь создают генераторами радиочастот (колебательный контур) и генераторами диапазона сверхвысоких частот (СВЧ-диапазона).

**2. Световые волны** излучаются при переходах электронов между уровнями энергий в молекулах и атомах при тепловых и электрических воздействиях на них. Этот диапазон ЭМВ разделяют на отдельные поддиапазоны —

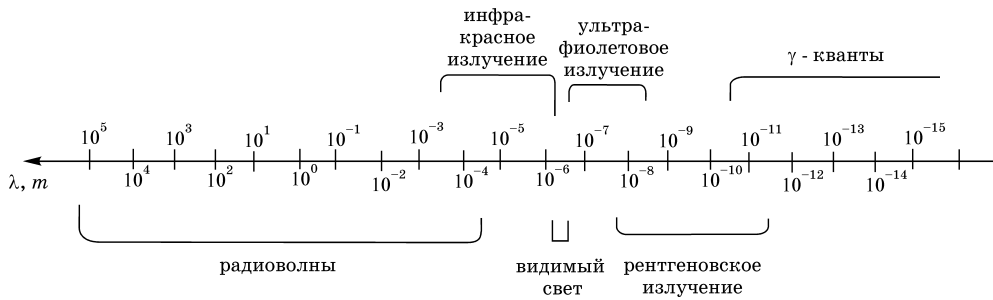


Рис. 6.16

**инфракрасное излучение** ( $6 \cdot 10^{11}$  Гц  $\leq \nu \leq 3,9 \cdot 10^{14}$  Гц;  $770$  нм  $\leq \lambda \leq 0,5$  мм), **видимый свет** ( $3,9 \cdot 10^{14}$  Гц  $\leq \nu \leq 7,9 \cdot 10^{14}$  Гц;  $380$  нм  $\leq \lambda \leq 770$  нм) и **ультра-фиолетовое излучение** ( $7,9 \cdot 10^{14}$  Гц  $\leq \nu \leq 6,0 \cdot 10^{16}$  Гц;  $5,0$  нм  $\leq \lambda \leq 380$  нм).

**3. Рентгеновское излучение** ( $6 \cdot 10^{15}$  Гц  $\leq \nu \leq 6,0 \cdot 10^{18}$  Гц;  $50$  нм  $\leq \lambda \leq 0,005$  нм) — ЭМВ этого диапазона излучаются при столкновениях ускоренных электронов с атомами тяжелых металлов или при движении высоко-энергетических электронов в магнитном поле.

**4. Гамма-излучение** ( $\nu \geq 3 \cdot 10^{18}$  Гц;  $\lambda \leq 0,1$  нм) — ЭМВ этого диапазона излучаются возбужденными атомными ядрами при радиоактивном распаде, ядерных реакциях и т. д.

При увеличении частоты ЭМВ все четче проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения. Так, например, взаимодействие фотонов рентгеновского диапазона со свободными электронами уже можно рассматривать как результат рассеяния их друг на друге.

#### 6.2.4.2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИПОЛЕМ

Этот частный случай излучения ЭМВ представляет значительный интерес, так как подобно диполю излучают атомы и молекулы, а также антенны (проводники с переменным током).

Напомним, что под диполем понимают электронейтральную систему, состоящую из двух близко расположенных разноименных зарядов. Диполь характеризуется дипольным моментом  $\vec{p}$ , модуль которого равен произведению модуля одного из зарядов диполя на расстояние между ними ( $p = ql_0$ ). Модуль напряженности электрического поля, создаваемого самим диполем, убывает с расстоянием от него по закону  $E_{\text{дип}} \sim p/r^3$ .

Для того чтобы заставить диполь излучать электромагнитные волны, необходимо создать ускоренное движение его зарядов. Для этого будем считать, что заряд ( $-q$ ) совершает около неподвижного положительного заряда ( $+q$ ) вдоль оси диполя гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$  (рис. 6.17a). Тогда расстояние между зарядами будет изменяться по закону  $l = l_0 \cos \omega t$ , а сам диполь, как это показывают расчеты, при  $l_0 \ll \lambda$  будет излучать сферическую ЭМВ, вектор напряженности электрического поля которой изменяется по закону

$$\vec{E} = \vec{E}_m(r) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha),$$

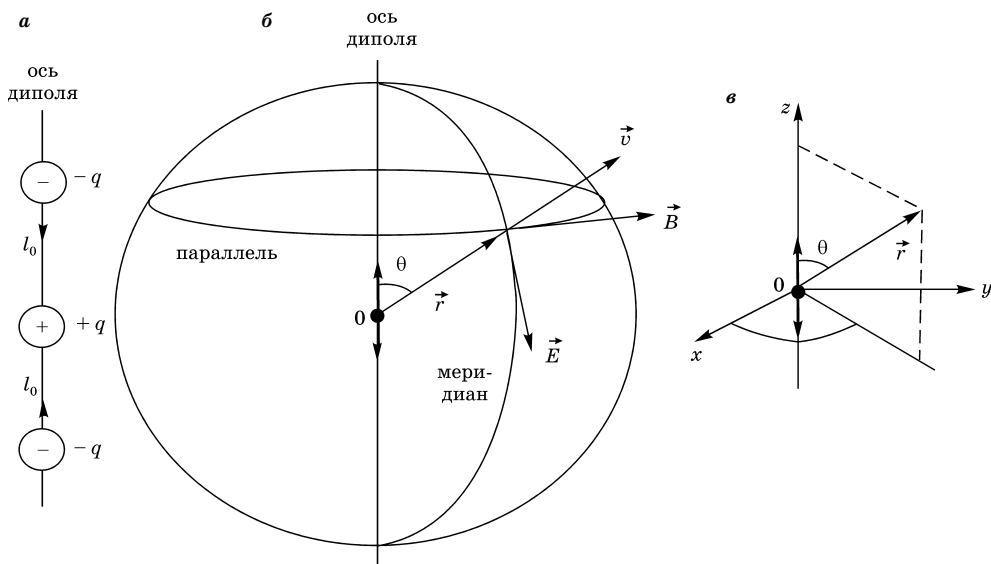


Рис. 6.17

где амплитуда вектора  $\vec{E}$  определяется формулой

$$E_m \sim \frac{qa \sin \theta}{r}. \quad (6.58)$$

В выражении (6.58)  $q$  — модуль одного из зарядов диполя,  $a$  — амплитуда ускорения, с которым движется отрицательный заряд ( $a = \omega^2 l_0$ ), угол  $\theta$  — угол между осью диполя и вектором  $\vec{r}$ , проведенным от диполя в рассматриваемую точку пространства (рис. 6.17б).

Формула (6.58) справедлива в волновой зоне — это область пространства, отстоящая от излучающей системы на расстояниях  $r$ , которые значительно превосходят размеры излучающей системы (в данном случае длину диполя,  $l_0$ ) и длину излучаемых ею волн ( $r \gg \lambda$ ). На таких расстояниях  $r$  картина электромагнитного поля волны в волновой зоне сильно упрощается.

Удобно поверхность сферической волны разбить на параллели и меридианы по аналогии с поверхностью земного шара. Тогда (см. рис. 6.17б) следует, что вектор  $\vec{E}$  излучаемой диполем электромагнитной волны располагается в плоскости, проходящей через ось диполя. Причем вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к меридиану, а вектор  $\vec{B}$  располагается в плоскости, перпендикулярной к оси диполя, по касательной к параллели.

**Диаграмма направленности излучения диполя** показывает распределение энергии излучения по всем направлениям в пространстве. На ней откладываются отрезки прямой, длина которых пропорциональна интенсивности электромагнитной волны, излучаемой в данном направлении. Для диполя

$$\begin{aligned} I &= \langle S_{\Pi} \rangle \sim E_m^2 \sim \sin^2 \theta, \\ I &= I_0 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.59)$$

где  $I_0$  — максимальная интенсивность излучаемых электромагнитных волн.

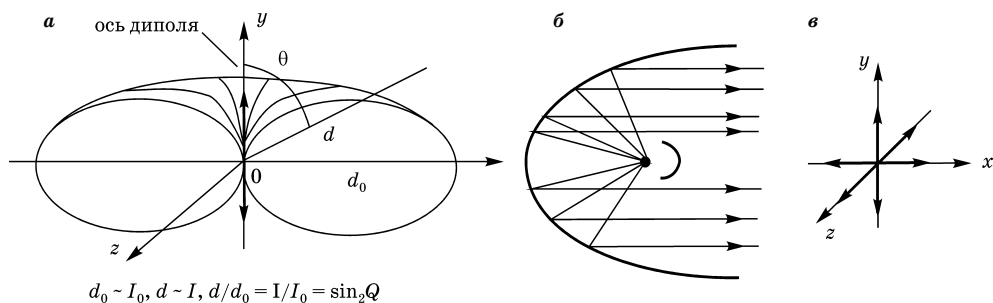


Рис. 6.18

Из формулы (6.59) можно сделать следующие выводы:

1) диаграмма направленности излучения обладает осевой симметрией, так как интенсивность  $I$  не зависит от угла  $\varphi$  (рис. 6.18а);

2) максимальная интенсивность излучения наблюдается по всем направлениям, лежащим в плоскости, перпендикулярной к оси диполя ( $\theta = 90^\circ$ ,  $I = I_0 \sin 90^\circ = I_0$ );

3) вдоль оси диполь не излучает ЭМВ ( $\theta = 0$ ,  $I = I_0 \sin 0^\circ = 0$ ).

Диаграмма направленности излучения диполя является достаточно широкой и, образно говоря, представляет собой бублик «без дырки».

Применяя разные комбинации различных излучателей ЭМВ, можно получить различные диаграммы направленности излучения. Так, например, узкую диаграмму направленности излучения — параллельный пучок ЭМВ — можно получить, если поместить источник излучения в фокусе параболического зеркала (рис. 6.18б), а самую широкую диаграмму направленности излучения — сферическую — дают три взаимно перпендикулярных диполя (рис. 6.18в).

В соответствии с формулой (6.58) **мощность и интенсивность излучения диполя** можно выразить следующим образом:

$$P_{\text{и}} = \oint_S \tilde{S}_{\text{П}} d\tilde{S} \sim \oint_S E_m^2 dS \sim \oint_S \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{r^2} 4\pi r^2 d\theta d\varphi \sim q^2 a^2 \sim q^2 l_0^2 \omega^4 \sim p^2 \omega^4. \quad (6.60 \text{ а})$$

$$I = \langle S_{\text{П}} \rangle \sim E_m^2 \sim \frac{q^2 a^2}{r^2} q^2 a^2 \sim q^2 l_0^2 \omega^4 \sim p^2 \omega^4. \quad (6.60 \text{ б})$$

Итак, мощность и интенсивность излучаемых диполем электромагнитных волн прямо пропорциональны четвертой степени частоты колебаний его зарядов. Следовательно, увеличение частоты колебаний зарядов диполя приводит к резкому увеличению мощности излучаемых им ЭМВ. Поэтому выгодно передавать сигналы на большие расстояния с помощью ЭМВ высокой частоты.

Для повышения циклической частоты собственных колебаний контура ( $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ) необходимо уменьшать емкость конденсатора ( $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$ , то есть уменьшать площадь его пластин и увеличивать расстояние между ними) и уменьшать индуктивность катушки ( $L = \mu \mu_0 n^2 V$ , то есть уменьшать число ее витков). Это в итоге приводит к **открытому колебательному контуру** (рис. 6.19в).

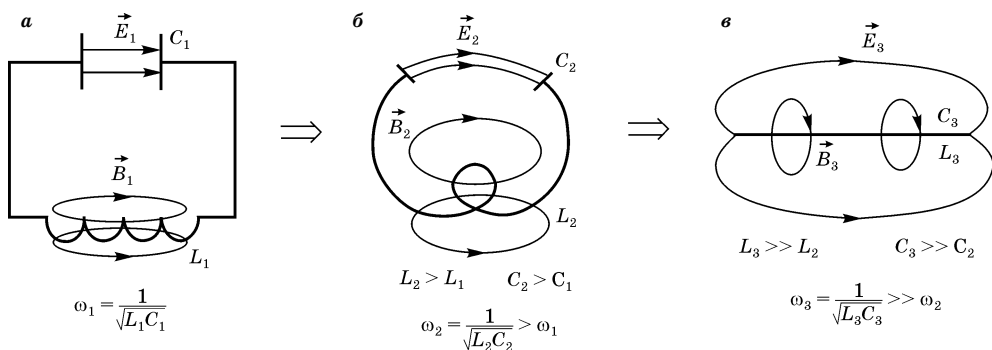


Рис. 6.19

Он представляет собой отрезок проводника (антенну), в котором возбуждаются высокочастотные электромагнитные колебания. Они излучаются в пространство в виде ЭМВ большой мощности. Открытый колебательный контур также называют полуволновым диполем, так как на его длине укладывается половина длины волны, излучаемой антенной, или вибратором Герца. Отметим, что в антенне перекрываются электрическое и магнитное поля, это существенно повышает мощность излучения ЭМВ по сравнению с закрытым колебательным контуром.

В связи с резким повышением мощности излучения высокочастотных колебаний, передача сигнала звуковой частоты на большие расстояния происходит за счет модуляции высокочастотных колебаний сигналом звуковой частоты. При приеме модулированного ВЧ-сигнала проводят его детектирование, то есть отделяют звуковой сигнал от высокочастотного колебания.

Впервые электромагнитные волны экспериментально были обнаружены Герцем (1888) с помощью открытого колебательного контура. Возбуждая в нем затухающие высокочастотные колебания, он с помощью такого же приемного колебательного контура принимал ЭМВ и тем самым доказал факт их существования и подтвердил теорию Максвелла.

#### 6.2.5. ОПЫТЫ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ИХ СВОЙСТВА

**1. Электромагнитные колебания в излучаемом полуволновом диполе (изучение стоячей электромагнитной волны в диполе).** Генератор УВЧ создает в индуктивно связанной с ним антенне гармонические колебания частоты  $\nu = 150$  МГц или длины волны  $\lambda = 2$  м.

Антенна представляет собой отрезок проводника длиной  $l = \lambda/2 = 1$  м, что соответствует полуволновому диполу. В ней устанавливаются стоячие волны:

1) стоячая волна электрического поля — на краях проводника наблюдаются пучности, а посередине — узел этой волны;

2) стоячая волна магнитного поля — на краях проводника образуются узлы, а посередине — пучность стоячей волны (см. рис. 6.20).

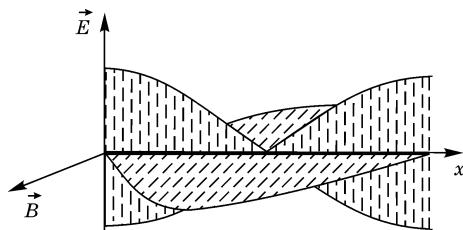


Рис. 6.20

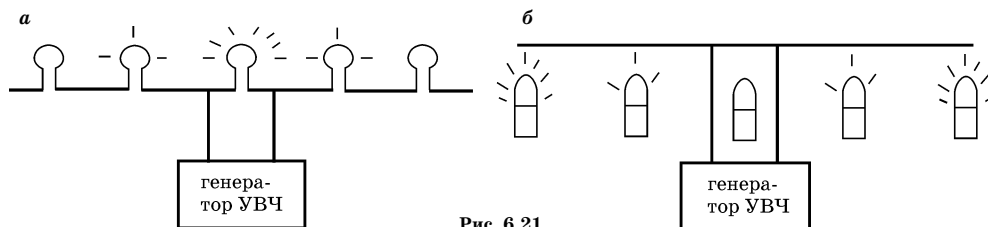


Рис. 6.21

Наглядно это можно продемонстрировать, если взять проводник, в котором имеются лампочки на разных расстояниях от его середины. Лампочка посередине проводника имеет наибольшую яркость, так как здесь располагается пучность стоячей волны магнитного поля. Яркость лампочек спадает при переходе к краям проводника, где находятся узлы стоячей волны магнитного поля (рис. 6.21а). Напомним, что модуль вектора магнитной индукции пропорционален силе тока в проводнике.

Если взять газоразрядную лампочку, которая светится под действием электрического поля, то тогда ее свечение будет наиболее ярким на краях проводника, где находятся пучности стоячей волны электрического поля, и будет отсутствовать посередине проводника (рис. 6.21б).

**2. Расположение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в излучаемой диполем ЭМВ.** Покажем, что вектор  $\vec{E}$  в излучаемой диполем ЭМВ совершает колебания в плоскости, проходящей через ось диполя, а вектор  $\vec{B}$  — в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Отметим, что в данном случае диполь излучает цилиндрическую волну.

Расположим параллельно передающему диполю составной диполь такой же длины, две равные части которого замкнуты лампочкой накаливания (рис. 6.22а). При этом лампочка ярко светится, так как вектор  $\vec{E}$  излучаемой ЭМВ располагается вдоль оси приемного диполя (рис. 6.22б) и поэтому возбуждает в нем интенсивное движение электронов и возникающий при этом электрический ток достаточен для яркого свечения лампочки. Кроме того, равенство длины приемного и излучаемого диполей (отрезков прямолинейного проводника) приводит к явлению резонанса, что резко усиливает вынужденные колебания в приемном диполе.

По мере поворота приемного диполя яркость свечения лампочки уменьшается и, когда диполи оказываются перпендикулярными друг к другу, лампочка гаснет: вектор  $\vec{E}$ , перпендикулярный к длине диполя, не может возбудить в нем интенсивных движений электронов (рис. 6.22б, в).



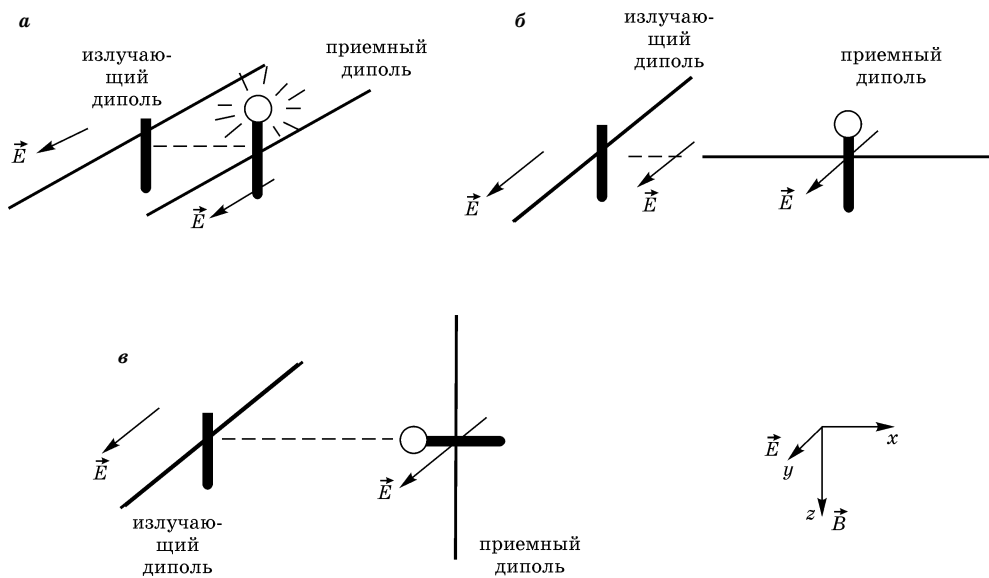


Рис. 6.22

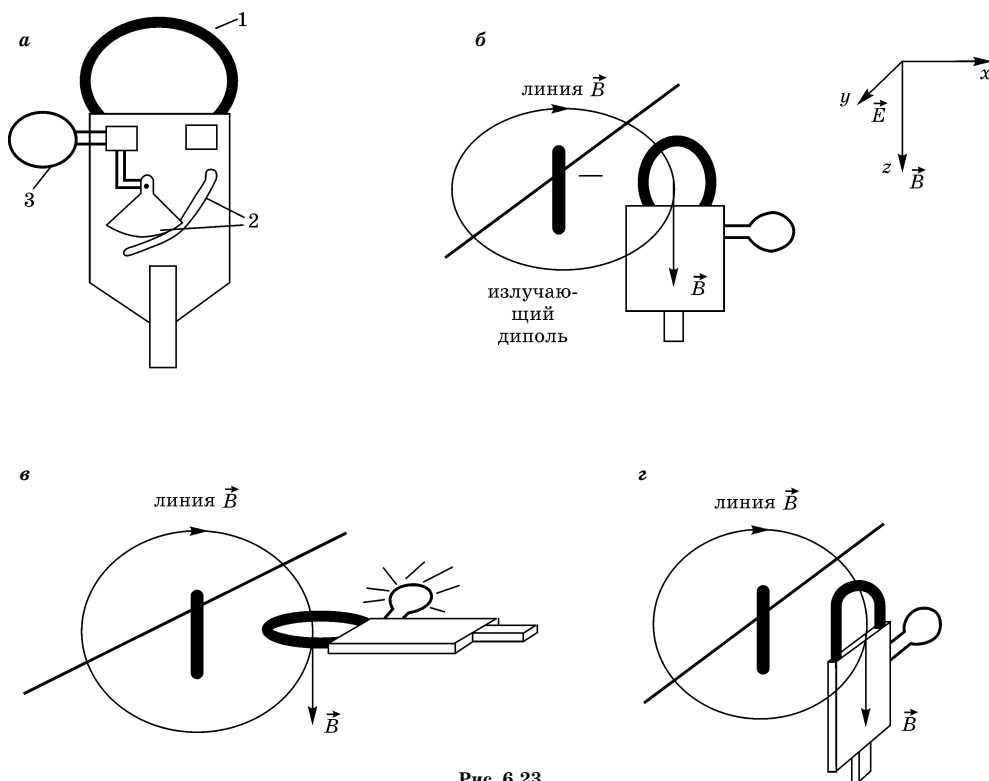


Рис. 6.23

Рассмотрим теперь расположение вектора  $\vec{B}$  в излучаемой диполем ЭМВ. Для этого используем резонирующий контур. Он состоит из последовательно соединенных между собой проволочного витка 1, конденсатора переменной емкости 2 (за счет изменения площади перекрытия пластин конденсатора) и лампочки накаливания 3 (рис. 6.23а).

Вначале контур располагают вблизи генератора и путем изменения емкости конденсатора добиваются максимальной яркости свечения лампочки. Затем контур помещают на некотором расстоянии от передающего диполя поочередно в положениях б-г (рис. 6.23). Лампочка светится лишь тогда, когда диполь оказывается в плоскости витка (рис. 6.23в). При этом колебания вектора  $\vec{B}$  приводят к неравному нулю магнитному потоку через плоскость контура, изменение которого со временем приводит к возникновению ЭДС индукции в витке. В случаях же б и г вектор  $\vec{B}$  колеблется в направлении, параллельном плоскости витка (линии  $\vec{B}$  не пересекают плоскости витка), тогда магнитный поток будет равен нулю и ЭДС индукции в контуре не возникает.

Таким образом, этот опыт показывает, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  взаимно перпендикулярны, вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости, проходящей через ось диполя, а вектор  $\vec{B}$  — в плоскости, перпендикулярной к оси диполя.

**3. Влияние среды на скорость распространения ЭМВ.** На равных расстояниях от излучающей антенны (диполя) длиной  $l = 1$  м, параллельно ей, располагают два приемных диполя с лампочками посередине. Один из них имеет длину  $l_1 = 1$  м, а другой, короткий, —  $l_2 = 0,1$  м. При включении генератора лампочка в длинном приемном диполе загорается, а в коротком — нет (рис. 6.24а).

Это объясняется явлением резонанса. В приемной антенне возникают вынужденные колебания под действием приходящей к ним ЭМВ. При совпадении частоты колебаний, приходящей на приемную антенну ЭМВ, с собственной частотой колебаний приемной антенны как открытого колебательного контура амплитуда вынужденных колебаний в ней резко возрастает. Для приемного диполя такой же длины, как и излучающий диполь, наступает явление резонанса (лампочка загорается), чего нельзя сказать о коротком приемном диполе — для него явление резонанса отсутствует, и лампочка в нем не загорается.

Затем, не меняя расположения диполей, помещают короткий диполь в сосуд с водой (рис. 6.24б). В этом случае загораются лампочки в обоих диполях. Тот факт, что в коротком диполе загорается лампочка, связан с влиянием

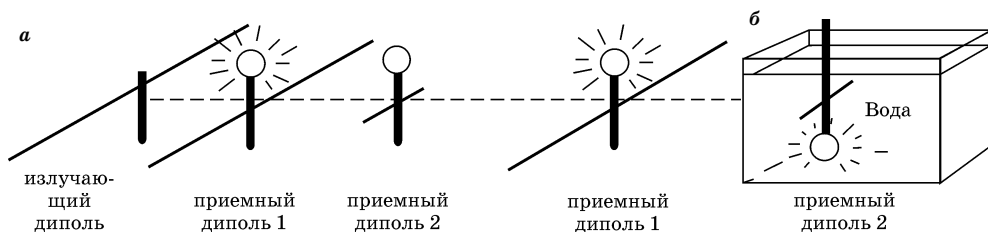


Рис. 6.24

среды на скорость распространения ЭМВ. Действительно, для ЭМВ СВЧ-диапазона абсолютный показатель преломления для воды равен  $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{81} = 9$ , и поэтому длина волны в воде составит

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 1,5 \cdot 10} \approx 0,1 \text{ м},$$

и для короткого диполя длиной  $l_2 = 0,1 \text{ м}$  ( $\lambda = 0,2 \text{ м}$ ) в воде также наблюдается явление резонанса, поэтому лампочка, включенная в него, светится.

#### \*6.2.6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Под **эффектом Доплера** понимают изменение частоты, регистрируемой приемником волны, связанное с движением источника и приемника. Впервые теоретически этот эффект в акустике и оптике был обоснован австрийским физиком К. Доплером в 1842 году.

Рассмотрим вывод формулы, определяющей частоту упругой волны, воспринимаемой приемником, на примере двух частных случаев.

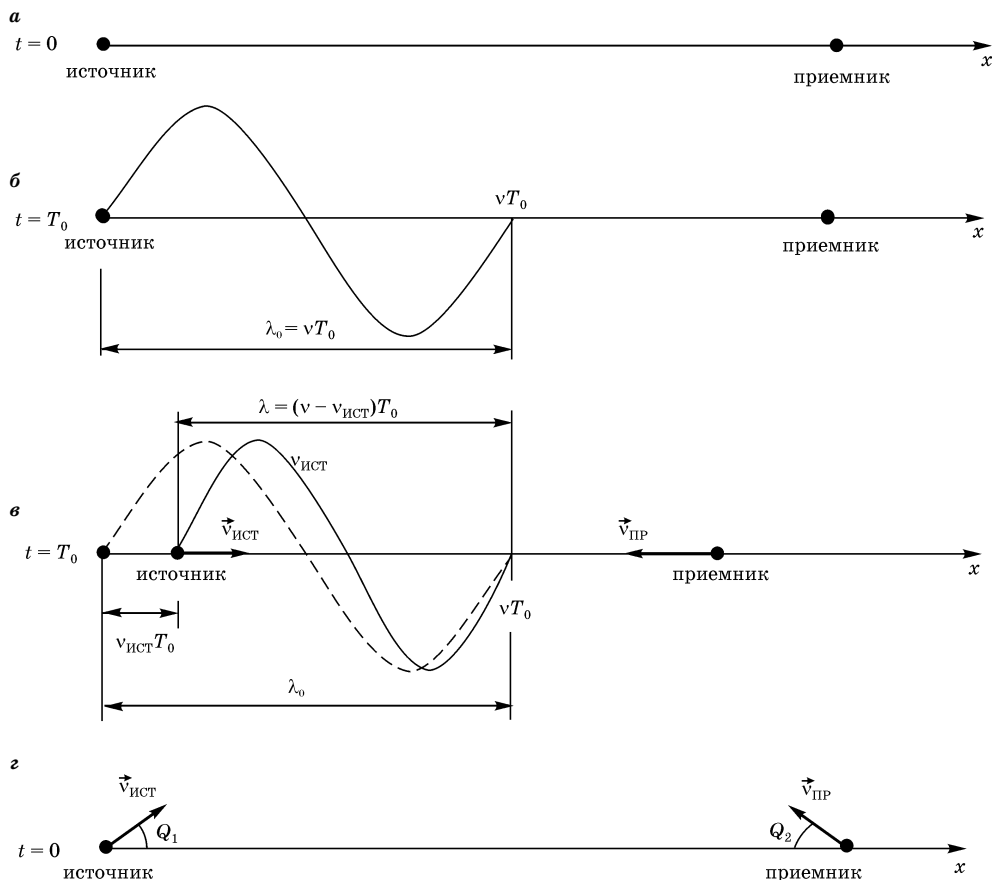


Рис. 6.25

1. В среде находятся неподвижные источник и приемник звуковых волн (см. рис. 6.25а). Испускаемые источником волны частоты  $\nu_0$  и длины волны  $\lambda_0 = v/\nu_0$ , двигаясь со скоростью  $v$ , достигают приемника и создают в нем колебания такой же частоты  $\nu_0 = v/\lambda_0$  (рис. 6.25б).

2. Источник и испускаемая им волна движутся вдоль оси  $Ox$ . Приемник движется к ним навстречу. Отметим, что скорость волны  $v$  зависит только от свойств среды и не зависит от движения приемника и источника. Поэтому движение источника при постоянной частоте  $\nu_0$  излучаемых им колебаний приведет к изменению только длины волны. Действительно, источник за период колебаний  $T_0$  пройдет расстояние  $v_{\text{ист}}T_0$ , а по закону сложения скоростей волна отойдет от источника на расстояние  $(v - v_{\text{ист}})T_0$ , поэтому ее длина волны  $\lambda = (v - v_{\text{ист}})/\nu_0$  будет меньше  $\lambda_0$  (рис. 6.25в).

По отношению к приемнику волна в соответствии с законом сложения скоростей будет двигаться со скоростью  $v + v_{\text{пр}}$ , и для неизменной длины волны  $\lambda$  частота колебаний  $\nu$ , воспринимаемых источником, изменится:

$$\nu = \frac{v + v_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}} \nu_0.$$

Если источник и приемник будут удаляться друг от друга, то тогда в формуле для частоты  $\nu$  нужно изменить знаки. Следовательно, единая формула для частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника и приемника по одной прямой будет выглядеть следующим образом:

$$\nu = \frac{v \pm v_{\text{пр}}}{v \mp v_{\text{ист}}} \nu_0. \quad (6.61)$$

Из этой формулы следует, что для наблюдателя, находящегося, например, на станции, частота звукового сигнала приближающегося поезда ( $v_{\text{пр}} = 0$ ,  $v_{\text{ист}} > 0$ ) будет больше, а при удалении от станции — меньше. Если, например, взять скорость звука  $v = 340$  м/с, скорость поезда  $v = 72$  км/ч и частоту звукового сигнала  $\nu_0 = 1000$  Гц (такая частота хорошо воспринимается человеческим ухом, причем ухо различает звуковые волны с разностью частот, большей 10 Гц), то тогда частота сигнала, воспринимаемого ухом, будет изменяться в пределах

$$\nu = \frac{v}{v \mp v_{\text{ист}}} \nu_0 = \frac{340}{340 \mp 20} \times 1000 = 1063; 944 \text{ Гц}.$$

Если источник и приемник движутся со скоростями, направленными под углом к соединяющей их прямой, то тогда для расчета частоты  $\nu$ , воспринимаемой приемником, нужно брать проекции их скоростей на эту прямую (рис. 6.25г)

$$\nu = \frac{1 \pm (v_{\text{пр}}/v) \cos \theta_2}{1 \mp (v_{\text{ист}}/v) \cos \theta_1} \nu_0. \quad (6.62)$$

Эффект Доплера наблюдается и для электромагнитных волн. Но, в отличие от упругих волн, электромагнитные могут распространяться в отсутствии среды, в вакууме. Следовательно, для этих волн не имеет значения скорость движения источника и приемника относительно среды. Для электро-

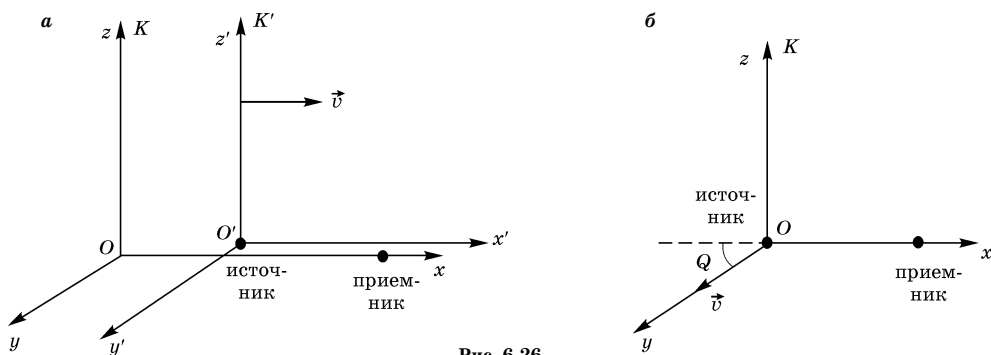


Рис. 6.26

магнитных волн необходимо рассматривать относительную скорость движения источника и приемника, учитывая при этом преобразования Лоренца и замедление хода времени в движущейся системе отсчета.

Рассмотрим **продольный эффект Доплера**. Выведем формулу для частоты электромагнитной волны, фиксируемой приемником, в частном случае — источник и приемник движутся навстречу друг другу в направлении соединяющей их прямой. Пусть имеются две ИСО — неподвижная ИСО  $K$  (в ней находится неподвижный приемник) и движущаяся относительно нее вдоль совпадающих осей координат  $Ox$  и  $Ox'$  ИСО  $K'$  (в ней находится неподвижный источник) (рис. 6.26а).

Рассмотрим, что наблюдается в ИСО  $K$  и  $K'$ .

**1) ИСО  $K'$ .** Источник ЭМВ неподвижен и находится в начале оси координат  $Ox'$  (рис. 6.26а). Он излучает в ИСО  $K'$  ЭМВ с периодом  $T' = T_0$ , частотой  $\nu' = \nu_0 = 1/T_0$  и длиной  $\lambda' = cT' = cT_0$ .

Приемник движется, но его движение не влияет на изменение частоты принимаемого сигнала. Это связано с тем, что согласно второму постулату С. Т. О. скорость ЭМВ относительно приемника будет всегда равна  $c$  и поэтому частота принимаемой приемником волны в ИСО  $K'$  будет также равна  $\nu_0$ .

**2) ИСО  $K$ .** Приемник ЭМВ неподвижен, а источник движется в направлении оси  $Ox$  со скоростью  $v$ . Поэтому для источника необходимо учесть релятивистский эффект замедления времени. Это означает, что период волны, излучаемой источником в этой инерциальной системе отсчета, будет больше периода волны в ИСО  $K'$  ( $T = T' / \sqrt{1 - v^2/c^2} > T' = T_0$ ).

Для длины волны  $\lambda$ , излучаемой источником в направлении приемника, можно записать:

$$\lambda = (c - v)T = (c - v) \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(c - v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} T_0.$$

Это выражение позволяет для периода  $T$  и частоты  $\nu$ , воспринимаемой приемником ЭМВ в ИСО  $K$ , записать следующие формулы:

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} T_0 \Rightarrow \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (6.63)$$

где учтено, что скорость ЭМВ относительно приемника в ИСО  $K$  равна  $c$ .

В случае удаления источника и приемника необходимо в формуле (6.63) изменить знаки. При этом фиксируемая приемником частота излучения будет уменьшаться по сравнению с частотой волны, излучаемой источником, то есть наблюдается красное смещение спектра видимого света.

Как видно, в выражение (6.63) не входит скорость источника и приемника по отдельности, только скорость их относительного движения.

Для электромагнитных волн также наблюдается **поперечный эффект Доплера**, который связан с эффектом замедления времени в движущейся инерциальной системе отсчета. Возьмем момент времени, когда скорость источника ЭМВ будет перпендикулярна линии наблюдения (рис. 6.26б), тогда движения источника к приемнику не происходит и поэтому длина излучаемой им волны не изменяется ( $\lambda = \lambda' = cT' = cT_0$ ). Остается только релятивистский эффект замедления времени

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} T_0, \quad v = v_0 \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (6.64)$$

Для поперечного эффекта Доплера изменение частоты будет существенно меньше, чем для продольного эффекта Доплера. Действительно, отношение разности частот, найденных по формулам (6.63) и (6.64) для продольного и поперечного эффектов ( $v - v_0$ , отнесенное к  $v_0$ , будет значительно меньше единицы ( $v/c \ll 1$ , особенно для поперечного эффекта Доплера (еще на порядок меньше)

$$\left( \frac{v - v_0}{v_0} \right)_{\text{прод}} \approx \frac{v}{c} \ll 1, \quad \left( \frac{v_0 - v}{v_0} \right)_{\text{попер}} \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

Поперечный эффект Доплера был подтвержден экспериментально, что еще раз доказало справедливость специальной теории относительности.

Приведенные здесь доводы в пользу формулы (6.64) не претендуют на строгость, но они дают правильный результат. В общем случае, для произвольного угла  $\theta$  между линией наблюдения и скоростью движения источника  $\vec{v}$  можно записать следующую формулу:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad (6.65)$$

где угол  $\theta$  — это угол между линией наблюдения и скоростью движения источника (рис. 6.26б).

Поперечный эффект Доплера отсутствует для упругих волн в среде. Это связано с тем, что для определения частоты волны, воспринимаемой приемником, берутся проекции скоростей на прямую, соединяющую источник и приемник (рис. 6.25в), а замедление времени для упругих волн отсутствует.

Эффект Доплера находит широкое практическое применение, например, для измерения скоростей движения звезд, галактик по доплеровскому (красному) смещению линий в спектрах их излучения; для определения скоростей движущихся целей в радиолокации и гидролокации; для измерения температуры тел по доплеровскому уширению линий излучения атомов и молекул и т. д.

### \*6.3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

Помимо традиционно изучаемых типов волн, можно привести примеры и других видов волн, которые занимают особое место при анализе процессов распространения колебаний в различных средах.

**1. Ударная волна.** Ударная волна (скачок уплотнения) — это распространяющаяся со сверхзвуковой скоростью тонкая переходная область, в которой происходит резкое увеличение плотности, давления и скорости вещества. Она возникает при взрывах, детонации, сверхзвуковых движениях тел, при мощных электрических разрядах и т. д. Например, во время взрыва образуются продукты взрыва, обладающие большой плотностью и находящиеся под большим давлением. Расширяющиеся продукты взрыва сжимают окружающий воздух, причем в каждый момент времени сжатым оказывается лишь воздух, находящийся в определенном объеме, вне этого объема воздух остается в невозмущенном состоянии. С течением времени объем сжатого воздуха возрастает. Поверхность, которая отделяет сжатый воздух от невозмущенного воздуха, и представляет собой ударную волну (или фронт ударной волны).

При ускоренном движении тела ударная волна возникает не сразу. Сначала возникает волна сжатия с непрерывными распределениями плотности и давления. С течением времени крутизна передней части волны возрастает, и в некоторый момент времени происходит резкий скачок всех гидродинамических величин, возникает ударная волна.

В случае движения тела со сверхзвуковой скоростью ( $v > v_{\text{звука}}$ ) звуковые волны охватывают лишь часть объема газа, лежащую позади движущегося тела и ограниченную некоторой поверхностью, называемой характеристической поверхностью, поверхностью слабого разрыва, или фронтом ударной волны.

При сверхзвуковом движении тела малых размеров со скоростью  $v$  характеристическая поверхность (фронт волны) имеет вид круговой конической поверхности, вершина которой совпадает с движущимся телом  $O$ , а угол  $\alpha$  между образующими и траекторией тела удовлетворяет условию:  $\sin \alpha = v_{\text{звука}}/v$ . Этот угол называют углом слабых возмущений или углом Маха (рис. 6.27).

В случае электромагнитных волн аналогом ударной звуковой волны, возникающей при движении тел со скоростями, превышающими фазовые скорости упругих волн в данной среде, является излучение Вавилова–Черенкова (см. раздел 7.4.4).

**2. Уединенная волна** представляет собой волновое движение, которое в каждый момент времени локализовано в конечной области пространства и относительно медленно изменяет свою структуру при распространении. Типичная

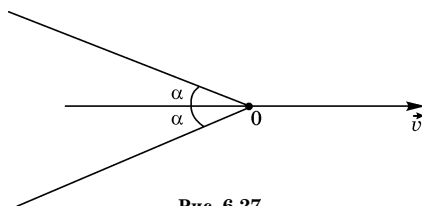


Рис. 6.27

уединенная волна имеет вид одиночного импульса или перепада, но может иметь и более сложную структуру.

К уединенным волнам относят такие типы нелинейных волн, как уединенные волны в диссипативных средах, стационарные импульсные волны возбуждения в активных средах (нервные импульсы) и солитон в среде без потерь.

Солитон (от *лат.* *solus* — «один») — структурно устойчивая уединенная волна в нелинейной диспергирующей среде. Структура солитона поддерживается стационарной за счет баланса между действием нелинейности среды и дисперсии. Солитоны ведут себя подобно частицам: при взаимодействии между собой или с некоторыми другими возмущениями солитоны не разрушаются, а расходятся, вновь сохраняя свою структуру неизменной.

Солитон впервые наблюдался в 1834 г. Дж. С. Расселом. Он наблюдал за баржей в узком канале, которую тянула пара лошадей, и увидел, что масса воды в момент торможения баржи не остановилась, а собралась у носа судна в виде выступа, и затем этот выступ стал самостоятельно распространяться далее, сохраняя на протяжении длительного времени свою структуру и скорость. (Отметим, что физики несколько раз пытались повторить эксперимент, и это удалось только в 1995 г. на том же самом месте в Великобритании).

Солитоны играют важную роль в теории конденсированного состояния вещества, в частности в квантовой статистике, теории фазовых переходов. Структуры в форме солитонов обнаружены во многих динамических системах — в плазме, радиосхемах, лазерах, нервных волокнах.



В 1666 г. И. Ньютон создал корпускулярную теорию света. В начале XIX века под давлением многочисленных фактов корпускулярная природа света сменилась волновой, то есть свет стал рассматриваться как волна. Этому способствовали работы Х. Гюйгенса, который в 1690 г. издал «Трактат о свете». В нем была рассмотрена волновая теория света (световые возбуждения являются упругими импульсами в эфире), принцип построения огибающей волны (принцип Гюйгенса) и описано открытое им явление поляризации света. Становлению волновой природы света способствовало также успешное объяснение Т. Юнгом и О. Ж. Френелем явлений интерференции и дифракции света с помощью волновой теории. Так, Т. Юнг в 1801 г. сформулировал принцип интерференции света, через год осуществил опыт по получению интерференции света от двух отверстий, а в 1803 г. измерил длины волн разных цветов.

В 1816 г. Френель дополнил принцип Гюйгенса когерентностью вторичных волн (принцип Гюйгенса–Френеля), а О. Френель и Д. Араго обнаружили, что лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, не интерferируют. Френель создал теорию дифракции света в форме построения зон («зоны Френеля») и положил начало оптике движущихся тел. В 1822 г. Фраунгофер получил дифракцию света от дифракционной решетки, спустя год Френель установил законы отражения и преломления света на плоской неподвижной поверхности раздела двух сред («формулы Френеля»). В 1848 г. Физо распространил эффект Доплера на световые волны.

В настоящее время получила развитие квантовая электродинамика, она изучает методы усиления и генерации электромагнитных колебаний и волн, основанные на использовании вынужденного излучения, а также свойства квантовых усилителей и генераторов и их применения. Практический интерес к оптическим квантовым генераторам — лазерам — обусловлен тем, что их излучение обладает высокой степенью направленности

и монохроматичности, а также значительной интенсивностью. Квантовые генераторы радиодиапазона отличаются от других радиоустройств высокой стабильностью частоты генерируемых колебаний, а квантовые усилители радиоволн — предельно низким уровнем шумов.

В этом разделе рассматриваются электромагнитные волны видимого диапазона излучения ( $\lambda = (400 \div 780) \text{ нм}$ ;  $\omega = (2,42 \div 4,71) \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$ ). Такие волны испускаются при переходах электронов между уровнями энергий в молекулах и атомах, при тепловых и электрических воздействиях на них.

В этом диапазоне излучения глаз человека различает такие основные цвета, как фиолетовый, синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный. Любой цвет можно получить сложением трех независимых цветов в качестве которых можно взять, например, синий, красный и зеленый. Если сложить все волны видимого диапазона излучения, то тогда получится излучение, которое называют **белым светом**.

Далее рассматривается вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны, который также называют **световым вектором** ( $\vec{E}$ ). Он воздействует на глаз человека, вызывая световые ощущения.

## 7.1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Под поляризацией света понимают ту или иную степень упорядоченности колебаний вектора  $\vec{E}$  ЭМВ в пространстве. Представляет интерес, прежде всего, рассмотреть, что представляет собой излучение естественных источников света и их поляризацию.

### 7.1.1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ СВЕТА

К естественным источникам излучения относят тела, излучающие электромагнитные волны за счет своей внутренней энергии, то есть за счет теплового движения атомов и молекул. Это излучение, его еще называют тепловым, присуще всем телам, его интенсивность зависит от температуры тела.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, что излучает естественный источник света.

Известно, что в возбужденном состоянии атом находится  $\tau \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . За это время он переходит в основное состояние, излучая **квант света, фотон**, или **цуг волн**, то есть ограниченный во времени колебательный процесс (отрезок синусоиды, рис. 7.1). Последнее название обычно используют в волновой оптике.

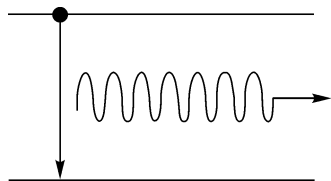


Рис. 7.1

Перечислим характеристики цуга волн, излучаемого естественным источником излучения.

**1. Цуг волн является немонохроматичным**, то есть всегда имеется разброс по частотам ( $\Delta\omega \neq 0$ ), но степень монохроматичности является высокой ( $\omega/\Delta\omega \gg 1$ ).

В теории волновых процессов можно представить цуг волн как волновой пакет, частота которого заключена в узком интервале частот в пределах  $(\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2)$ , где под  $\omega_0$  можно понимать частоту этого волнового пакета, а  $\Delta\omega$  представляет собой ширину его частотного спектра. Для приближенной оценки ширины  $\Delta\omega$  частотного спектра различных импульсов используют формулу (5.43), что для цуга волны позволяет записать выражение

$$\Delta\omega \geq 2\pi\tau \quad (7.1)$$

и оценить степень его монохроматичности:

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} \approx \frac{\tau\omega}{2\pi} \approx \frac{1 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{15}}{2 \cdot 3,14} \approx 5 \cdot 10^6. \quad (7.2)$$

Длину цуга волны  $l_{\text{ц}}$  можно определить по формуле  $l_{\text{ц}} = c \cdot \tau \approx 3$  м.

**2. Начальные фазы цугов волн**, испущенных разными атомами и одним и тем же атомом в разные моменты времени, будут разными, они *принимают случайные значения*.

**3. Цуг волны является линейно поляризованным**, то есть колебания вектора  $\vec{E}$  происходят вдоль одного направления в пространстве. Причем для разных цугов волн эти направления колебаний будут разными.

В итоге излучение естественного источника света представляет собой огромный набор цугов волн, испущенных различными атомами. Это означает, что излучение таких источников является немонохроматичным (в излучении присутствуют всевозможные частоты) из-за того, что переходы электронов происходят между всеми уровнями энергии атомов, а за счет ударного уширения и эффекта Доплера спектр излучения становится сплошным. Это излучение также является неполяризованным, так как в нем присутствуют всевозможные направления колебаний одинаковых по модулю векторов  $\vec{E}$ .

### 7.1.2. ВИДЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА

**1. Линейно поляризованный свет (ЛПС).** При такой поляризации вектор  $\vec{E}$  совершает колебания вдоль одного направления в пространстве. Обозначение такого вида поляризации приведено на рис. 7.2а, где вектор  $\vec{E}$  совершает колебания либо в плоскости рисунка, либо перпендикулярно к нему.

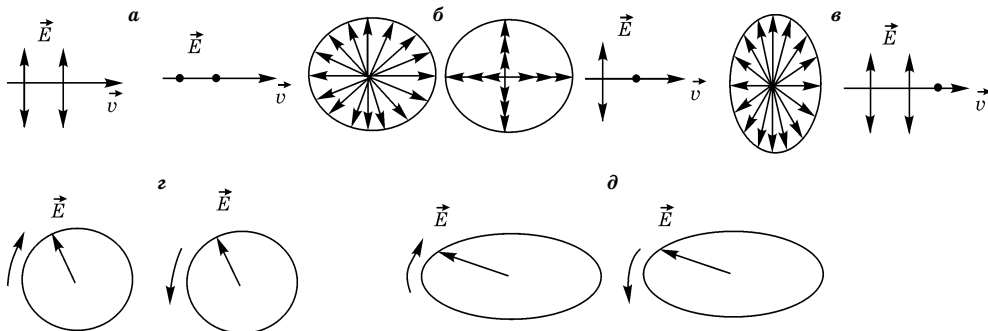


Рис. 7.2

**2. Неполаризованный свет (НПС).** В этом случае присутствуют всевозможные направления колебания вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной к скорости распространения волны, причем модули векторов  $\vec{E}$  одинаковы (рис. 7.2б). Особенности изображения такого вида поляризации связаны с тем, что гармонические колебания вектора  $\vec{E}$  всевозможных направлений можно представить как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с разностью фаз, равной 0 или  $\pi$  (см. раздел 5.7.4). Это приводит в плоскости, перпендикулярной к скорости волны, к изображению НПС как набора всевозможных по модулю взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{E}$ , а в плоскости скорости волны — к одинаковому количеству стрелок и точек, изображающих направление колебаний векторов  $\vec{E}$ .

**3. Частично поляризованный свет (ЧПС).** Присутствуют всевозможные направления колебаний векторов  $\vec{E}$ , но разной амплитуды (рис. 7.2в). Изображение такого вида поляризации будет таким же, как и для НПС, но количество стрелок в данном случае превышает количество точек (преобладают колебания вектора  $\vec{E}$  в вертикальной плоскости). В предельном случае ЧПС при возрастании степени поляризации переходит в ЛПС.

**4. Круговая поляризация.** В этом случае конец вектора  $\vec{E}$  совершает равномерное вращение по окружности в плоскости, перпендикулярной к скорости распространения волны. Возможны два типа поляризации, при которых вращение происходит либо вправо, либо влево (рис. 7.2г).

**5. Эллиптически поляризованный свет.** В этом случае конец вектора  $\vec{E}$  совершает равномерное вращение по эллипсу в плоскости, перпендикулярной к скорости распространения волны. Возможны два типа поляризации, при которых вращение происходит вправо или влево (рис. 7.2д).

Рассмотрим способы получения света различной поляризации, и прежде всего линейно поляризованного света (ЛПС).

### 7.1.3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ. ЗАКОН БРЮСТЕРА

Пусть на границу раздела двух диэлектриков падает неполяризованный свет (НПС) под углом падения  $i$ . Из опыта следует, что в этом случае отраженное и проходящее во вторую среду излучения будут частично поляризованными, причем для преломленного излучения будут преобладать колебания вектора  $\vec{E}$ , расположенные в плоскости падения лучей, а для отраженного — перпендикулярно к ней (рис. 7.3а).

При угле  $\beta$  между отраженным и преломленным лучами, равным  $90^\circ$  (рис. 7.3б), отраженное излучение будет линейно поляризованным, вектор  $\vec{E}$  будет совершать колебания в направлении, перпендикулярном к плоскости падения. В этом случае проходящее во вторую среду излучение будет ЧПС с максимальной степенью поляризации (рис. 7.3б).

Угол падения  $i$ , при котором наблюдается это явление, называют углом Брюстера  $i_B$ . Из закона преломления для него можно получить следующую формулу:

$$\frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{\sin i_B}{\sin(180 - 90 - i_B)} = \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow i_B = \operatorname{arctg}(n_2 / n_1). \quad (7.3)$$

Такие особенности отраженного и преломленного излучений можно объяснить, если учесть, что атом излучает ЭМВ как диполь. Под действием падающей волны атомы второй среды, как диполи, излучают отраженную волну. Диполь вдоль оси не излучает, и поэтому атомы второй среды, которые совершают колебания в плоскости падения (они изображаются стрелками на рис. 7.3б), вклад в отраженную волну не дают. Атомы второй среды, которые совершают колебания перпендикулярно плоскости падения (они изобража-

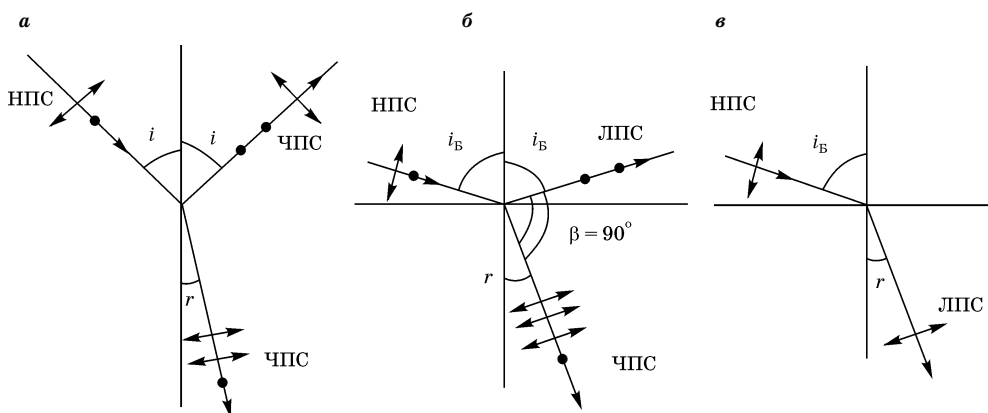


Рис. 7.3

ются точками на рис. 7.3б), излучают ЭМВ, вектор  $\vec{E}$  которой располагается в плоскости, проходящей через ось диполя, то есть перпендикулярно плоскости падения. Следовательно, отраженная волна будет ЛПС с направлением колебаний вектора  $\vec{E}$ , перпендикулярным плоскости падения. Это подтверждает и эксперимент.

Если падающая волна является ЛПС с направлением колебаний вектора  $\vec{E}$ , расположенным в плоскости падения, то тогда отраженного луча не будет (рис. 7.3в).

Отметим, что при отражении линейно поляризованного света от поверхности металла отраженное излучение будет в общем случае эллиптически поляризованным, это связано с особенностями отражения ЭМВ в этом случае.

#### 7.1.4. ПОЛЯРОИДЫ. ЗАКОН МАЛЮСА

Поляроидами называют вещества, которые позволяют получить линейно поляризованный свет. Например, если взять пленки, изготовленные из длинных цепочек углеводородных молекул, то при падении на нее неполяризованного света получают ЛПС (см. рис. 7.4а). Это объясняется тем, что составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $\vec{E}_\perp$ ), параллельная направлению, вдоль которого вытянуты эти молекулы, вызывает интенсивное движение электронов в молекулах и поэтому полностью поглощается поляроидом. Составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $\vec{E}_\parallel$ ),

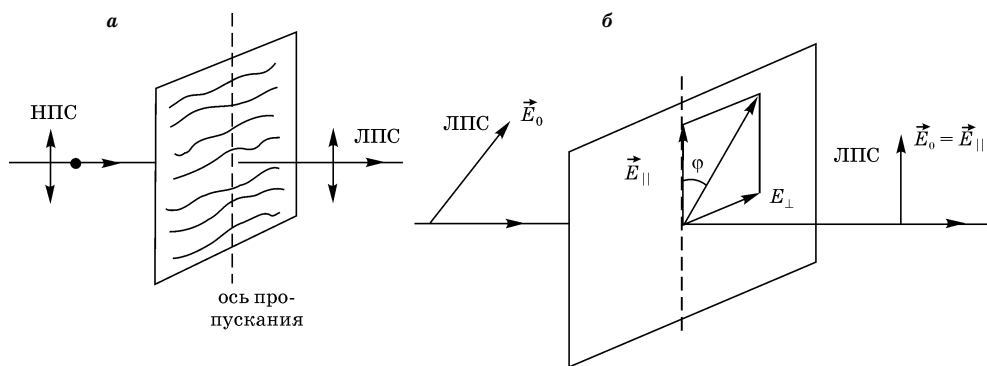


Рис. 7.4

направленная перпендикулярно длине цепочек молекул (это направление называется осью пропускания поляроида) интенсивного движения электронов не вызывает, и эта составляющая проходит поляроид без изменения.

На выходе поляроида получается ЛПС, для которого вектор  $\vec{E}$  совершает колебания вдоль оси пропускания.

Если на поляроид направить ЛПС (рис. 7.4б), то тогда интенсивность прошедшего поляроида ЛПС ( $I \sim E^2$ ) связана с интенсивностью падающего на него света ( $I_0 \sim E_0^2$ ) формулой

$$E = E_0 \cos \varphi \Rightarrow I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (7.4)$$

получившей название закона Малюса. Она связывает интенсивности падающего и прошедшего поляроид линейно поляризованного света.

В случае падения на поляроид НПС необходимо в формуле (7.4) провести усреднение по всевозможным углам  $\varphi$  ( $\varphi = (0 \div 180)^\circ$ ) между направлением вектора  $\vec{E}$  падающей волны и осью пропускания поляроида, что дает

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2 \Rightarrow I = I_0 / 2. \quad (7.5)$$

На рис. 7.4а в этом случае вместо двух векторов  $\vec{E}$  (стрелка и точка) на входе после прохождения поляроида будет только один вектор  $\vec{E}$  (стрелка).

#### 7.1.5. ЯВЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ. ПОЛУЧЕНИЕ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

**Явление двойного лучепреломления.** Существуют оптически анизотропные кристаллы (например кварц, гипс, исландский шпат, турмалин и т. д.), в которых наблюдается явление двойного лучепреломления. Оно заключается в том, что *при падении на кристалл луча света он разделяется на два преломленных луча*. Это явление обусловлено зависимостью диэлектрической проницаемости среды от выбора направления в таких кристаллах.

**Оптическая ось кристалла** — это такое направление в кристалле, в котором отсутствует явление двойного лучепреломления. Это означает, что хотя два луча и существуют, но они никак себя не проявляют — распространяют-

ся пространственно, не разделяясь с одной и той же скоростью ( $v_o = v_e$ ). Оптическая ось может быть проведена через любую точку кристалла, то есть она может быть любой из множества параллельных прямых.

В природе существуют **одноосные** и **двуосные** оптически анизотропные кристаллы. В одноосных (исландский шпат, турмалин, кварц и т. д.) один из преломленных лучей подчиняется законам преломления света и называется **обыкновенным лучом** ( $o$ ), для другого, **необыкновенного** ( $e$ ), законы преломления света не выполняются (рис. 7.5а).

В двуосных кристаллах (например гипс) оба луча являются необыкновенными, то есть для них не выполняются законы преломления.

Далее будем рассматривать только одноосные кристаллы. Если на одноосный кристалл падает НПС, то тогда на выходе из него обыкновенный и необыкновенный лучи будут ЛПС с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний вектора  $\vec{E}$  (рис. 7.5а).

**Главная плоскость кристалла** (или **главное сечение кристалла**) — это плоскость, в которой находятся оптическая ось кристалла и падающий луч. На рис. 7.5а она совпадает с плоскостью рисунка; из рисунка видно, что колебания вектора  $\vec{E}$  для необыкновенного луча происходят в главной плоскости кристалла, а для обыкновенного — перпендикулярно к ней.

В одноосных кристаллах, кроме оптической оси, существует еще одно направление, в котором не происходит пространственного разделения преломленных лучей — оно перпендикулярно к оптической оси. Для него скорости распространения преломленных лучей будут разными, что связано с различием их показателей преломления ( $n_o \neq n_e \Rightarrow v_o = c/n_o \neq v_e = c/n_e$ ). Для других направлений преломленные лучи пространственно разделяются и распространяются с разными скоростями.

Это наглядно можно увидеть, если построить **лучевые поверхности** (волновые поверхности) для этих лучей. С этой целью выбирается произвольная точка внутри кристалла и от нее в разных направлениях откладываются векторы скоростей обыкновенного  $\vec{v}_o$  и необыкновенного  $\vec{v}_e$  лучей. Концы этих векторов и образуют лучевые поверхности.

Для обыкновенного луча эта поверхность представляет собой сферу, так как скорость этой волны одинакова для всех направлений в кристалле. У необыкновенного скорость распространения зависит от выбора направления, поэтому лучевая поверхность представляет собой эллипсоид вращения (рис. 7.5б). Лучевые поверхности этих волн соприкасаются в точках их пересечения с оптической осью  $OO'$  кристалла. Если  $n_o \leq n_e$ , то тогда эллипсоид

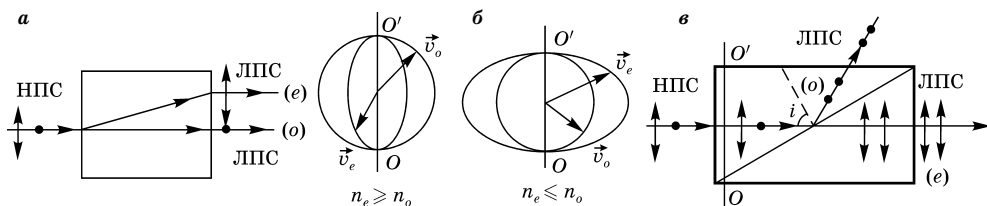


Рис. 7.5

вращения вписан в сферу ( $v_o \geq v_e$ ), такие кристаллы называют **оптически положительными** (например кварц). Если же выполняется обратное соотношение ( $n_o \geq n_e$ ), то тогда сфера будет вписана в эллипсоид вращения. Это наблюдается для **оптически отрицательных кристаллов**, таких как исландский шпат, турмалин.

Наибольшее различие в значениях скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей наблюдается в направлении, перпендикулярном к оптической оси (см. рис. 7.5б).

**Призма Николя. Явление дихроизма.** Явление двойного лучепреломления позволяет непосредственно получить линейно поляризованный свет за счет удаления на выходе из кристалла одного из лучей. Примером такого способа получения ЛПС является использование призмы Николя (рис. 7.5в). Две половины призмы, изготовленные из исландского шпата, склеены тонким слоем канадского бальзама ( $n_B = 1,550$ ). Луч НПС посылается перпендикулярно к оптической оси кристалла и движется в нем, пространственно не разделяясь, до слоя канадского бальзама. Исландский шпат является оптически отрицательным кристаллом, то есть для него будет выполняться такое условие:  $n_e = 1,486 \leq n_o = 1,658$ . Поэтому для обыкновенного луча слой канадского бальзама будет оптически менее плотным ( $n_o > n_B$ ), чем исландский шпат, и при специальном подборе угла падения  $i$  (он должен быть больше предельного угла полного внутреннего отражения) обыкновенный луч полностью отражается от слоя канадского бальзама. Необыкновенный луч, для которого слой бальзама является более плотной средой ( $n_e < n_B$ ), чем кристалл исландского шпата, проходит слой бальзама и проникает во вторую половину призмы.

Можно получить ЛПС, не прибегая к необходимости удаления одного из лучей. Так, например, в изотропных кристаллах наблюдается **явление дихроизма**, то есть они в той или иной мере поглощают свет. Наиболее сильно это явление наблюдается в кристалле турмалина, в котором один из лучей (обыкновенный) полностью поглощается кристаллом и на выходе из него получается ЛПС.

**Получение циркулярно поляризованного (поляризованного по кругу) и эллиптически поляризованного света.** Рассмотрим, как можно получить круговую и эллиптическую поляризации с помощью явления двойного лучепреломления. Для этого нужно вырезать кристаллическую пластинку та-

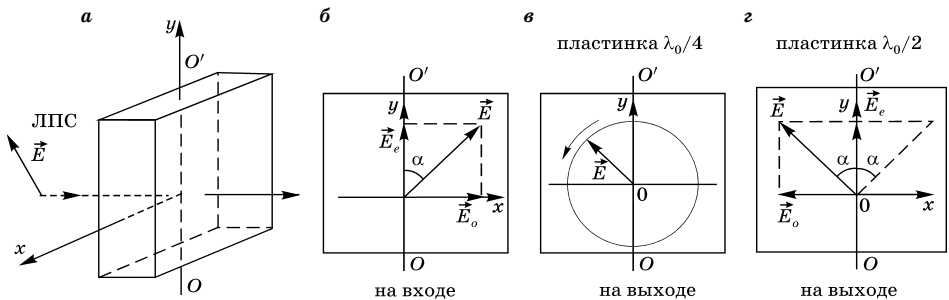


Рис. 7.6



ким образом, чтобы ее передняя и задняя грани были параллельны оптической оси кристалла  $OO'$ , и послать на эту пластинку перпендикулярно к ее поверхности луч линейно поляризованного света (рис. 7.6а, вектор  $\vec{E}$ ). Его можно представить как сумму двух взаимно перпендикулярных линейно поляризованных колебаний (см. раздел 5.7.4), они представляют собой необыкновенный и обыкновенный лучи (рис. 7.6б, векторы  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ ).

Различные скорости распространения этих лучей приводят к тому, что при прохождении в таком кристалле определенного расстояния  $d$  между ними возникает оптическая разность хода  $\Delta = d(n_e - n_o)$ , которая может принимать различные значения. При этом  $d$  нужно выбирать таким образом, чтобы оптическая разность хода  $\Delta$  обыкновенного и необыкновенного лучей на выходе из пластинки составила

$$\Delta = \lambda_0(k + 1/4), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.6)$$

при этом разность фаз

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = 2\pi k + \frac{\pi}{2}.$$

Такую пластинку называют **пластинкой в четверть длины волны** (в формуле (7.6)  $\lambda_0$  — длина ЭМВ в вакууме).

Пусть на входе такой пластинки угол между вектором  $\vec{E}$  падающей ЛПС и оптической осью кристалла будет равен  $\alpha$ . Тогда для обыкновенного и необыкновенного лучей, векторы  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  которых совершают колебания вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , получим на входе пластинки:

$$\begin{aligned} E_y = E_e = E_{em} \cos \omega t, \quad E_x = E_o = E_{om} \cos \omega t, \\ E_{om} = E_m \sin \alpha, \quad E_{em} = E_m \cos \alpha. \end{aligned} \quad (7.7)$$

На выходе пластинки, за счет возникновения разности хода между лучами, можно записать следующие формулы для проекций векторов на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\begin{aligned} E_y = E_e = E_{em} \cos(\omega t + \psi), \\ E_x = E_o = E_{om} \cos(\omega t + \psi + \Delta\varphi) = E_{om} \cos(\omega t + \psi + \pi/2). \end{aligned}$$

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с разностью фаз

$\Delta\varphi = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$  имеют место следующие случаи:

1)  $\alpha = 0, \pi/2, \pi, \frac{3\pi}{2}$ . Один из лучей будет отсутствовать ( $\alpha = 0, \pi; E_o = 0$ ;

$\alpha = \pi/2, \frac{3\pi}{2}; E_e = 0$ ), и поэтому на выходе пластинки будет ЛПС (остается либо обыкновенный, либо необыкновенный луч).

2)  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ . При таких углах модули векторов  $\vec{E}$  для обыкновенного и необыкновенного лучей будут совпадать:  $E_{om} = E_m$ . На выходе

пластинки возникает сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой амплитуды с разностью фаз, равной  $\pi/2$ , что приводит к свету, поляризованному по кругу (рис. 7.6в, см. также раздел 5.7.4, пример 2).

3) Угол  $\alpha$  отличается от значений, приведенных выше. Тогда модули векторов для обоих лучей отличаются от нуля и не совпадают, и на выходе из пластинки возникает случай сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами, что приводит к эллиптически поляризованному свету (см. раздел 5.7.4).

Для разных пластин в зависимости от их толщины на выходе можно получать разные виды поляризации света.

**Пластинка в полволны.** Для нее

$$\Delta = \lambda_0(k + 1/2), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$E_y = E_{em} \cos(\omega t + \psi),$$

$$E_x = E_{om} \cos(\omega t + \psi + \Delta\varphi) = E_{om} \cos(\omega t + \psi + \pi) = -E_{om} \cos(\omega t + \psi),$$

$$E_y / E_x = -E_{em} / E_{om} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

В соответствии со сложением взаимно перпендикулярных колебаний (см. раздел 5.7.4, пример 1) в этом случае будет наблюдаться на выходе ЛПС, вектор  $\vec{E}$  которого будет повернут относительно первоначального направления на угол  $2\alpha$  (рис. 7.6з).

Если послать на пластинку неполяризованный свет, то тогда из-за случайности разности фаз складываемых колебаний, характерной для НПС, на выходе пластинки будет также НПС.

### 7.1.6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

**1. Фотоупругий метод анализа механических напряжений.** Из прозрачного изотропного материала изготавливают аналог механической детали и помещают его между двумя поляроидами, оси пропускания которых взаимно перпендикулярны (рис. 7.7а). Изотропный материал не изменяет поляризации падающего на него света, и поэтому на выходе такой системы (на экране) будет наблюдаться темное пятно.

Если подвергнуть деталь деформации, то тогда в области деформации материал становится анизотропным, и за счет явления двойного лучепреломления в области деформации происходит изменение поляризации падаю-

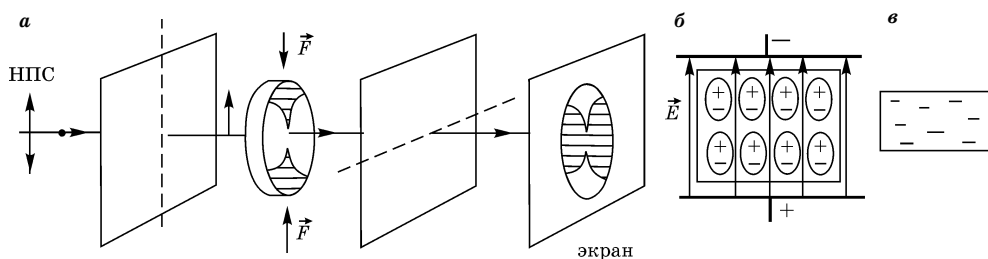


Рис. 7.7

щего света, на экране эта область будет выглядеть просветленной. Создавая в прозрачной детали напряжения, которые свойственны механической детали в ее рабочем состоянии, на экране можно наблюдать разноцветную картину различных напряжений в ней. Причем одному цвету будет соответствовать одна и та же степень деформации детали, изменяя нагрузки на нее, можно видеть, как происходит изменение напряжений в детали.

**2. Получение импульсов света малой длительности.** Между двумя скрещенными поляроидами помещают ячейку Керра — сосуд из жидкого диэлектрика, помещенного между пластинами плоского конденсатора (рис. 7.7б). В отсутствие напряжения на конденсаторе жидкий диэлектрик является изотропной средой (полярные молекулы диэлектрика из-за теплового движения имеют различную ориентацию в пространстве) и поэтому не изменяет поляризации падающего на него излучения. Через такую систему свет не проходит. При подаче на пластины конденсатора напряжения молекулы диэлектрика будут выстраиваться вдоль направления линий напряженности электрического поля, среда становится анизотропной, она изменяет поляризацию падающего излучения и световой сигнал проходит через такую систему. Время включения и выключения электрического поля является практически мгновенным, что позволяет формировать импульсы света различной длительности и последовательности.

**3. Определение концентрации оптически активных веществ в растворе.** Существуют вещества, которые способны поворачивать (вращать) плоскость поляризации падающего излучения. Они называются оптически активными веществами, их способность к вращению будет зависеть от концентрации  $x$  вещества в растворе, то есть угол поворота  $\varphi$  будет пропорционален концентрации ( $\varphi = c \cdot x$ ), где постоянная  $c$  определяется из условий опыта.

Этот факт позволяет предложить метод определения процентного содержания в различных растворах оптически активных веществ (например сахара). Между двумя скрещенными поляроидами помещают цилиндрический сосуд с раствором, в котором растворено оптически активное вещество (рис. 7.7в). За счет вращения плоскости поляризации падающего излучения на экране будет наблюдаться пятно определенной интенсивности. Проводя на экране сравнение этой интенсивности с известными заранее эталонными значениями освещенности при определенных концентрациях оптически активного вещества в растворе, можно найти его неизвестную концентрацию.

## 7.2.

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

#### 7.2.1.

#### УСЛОВИЯ МАКСИМАЛЬНОГО УСИЛЕНИЯ И ОСЛАБЛЕНИЯ СВЕТА ПРИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Если специально не оговорено, ниже будет рассматриваться случай сложения двух линейно поляризованных волн с одинаковым направлением колебаний вектора  $\vec{E}$ .

Условия максимального усиления и ослабления света при интерференции таких волн были определены в разделе 6.1.5 для разности фаз  $\Delta\varphi$  и для

геометрической разности хода  $\Delta$  складываемых волн. Эти условия (6.26) и (6.27) сохраняются и здесь, но теперь они записываются для **оптической разности хода**, под которой понимают разность оптических путей двух складываемых волн:

$$\Delta = (l_2 - l_1), \quad l = nr, \quad \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad (7.8)$$

а под **оптическим путем**  $l$  понимают произведение геометрического пути  $r$  на абсолютный показатель преломления  $n$  среды, в которой распространяется ЭМВ.

Введение оптического пути связано с тем, что в формулах обычно используют длину  $\lambda_0$  ЭМВ в вакууме:  $\lambda_0 = \lambda n$ .

Итак, каковы условия максимального и минимального усиления света при интерференции излучения для случая, когда  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ ?

**Условие интерференционных максимумов:**

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad \Delta = \pm \frac{\lambda_0}{2} 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = A_1 + A_2, \quad (7.9)$$

то есть разность фаз колебаний равна четному числу  $\pi$ , или на оптической разности хода укладывается четное число полуволен.

**Условие интерференционных минимумов:**

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad \Delta = \pm \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = |A_1 - A_2|, \quad (7.10)$$

то есть разность фаз колебаний равна нечетному числу  $\pi$ , или на оптической разности хода укладывается нечетное число полуволен.

Входящее в эти формулы число  $m$ , как уже отмечалось ранее, называют порядком интерференционного максимума или интерференционного минимума.

Отметим, что когерентные волны (ЛПС), поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, не интерферируют.

### 7.2.2. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим различные способы получения картины интерференции (когерентных волн) от естественных источников света. Как уже отмечалось в разделе 7.1.1, излучение естественного источника света представляет собой совокупность огромного набора цугов волн, испущенных различными атомами, что приводит к немонахроматичности такого излучения. Поэтому из формулы (6.25) для разности фаз  $\Delta\varphi$ , возникающей при сложении цугов волн от двух естественных источников света

$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}),$$

следует, что  $\cos \Delta\varphi$  за счет первого слагаемого  $(\omega_2 - \omega_1)t$  в разности фаз  $\Delta\varphi$  усредняется до нуля ( $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ ). Это приводит к отсутствию интерференции:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle = I_1 + I_2.$$

Следовательно, получить когерентные волны от двух естественных источников света нельзя.

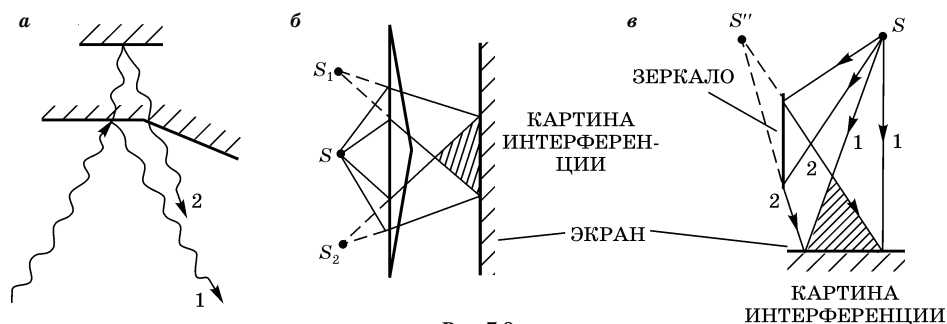


Рис. 7.8

Если даже предположить, что частоты естественных источников излучения будут одинаковыми (обращается в ноль первое слагаемое в разности фаз  $\Delta\varphi$ ), то и в этом случае нельзя будет получить картины интерференции. Это связано с тем, что за время наблюдения складывается огромное число цугов волн, начальные фазы которых являются случайными величинами, и поэтому усреднение за время наблюдения третьего слагаемого ( $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ ) в разности фаз  $\Delta\varphi$  приведет к тому, что  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle$  будет равным нулю ( $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ ) и интерференции не будет.

От одного естественного источника можно получить картину интерференции, если заставить цуг волны интерферировать сам с собой. Для этого необходимо разбить его на отдельные части (например 1 и 2 на рис. 7.8а), заставить их пройти разные оптические пути и затем сложить их.

В этом случае в выражении для разности фаз  $\Delta\varphi$  первое и последнее слагаемые будут отсутствовать:

$$\Delta\varphi = -(k_2 r_2 - k_1 r_1) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \text{const.}$$

Вполне понятно, что картина интерференции получится только тогда, когда отдельные части цуга волны встретятся, то есть когда оптическая разность хода между ними будет не больше длины самого цуга волны:  $\Delta \leq l_{\text{ц}}$ .

Применяя различные преломляющие тела, можно разделить цуг волны на отдельные части, создать между ними оптическую разность хода и таким образом получить когерентные волны и картину интерференции. Рассмотрим два примера.

**Пример 1. Бипризма Френеля.** Источник монохроматического света  $S$  помещают напротив центра бипризмы, у которой угол при вершине близок к  $180^\circ$  (рис. 7.8б). Волна, излучаемая источником, делится бипризмой на две части. Их можно рассматривать как волны, испущенные двумя мнимыми когерентными источниками  $S_1$  и  $S_2$ . При наложении этих волн на экране наблюдается картина интерференции — светлые (окрашенные в один цвет) и темные полосы.

**Пример 2. Зеркало Ллойда.** Узкая щель  $S$  излучает монохроматическую волну (рис. 7.8в). Одна часть этой волны падает непосредственно на экран, а другая попадает на экран после отражения от зеркала. На экране наблюдается картина интерференции двух когерентных волн, испущенных источником  $S$  и мнимым источником  $S'$ .

### 7.2.3. ОПЫТ ЮНГА

Рассмотрим расчет картины интерференции на примере опыта Юнга (схема опыта приведена на рис. 7.9а). Длинная узкая щель  $A$  испускает монохроматическую волну ( $\lambda = \text{const}$ ), которая падает на преграду с двумя щелями  $A_1$  и  $A_2$ , расстояние между которыми равно  $d$ . Эти две щели излучают когерентные волны, они падают на экран, который отстоит на расстоянии  $L$  от преграды, причем  $L \gg d$  (рис. 7.9а). Среда — вакуум ( $n = 1$ ).

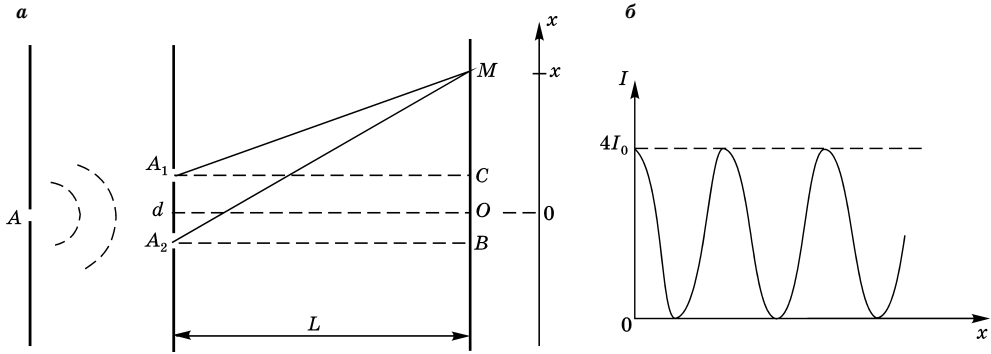


Рис. 7.9

Необходимо рассчитать интерференционную картину на экране, то есть найти, в каких точках экрана наблюдаются максимумы и в каких точках минимумы интерференционной картины. Для этого возьмем произвольную точку  $M$  с координатой  $x$  и найдем выражение для оптической разности хода  $\Delta$  лучей, приходящих в эту точку от двух щелей (рис. 7.9а):

$$\begin{aligned}\Delta &= l_2 - l_1, \quad l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) \approx 2L\Delta, \\ l_2^2 - l_1^2 &= A_2 M^2 - A_1 M^2 = (BM^2 + L^2) - (CM^2 + L^2) = \\ &= \left( \left( x + \frac{d}{2} \right)^2 + L^2 \right) - \left( \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 + L^2 \right) = 2dx, \\ \Delta &= x \frac{d}{L}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Найдем координаты точек на экране, где наблюдаются светлые (окрашенные в один цвет) и темные полосы. Для этого используем формулы (7.9)–(7.11):

$$\text{Максимумы: } \Delta = x \frac{d}{L} = \pm \frac{\lambda_0}{2} 2m, \Rightarrow x_{\max} = \pm \frac{L\lambda_0}{d} m, \quad m = 0, 1, 2, \dots\tag{7.12 а}$$

$$\text{Минимумы: } \Delta = x \frac{d}{L} = \pm \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1) \Rightarrow x_{\min} = \pm \frac{L\lambda_0}{d} \left( m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots\tag{7.12 б}$$

На рис. 7.9б приведена картина интерференции (зависимость интенсивности результирующей волны  $I$  от координаты  $x$ ), наблюдаемая на экране. Если

интенсивности волн от двух щелей одинаковы ( $I_1 = I_2 = I_0$ ), то тогда из формулы (6.28) следует, что в максимумах результирующая интенсивность составит

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} = 4I_0,$$

то есть в четыре раза превышает интенсивность волны от одной щели.

Видно, что в центре картины располагается максимум, расстояние между соседними максимумами и соседними минимумами одинаково и равно

$$\Delta x = \Delta x_{\max} = \Delta x_{\min} = L\lambda_0 / d. \quad (7.13)$$

Для монохроматического света можно наблюдать достаточно большое количество четко различимых темных и светлых полос.

#### 7.2.4. КОГЕРЕНТНОСТЬ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ И ВРЕМЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ

Под **когерентностью** понимают согласованное протекание во времени колебательных и волновых процессов. Когерентными, например, являются волны одной частоты, для которых разность фаз не зависит от времени. Для одной волны постоянной частоты когерентность означает сохранение начальной фазы колебаний постоянной с течением времени. Тогда эту волну можно разделить на две части, которые пройдут разные оптические пути, и затем их сложить и получить от них интерференцию для любых оптических разностей хода.

В реальности, однако, всегда имеется разброс по частотам  $\Delta\omega$  в данном излучении, это приводит к ослаблению когерентности излучения, и его описывают, вводя понятие **временной когерентности**.

Любая волна частоты  $\omega_0$ , излучаемая за конечный промежуток времени  $\tau$ , не является монохроматичной. Она может быть представлена в виде волнового пакета (см. раздел 6.1.6). Волновой пакет в каждый момент времени занимает ограниченную область пространства. Он содержит все волны с частотами, заключенными в интервале от  $(\omega_0 - \Delta\omega/2)$  до  $(\omega_0 + \Delta\omega/2)$ . При разделении волнового пакета на две части между составляющими его волнами за счет различия их частот с течением времени накапливаются случайные изменения разности фаз  $\Delta\varphi$  колебаний (см. формулу (6.25):  $\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t = \Delta\omega t$ ). Это приводит к ухудшению картины интерференции, получаемой за счет разделения волнового пакета на составляющие его волны и затем их сложения.

Вводят следующие понятия.

**1. Время когерентности**  $\tau_{\text{ког}}$  — это время, за которое случайные изменения разности фаз  $\Delta\varphi$  колебаний для волн с частотами  $(\omega_0 - \Delta\omega/2)$  и  $(\omega_0 + \Delta\omega/2)$  достигают значения, равного  $2\pi$ . За это время две части волнового пакета «забывают» свою первоначальную фазу и становятся некогерентными.

Если взять время  $t \leq \tau_{\text{ког}}$ , то тогда можно делением исходной волны на части получить картину интерференции, но чем больше проходит время  $t$  до их сложения, тем хуже будет эта картина, и для времени  $t > \tau_{\text{ког}}$  картина интерференции исчезает, то есть составляющие волновой пакет волны будут некогерентными.

**2. Длина когерентности**  $l_{\text{ког}}$  — расстояние, которое проходит волна за время когерентности. Если оптическая разность  $\Delta$  волн, полученных делением исходной волны на две части, будет меньше длины когерентности  $\Delta \leq l_{\text{ког}}$ , то они при наложении дают картину интерференции. В случае  $\Delta > l_{\text{ког}}$  картины интерференции не будет. Отождествляя время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  со временем излучения  $\tau$  волны ( $\tau_{\text{ког}} = \tau$ ), на основе выражения (7.1) можно записать:

$$\tau_{\text{ког}} \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{|\Delta\lambda| \cdot c}, \quad l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{|\Delta\lambda|}, \quad (7.14)$$

где учтено, что  $\omega = 2\pi c/\lambda_0$  и  $\Delta\omega = -2\pi c |\Delta\lambda|/\lambda_0^2$ .

Эти соотношения позволяют оценить максимальное число наблюдаемых на картине интерференции интерференционных полос от данного вида излучения

$$\Delta \leq l_{\text{ког}} \Rightarrow \Delta_{\text{макс}} = m_{\text{макс}} \lambda \leq l_{\text{ког}} \Rightarrow m_{\text{макс}} \approx \frac{\lambda_0}{|\Delta\lambda|} = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{\nu}{\Delta\nu}. \quad (7.15)$$

Из формулы (7.15) следует, что чем меньше разброс по частотам ( $\downarrow \Delta\omega$ ) в данной волне, тем больше степень ее монохроматичности ( $\uparrow \omega/\Delta\omega$ ), больше время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  и длина когерентности  $l_{\text{ког}}$ , то есть лучше получаемая от этой волны картина интерференции (больше наблюдается интерференционных полос).

Приведем ряд примеров оценки параметров  $\tau_{\text{ког}}$ ,  $l_{\text{ког}}$ ,  $\Delta\omega$  и  $m_{\text{макс}}$  для различных излучений. В качестве  $\lambda_0$  в формулах возьмем длину волны зеленого цвета  $\lambda_0 = 550 \text{ нм} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**1. Белый свет:**  $|\Delta\lambda| \approx 400 \text{ нм}$ ,  $\Delta\omega \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$ ,  $l_{\text{ког}} \approx 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $m_{\text{макс}} \approx 1$ .

**2. Светофильтр:** полоса пропускаемых длин волн  $|\Delta\lambda| \approx 1 \cdot 10 \text{ нм}$ ,  $\Delta\omega \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ рад/с}$ ,  $\tau_{\text{ког}} \approx 1 \cdot 10^{-13} \text{ с}$ ,  $l_{\text{ког}} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,03 \text{ мм}$ ,  $m_{\text{макс}} \approx 55$ .

**3. Испускаемый атомом цуг волны (идеальный случай):**  $\tau_{\text{ког}} = \tau \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ ,  $\Delta\omega \approx 6 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ ,  $|\Delta\lambda| \approx 0,0001 \text{ нм}$ ,  $l_{\text{ког}} \approx c\tau = 3 \text{ м}$ ,  $m_{\text{макс}} \approx 5,5 \cdot 10^6$ .

**Пространственная когерентность.** Идеальной плоской волны (амплитуда и фаза колебаний во всех точках ее волновой поверхности одинаковы) в природе не существует. Поэтому в реальных волновых процессах фаза колебаний изменяется не только вдоль скорости распространения волны, но и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Случайные изменения разности фаз в двух точках, расположенных в этой плоскости (волновой поверхности), увеличиваются с расстоянием между ними, что приводит к ослаблению когерентности колебаний в этих точках.

Вводится понятие **длины пространственной когерентности**, или **радиуса когерентности**  $\rho_{\text{ког}}$ , — это минимальное расстояние между точками волновой поверхности, на котором вторичные волны, испускаемые этими точками, будут некогерентными. Если расстояние  $l$  между точками будет меньше  $\rho_{\text{ког}}$  ( $l < \rho_{\text{ког}}$ ), то при наложении вторичных волн, испущенных этими точками фронта волны, будет наблюдаться картина интерференции, если же  $l \geq \rho_{\text{ког}}$ , то тогда эти вторичные волны будут некогерентными и картина интерференции на экране не возникает.



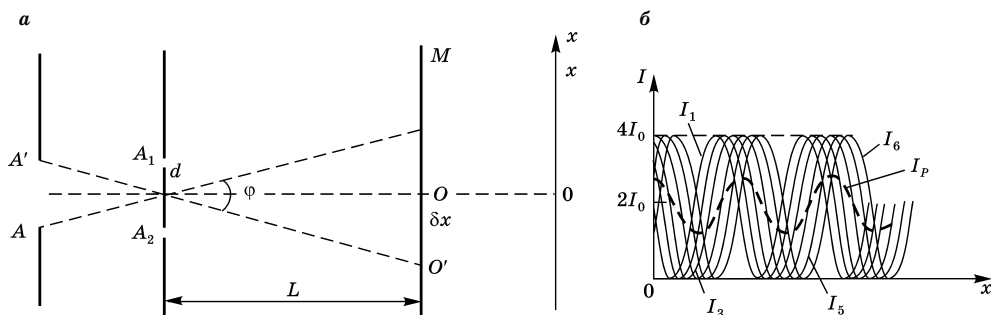


Рис. 7.10

Ослабление пространственной когерентности за счет расходимости светового пучка и конечных размеров источника излучения ухудшает картину интерференции на экране.

Рассмотрим, как сказывается пространственная когерентность на интерференционной картине на примере опыта Юнга. Пусть источник излучения будет протяженным (его крайние точки — это точки  $A$  и  $A'$ ), его можно представить состоящим из нескольких узких щелей, расположенных вдоль оси  $Ox$  (рис. 7.10а). Каждая узкая щель излучает волны независимо от других щелей, и поэтому на экране будет наблюдаться результат сложения картин интерференции от каждой узкой щели источника излучения. Центр картин будет расположен в разных точках экрана от точки  $O$  до точки  $O'$  (они соответствуют излучению крайних щелей  $A$  и  $A'$  источника), что приводит к ухудшению результирующей картины.

Для примера на рис. 7.10б пунктирной линией показана результирующая интенсивность  $I_p$  от расположенных на отрезке  $AA'$  шести одинаковых узких щелей протяженного источника излучения, деленная на шесть ( $I_p = I_0/6$ ). Видно, что разница между максимальными и минимальными значениями интенсивности света уменьшается, картина становится менее резкой.

При расстоянии  $\delta x$  между точками  $O$  и  $O'$ , превышающем расстояние  $\Delta x/2$  ( $\Delta x$  — расстояние между соседними максимумами или минимумами интерференционной картины от одной узкой щели источника), интерференционная картина от протяженного источника полностью исчезает. Это позволяет оценить длину пространственной когерентности для источника излучения при наблюдении от него картины интерференции.

Будем считать, что две щели  $A_1$  и  $A_2$  находятся на волновой поверхности результирующей волны, испущенной протяженным источником излучения  $AA'$ . Тогда, учитывая формулу (7.13) и данные рис. 7.10а, можно записать:

$$\delta x = L \sin \frac{\varphi}{2} \approx L \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\Delta x}{2} = \frac{L \lambda_0}{2d} \Rightarrow \rho_{\text{кор}} = d < \frac{\lambda_0}{\varphi}. \quad (7.16)$$

При наблюдении картины интерференции от Солнца (его угловые размеры составляют  $\varphi = 0,01$  рад) для длины волны зеленого цвета ( $\lambda_0 = 550$  нм) получим

$$\rho_{\text{кор}} = d < \frac{\lambda_0}{\varphi} = \frac{5,5 \cdot 10^{-7}}{0,01} = 0,055 \text{ мм.}$$

Такого расстояния между щелями  $A_1$  и  $A_2$  во время постановки эксперимента Юнга достичь не удалось. Но картина интерференции была получена пропусканием солнечного света через узкую щель (щель А, рис. 7.9а), угловые размеры которой были существенно меньше угловых размеров Солнца. Это привело к уменьшению угла  $\varphi$  в формуле (7.16) и к возможности наблюдения картины интерференции при значительно большем расстоянии  $d$  между щелями (рис. 7.9а и рис. 7.10а).

Можно сделать вывод, что условия по временной и пространственной когерентности накладывают существенные ограничения на наблюдение картины интерференции от естественных источников света (длина когерентности и оптическая разность хода не превышают 0,03 мм), на способы получения когерентных волн. Чем выше степень временной (чем меньше разброс по частотам  $\Delta\omega$ ) и пространственной (чем больше длина пространственной когерентности  $\rho_{\text{ког}}$ ) когерентности данного излучения, тем более четкой получается картина интерференции на экране.

### 7.2.5. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРОВ

Рассмотрим, что представляет собой излучение лазера, не вдаваясь в конструктивные особенности его работы. Для работы лазера, в отличие от обычных источников света, используют вынужденные переходы между уровнями энергии атома. При этом рассматривается только один переход с **метастабильного уровня** в основное состояние. На метастабильном уровне атом находится в течение времени, значительно превышающем (в  $1 \cdot 10^5$  раз) продолжительность обычного спонтанного перехода, что существенно увеличивает длительность излучения атомом одного цуга волны.

Атом, находясь на таком метастабильном уровне, переходит в основное состояние не самопроизвольно, а под действием падающего на него фотона, энергия которого равна разности энергий метастабильного и основного состояний. Поэтому при вынужденном переходе атом излучает фотон, тождественный падающему фотону (рис. 7.11). Для этих двух фотонов будут одинаковыми направления движения, частоты излучения, направления колебаний вектора  $\vec{E}$  в пространстве и одинаковые начальные фазы колебаний.

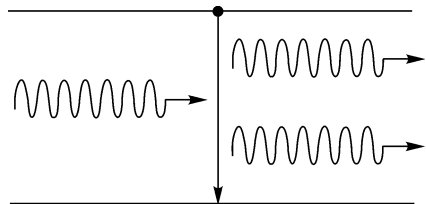


Рис. 7.11

Создавая активную среду, в которой большинство атомов находится на верхнем метастабильном уровне, можно получить лавину вынужденных переходов.

Поэтому **излучение лазера будет представлять собой поток тождественных фотонов**. Особенности построения резонатора, в котором формируется лазерное излучение, позволяют получать на его выходе лазерное излучение большой мощности.

Отметим основные особенности лазерного излучения.

**1. Высокая временная когерентность излучения.** Время излучения атома при переходе с метастабильного уровня составляет порядка  $\tau \sim 10^{-3}$  с, что

существенно больше времени излучения атомов при обычных спонтанных переходах. Это приводит к уменьшению разброса  $\Delta\omega$  по частотам цуга волн вынужденного излучения, к увеличению времени когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  и длины когерентности  $l_{\text{ког}}$  излучения. В идеальном случае они близки к времени излучения и длине цуга волны  $\tau_{\text{ког}} = \tau \sim 10^{-8} \text{ с}$ ,  $l_{\text{ког}} = l_{\text{ц}} = c\tau \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 300 \text{ км}$ .

**2. Высокая пространственная когерентность излучения.** Все точки лазерного источника излучают волны согласованно друг с другом, что приводит к малой расходимости пучка лазерного излучения. Это позволяет сфокусировать пучок в пятно малых размеров, сопоставимых с длиной волны  $\lambda$ . Большая мощность излучения создает существенную концентрацию энергии лазерного излучения на малой площади, что приводит к возможности испарять вещество в малых объемах и тем самым проделывать малые отверстия в различных твердых материалах.

**3. Излучение лазера является линейно поляризованным светом.** Все тождественные фотоны имеют одинаковое направление колебаний вектора  $\vec{E}$  в пространстве и начальные фазы колебаний. Это позволяет получить картину интерференции (когерентные волны) от двух независимых источников лазерного излучения с одинаковой длиной волны. Действительно, в этом случае снимается ограничение для получения когерентных волн (картины интерференции) по третьему слагаемому в разности фаз  $\Delta\varphi$  ( $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$ , см. раздел 7.2.2).

#### 7.2.6. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ. ПОЛОСЫ РАВНОГО НАКЛОНА И РАВНОЙ ТОЛЩИНЫ

Луч монохроматического света падает на пленку толщиной  $d$  под углом падения  $i$  рис. 7.12а и делится на два: луч 1 отражается от верхней грани, а луч 2 преломляется, проходит в пластинке расстояние  $AB$ , затем отражается от нижней грани, проходит расстояние  $BC$  и затем преломляется. Два луча 1 и 2 собираются линзой в одной точке, расположенной в фокальной плоскости линзы. Для расчета картины интерференции на экране найдем оптическую разность хода лучей 1 и 2.

Разность хода лучей 1 и 2 в точке А равна нулю, так как они двигались вместе, составляя луч падающего на пластинку света. После линии  $OC$  (она

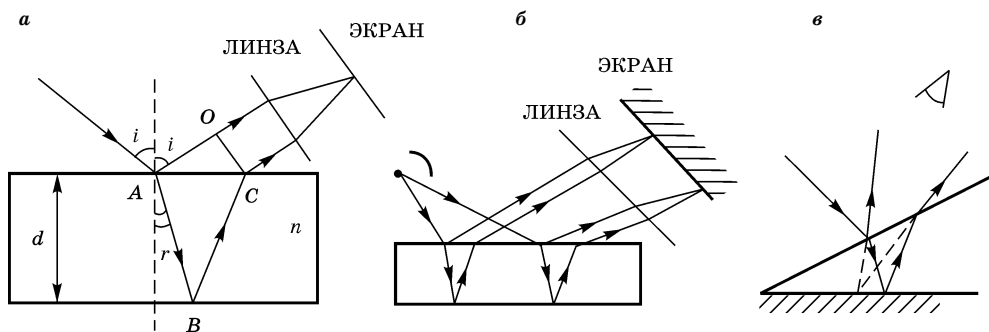


Рис. 7.12

перпендикулярна лучам 1 и 2) их разность хода не изменяется, так как линза не дает дополнительной разности хода для этих лучей. Поэтому оптическая разность хода возникает при переходе от точки  $A$  к линии  $OC$ :

$$\Delta = (AB + BC)n - OA + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (7.17)$$

В формулу для оптической разности хода введено слагаемое  $\lambda_0/2$ , так как вектор напряженности  $\vec{E}$  луча 1 при отражении от оптически более плотной среды изменяет свою фазу на  $\pi$  или луч 1 теряет полволны  $\lambda_0/2$ .

Подставляя параметры пластинки и угол падения в формулу (7.17), для оптической разности хода можем окончательно записать:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (7.18)$$

Для данного примера условия наблюдения максимумов и минимумов интерференционной картины (7.9) и (7.10) будут выглядеть таким образом:

$$\text{Максимумы: } \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.19 \text{ а})$$

$$\text{Минимумы: } \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.19 \text{ б})$$

Отметим, что для наблюдения картины интерференции нужно брать тонкие пленки, так как условия по временной и пространственной когерентности излучения от естественного источника света накладывают ограничения на оптическую разность хода лучей (см. раздел 7.2.4).

Как видно из формул (7.19), оптическую разность хода лучей  $\Delta$  можно изменять либо изменением угла падения  $i$ , либо изменяя толщину пластинки  $d$ . Рассмотрим получаемые при этом интерференционные картины.

**1. Полосы равного наклона** ( $d = \text{const}$ ,  $i$  — изменяется). В этом случае на пластинку одинаковой толщины от точечного источника света посылают под разными углами падения монохроматический свет (см. рис. 7.12б, источник света специально закрывают, чтобы не было прямого попадания лучей на экран).

На экране получается картина интерференции в виде темных и светлых (окрашенных в один цвет) полос, называемых полосами равного наклона, так как они образованы лучами, падающими на пластинку под одним и тем же углом падения.

Если посылать на пластинку белый свет, то тогда на экране также будут наблюдаться полосы равного наклона, но они будут разноцветными. Это связано с тем, что условия усиления света для волн разного цвета выполняются под разными углами падения: если для одного цвета будет минимум, то для другого при том же угле падения — максимум.

**2. Полосы равной толщины** ( $d$  — изменяется,  $i = \text{const}$ ). На пластинку переменной толщины (клин) падает монохроматический свет под одним и тем же углом падения (рис. 7.12в). Луч падающего света делится на два когерентных луча 1 и 2. Если смотреть против хода этих лучей, то тогда на их продолжении, вблизи нижней грани клина, можно наблюдать мнимую картину интерференции.

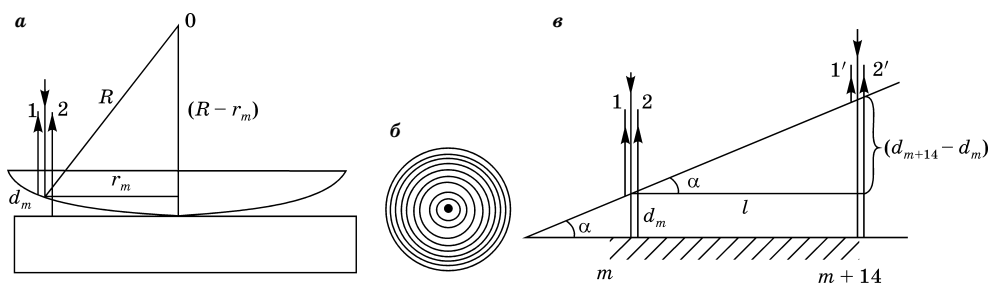


Рис. 7.13

Картину интерференции можно получить и на экране, если поставить на пути лучей 1 и 2 линзу и собрать с ее помощью эти лучи в фокальной плоскости линзы.

Наблюдаемые темные и светлые (окрашенные в один цвет) полосы называют полосами равной толщины, так как они образованы лучами, идущими от тех точек пластинки, для которых толщина пластинки будет одинаковой. Если посылать на пластинку белый свет, то тогда на экране также наблюдаются полосы равной толщины, но они будут окрашены в разные цвета.

К полосам равной толщины, например, относятся «кольца Ньютона», которые можно наблюдать как в отраженном, так и в проходящем излучении на установке, изображенной на рис. 7.13а.

На плоскопараллельную пластинку кладут плосковыпуклую линзу радиуса  $R$ . Лучи монохроматического света падают перпендикулярно плоскости пластинки. При отражении от границы раздела линза–пластинка возникают два когерентных луча 1 и 2 (толщина воздушного слоя является малой по сравнению с толщиной линзы и пластинки). При наложении эти лучи дают картину интерференции в виде темных и светлых (окрашенных в один цвет) колец (рис. 7.13б). В центре картины будет наблюдаться темное пятно, так как толщина воздушного слоя  $d$  здесь будет практически равна нулю, то есть существенно меньше длины волны падающего света ( $d \ll \lambda_0$ ). Тогда из формулы (7.17) следует, что оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна нечетному числу полуволн, то есть выполняются условия наблюдения минимумов.

Если на установку послать белый свет, то и тогда в центре картины наблюдается темное пятно, а «кольца Ньютона» будут разноцветными.

При наблюдении картины интерференции в проходящем свете в формуле (7.17) будет отсутствовать слагаемое  $\lambda_0/2$ , поэтому в центре картины будет наблюдаться светлое (окрашенное в один цвет) пятно.

**3. Пластика в роли светофильтра** ( $d = \text{const}$ ,  $i = \text{const}$ , падает белый свет). При падении на пластинку белого света (рис. 7.12а) условие усиления (7.19 а) будет выполняться только для определенного цвета, и поэтому в отраженном излучении пластинка будет соответствующим образом окрашена. В этом случае пластинка будет играть роль светофильтра — выделять из полосы частот белого света узкую полосу, соответствующую данному цвету.

Меняя угол падения, можно в отраженном излучении изменять цвет пластинки. При определенном угле падения по цвету пленки можно определять

ее толщину. Так, например, по цвету пленок масла (или нефти) на поверхности воды можно определять их толщину.

Рассмотрим схему решения задач на интерференцию света.

**Задача 1.** На тонкий стеклянный ( $n = 1,5$ ) клин падает перпендикулярно его нижней грани монохроматический свет с длиной волны  $\lambda_0 = 500$  нм. На длине нижней грани клина  $l = 1$  см укладывается  $N = 14$  темных интерференционных полос. Найти преломляющий угол  $\alpha$  клина.

**Решение.** Первое уравнение, необходимое для решения задачи, запишем из картины хода лучей. Так как угол  $\alpha$  является малым, можно изобразить упрощенный ход лучей (рис. 7.13в), из которого следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{d_{m+N} - d_m}{l}. \quad (*)$$

Второе уравнение можно записать на основании условия наблюдения темных полос картины интерференции. При этом для оптической разности хода получим следующие выражения ( $i = 0$ ):

$$\Delta_{m+N} = 2d_{m+N}n + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2 \cdot (m+N) + 1), \quad \Delta_m = 2d_m n + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1),$$

разность которых дает

$$\Delta_{m+14} - \Delta_m = 2(d_{m+14} - d_m)n = \frac{\lambda_0}{2} N \Rightarrow (d_{m+N} - d_m) = \frac{\lambda_0 N}{4n}. \quad (**)$$

Учитывая формулы (\*) и (\*\*), запишем окончательное выражение для угла  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\lambda_0 N}{4nl} = \frac{500 \cdot 10^{-9} \cdot 14}{4 \cdot 1,5 \cdot 0,01} = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 0,0067^\circ.$$

**Задача 2.** На установку, предназначенную для наблюдения «колец Ньютона», падает перпендикулярно поверхности пластинки монохроматический свет с длиной волны  $\lambda_0 = 600$  нм. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы соседних темных «колец Ньютона» соответственно равны  $r_m = 4,000$  мм и  $r_{m+1} = 4,382$  мм. Зная радиус кривизны линзы  $R = 1,28$  м, найдите номер кольца  $m$  и длину волны  $\lambda_0$  падающего света.

**Решение.** Запишем первое уравнение, необходимое для решения задачи, основываясь на рис. 7.13а:

$$R^2 = (R - d_m)^2 + r_m^2 \Rightarrow r_m^2 = 2Rd_m, \quad r_{m+1}^2 = 2Rd_{m+1}, \quad (*)$$

где учтено, что толщина  $d_m$  воздушного слоя является малой величиной, значительно меньшей  $R$  и  $r_m$ .

Второе уравнение можно записать из условия наблюдения темных колец картины интерференции. При этом для оптической разности хода (7.16) получим следующие выражения ( $i = 0$ ):

$$\Delta_{m+1} = 2d_{m+1}n + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2 \cdot (m+1) + 1), \quad \Delta_m = 2d_m n + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1),$$

из которых следует

$$d_{m+1}n = \frac{1}{2} \lambda_0 (m+1), \quad d_m n = \frac{1}{2} \lambda_0 m \Rightarrow d_{m+1} \frac{\lambda_0 (m+1)}{2n}, \quad d_m = \frac{\lambda_0 m}{2n}. \quad (**)$$

Подставляя выражения (\*\*) для  $d_m$  и  $d_{m+1}$  в формулу (\*), получим

$$r_{m+1}^2 = \frac{R\lambda_0(m+1)}{n}, \quad r_m^2 = \frac{R\lambda_0 m}{n}.$$

Из этих формул следует, что

$$r_{m+1}^2 - r_m^2 = \frac{R\lambda_0}{n} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{(r_{m+1}^2 - r_m^2)n}{R}, \quad m = \frac{r_m^2}{r_{m+1}^2 - r_m^2}.$$

Подставляя числовые значения, получим  $\lambda_0 = 500$  нм и  $m = 5$ .

#### 7.2.7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТА. ИНТЕРФЕРОМЕТР МАЙКЕЛЬСОНА

**Просветление оптики.** Как было отмечено в п. 6.2.2, на границе раздела воздух–стекло отражается 4% энергии падающей волны. Поэтому при наличии в оптическом приборе достаточного количества линз, зеркал и преломляющих тел до наблюдателя доходит малая часть первоначальной энергии световой волны. Для того чтобы увеличить освещенность (яркость) изображения, с помощью интерференции света можно убрать отраженные лучи. Для этого на поверхность линзы наносят тонкую пленку, у которой показатель преломления меньше, чем показатель преломления стекла линзы ( $n_{\text{пл}} < n_{\text{ст}}$ ). В этом случае наряду с лучом 1, отраженным от поверхности линзы, возникает луч 2, отраженный от поверхности пленки (рис. 7.14а). Эти лучи являются когерентными, и они гасят друг друга при толщине пленки, определяемой из условия

$$2dn_{\text{пл}} = \frac{\lambda_0}{2}(2m+1), \Rightarrow d = \frac{\lambda_0(2m+1)}{4n_{\text{пл}}}. \quad (7.20)$$

В этом случае происходит перераспределение световой энергии; она вся проходит в линзу, отраженной волны не будет.

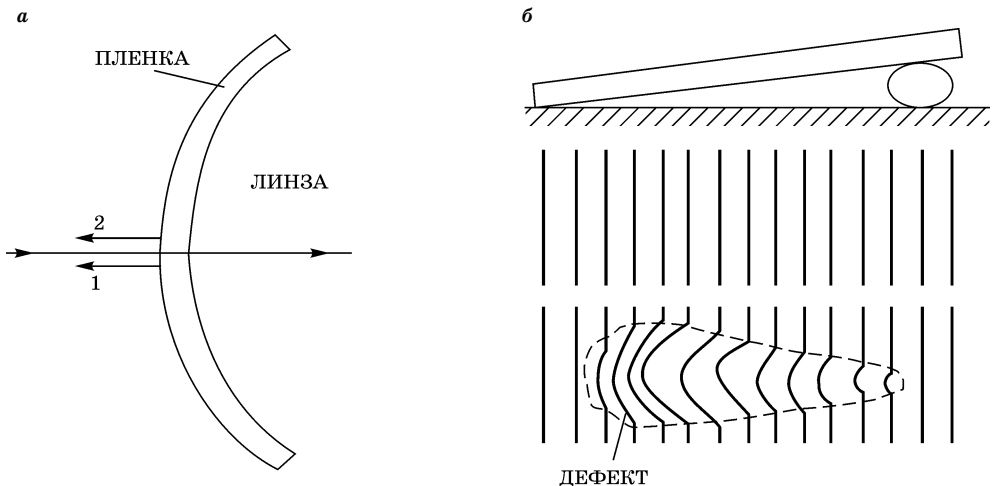


Рис. 7.14

Как видно из выражения (7.20), толщина пленки определяется длиной волны падающего излучения. Поэтому выбирают условие полного гашения при отражении наиболее чувствительных для глаза лучей зеленого цвета. Тогда остальные волны видимого диапазона будут частично отражаться, а просветленные линзы будут окрашены в фиолетово-красные цвета.

**Определение качества обработки поверхностей.** На исследуемую поверхность кладут плоскопараллельную пластинку так, чтобы создать воздушный зазор между поверхностью и пластинкой (рис. 7.14б). Перемещая по поверхности пластинку, по искажению картины интерференции можно обнаружить дефекты ее обработки (царапины, шероховатость), так как в месте нахождения дефекта правильная картина чередования светлых и темных полос будет искажена.

**Интерферометр Майкельсона.** Интерферометрами называют приборы, в которых наблюдаемая картина интерференции служит для практических целей — для точных измерения каких-либо физических величин и, в частности, длины световой волны (см. п. 7.2.6, задача на «кольца Ньютона»). Картина интерференции здесь получается пространственным делением пучка света на два или большее число когерентных пучков, создания между ними оптической разности хода и затем сложения их с целью получения картины интерференции.

Существуют различные виды таких приборов; здесь рассматривается двухлучевой интерферометр Майкельсона (рис. 7.15а).

Источник монохроматического света посылает луч на пластинку А, которая покрыта слоем вещества, пропускающего половину падающего на него света, поэтому луч света разделяется на два. Луч 2 проходит пластинку А, падает на зеркало 2, отражается от него, проходит снова пластинку А и попадает

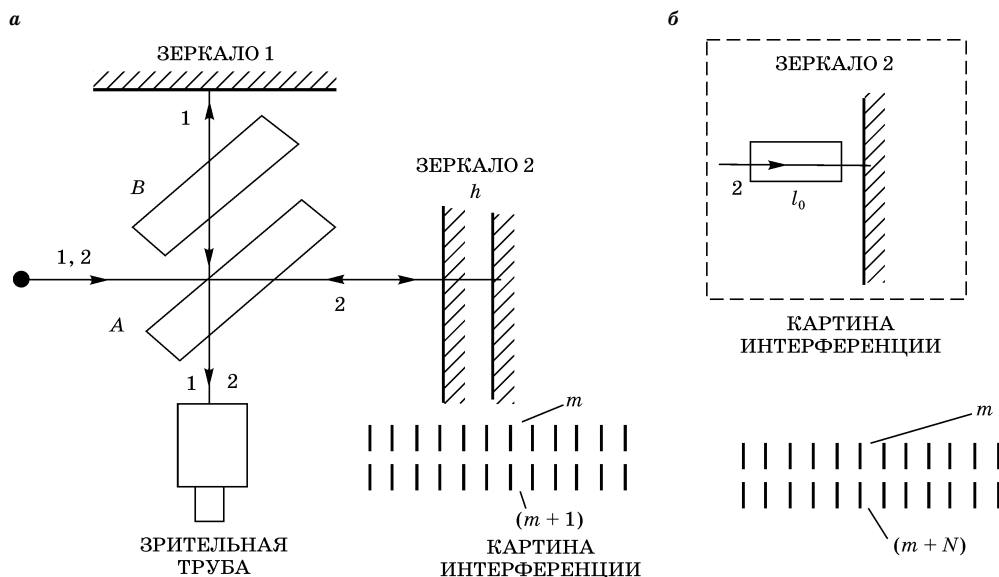


Рис. 7.15



в зрительную трубу, в которой наблюдают картину интерференции лучей 1 и 2. Луч 1 отражается от пластинки *A*, проходит пластинку *B*, отражается от зеркала 2, проходит пластинки *B* и *A* и попадает в зрительную трубу. Пластинка *B* необходима для того, чтобы создать одинаковые условия для лучей 1 и 2, а именно: луч 2 проходит пластинку *A* три раза и луч 1 соответственно проходит пластинки три раза — два раза пластинку *B* и один раз пластинку *A*.

Если зеркала 1 и 2 будут взаимно перпендикулярны, то на экране в зрительной трубе будет наблюдаться или светлое, или темное пятно, картины интерференции не будет, так как для всех лучей, испущенных источником, будут одинаковыми оптические разности хода. Для создания картины интерференции одно из зеркал немного наклоняют, это приводит к изменению оптической разности хода лучей, и на экране будут наблюдаться полосы равной толщины.

Рассмотрим, каким образом можно использовать наблюдаемую картину интерференции для практических целей.

**1. Определение малых изменений расстояний.** От излучения определенной длины волны в зрительной трубе наблюдают картину интерференции, на ней фиксируют положение светлой интерференционной полосы с произвольным номером *m*. Оптическую разность хода лучей 2 и 1 можно найти из их геометрической разности хода:  $\Delta = l_2 - l_1$ , и из условия наблюдения картины интерференции:

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2} 2m,$$

причем

$$\Delta = l_2 - l_1 = \frac{\lambda_0}{2} 2m.$$

Затем смещаем зеркало на расстояние *h* (рис. 7.15а). Пусть при этом на интерференционной картине вместо светлой полосы с номером *m* встанет светлая полоса с номером (*m* + 1). В этом случае для оптической разности хода лучей 1 и 2 запишем

$$\Delta' = l'_2 - l_1 = l_2 + 2h - l_1 = \frac{\lambda_0}{2} 2(m+1).$$

Тогда

$$\Delta' - \Delta = (l_2 + 2h - l_1) - (l_2 - l_1) = 2h = \frac{\lambda_0}{2} 2(m+1) - \frac{\lambda_0}{2} 2m = \lambda_0 \Rightarrow h = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Если на место светлой полосы становится соседняя с ней темная полоса, то  $h = \lambda_0/4$ .

Современные оптические приборы способны достаточно надежно фиксировать смещение интерференционной полосы на 0,1 ее толщины. Следовательно, наименьшее смещение *h* зеркала 2, которое можно зафиксировать, составляет  $h \approx 0,03\lambda$ , что для  $\lambda_0 = 500$  нм дает значение, равное  $h \approx 15$  нм. Это позволяет, например, регистрировать малые изменения размеров тел в электрическом (явление электрострикции) или магнитном (явление магнито-стрикции) полях.

**2. Определение показателей преломления газов.** На пути луча 2 ставят прозрачный цилиндрический сосуд (кювету) длиной  $l_0$ , противоположные

границ которого перпендикулярны световому лучу 2 (рис. 7.15б). Сначала в кювете создается вакуум. Оптическую разность хода лучей 2 и 1 можно найти так же, как и в случае определения малых расстояний в пункте 1, а именно

$$\Delta = l_{20} + 2l_0 - l_1 = \frac{\lambda_0}{2} 2m,$$

где явно выделяется вклад в оптический путь луча 2 при прохождении им кюветы. Затем сосуд заполняют каким-либо газом с абсолютным показателем преломления  $n$  при атмосферном давлении. Пусть при этом на место светлой полосы с номером  $m$  встанет светлая полоса с номером  $(m + N)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta' - \Delta &= (l_{20} + 2l_0 n - l_1) - (l_{20} + 2l_0 - l_1) = 2l_0(n - 1) = \frac{\lambda_0}{2} 2(m + N) - \frac{\lambda_0}{2} 2m = \frac{\lambda_0}{2} N \Rightarrow \\ &\Rightarrow n = 1 + \frac{\lambda_0 N}{4l_0}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Зная  $\lambda_0$ ,  $l_0$  и  $N$ , можно найти абсолютный показатель преломления  $n$  газов.

### 7.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Под дифракцией света понимают явление непрямолинейного распространения света, проникновение его в область геометрической тени, огибание им препятствий. Основные закономерности явления дифракции можно понять на основе принципа Гюйгенса–Френеля.

#### 7.3.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА–ФРЕНЕЛЯ. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ. АМПЛИТУДНАЯ И ФАЗОВАЯ ЗОННЫЕ ПЛАСТИНКИ

**Принцип Гюйгенса–Френеля.** Каждая точка фронта волны является источником вторичных когерентных волн. В однородной изотропной среде эти волны являются сферическими. Этот принцип позволяет достаточно просто объяснить явление дифракции и сводит явление дифракции к интерференции вторичных когерентных волн. Следовательно, между явлениями интерференции и дифракции нет принципиального различия: если рассматривают сложение малого числа когерентных волн — это будет интерференция, если большого — дифракция.

Покажем, как можно объяснить явление дифракции на основе принципа Гюйгенса–Френеля. Пусть на преграду, в которой имеется щель, падает плоская волна — на рис. 7.16а она изображена в тот момент времени  $t_1$ , когда фронт волны занимает положение в этой щели. Найдем положение фронта волны в следующий момент времени  $t_2 = (t_1 + \Delta t)$ . Он отстоит от первоначального  $t_1$  на достаточно малый интервал времени  $\Delta t$ , при котором вторичные волны проходят расстояния  $R$ , значительно меньшие размеров щели  $d$  ( $R = c\Delta t \ll d$ ).

Каждая точка фронта волны в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля является источником вторичных волн, которые за время  $\Delta t$  проходят

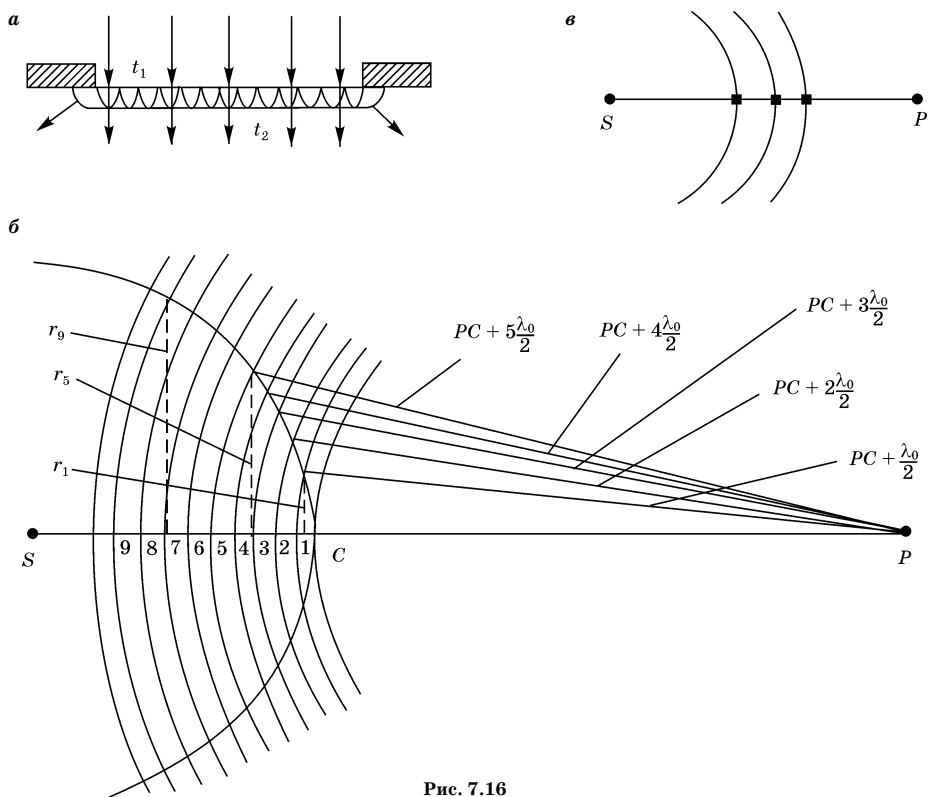


Рис. 7.16

расстояние  $R$ , и фронт каждой вторичной волны будет представлять собой сферу. Положение фронта волны в момент времени  $t_2$  можно найти как огибающую фронтов вторичных волн (рис. 7.16а). Учитывая, что скорость волны в каждой точке фронта волны перпендикулярна к ней, можно видеть, что имеются участки фронта волны, которые обеспечивают проникновение света в область геометрической тени. Если размеры этих участков фронта волны будут соизмеримыми с размерами щели, то тогда явление дифракции света будет наблюдаться; если же они будут существенно меньше размеров щели, то явление дифракции, хотя и будет существовать, но будет незаметным по сравнению с интенсивностью света, проходящего щель в соответствии с законами геометрической оптики.

**Метод зон Френеля.** На рис. 7.16б показано в определенный момент времени положение фронта волны, излучаемой точечным источником  $S$  монохроматического излучения ( $\lambda_0 = \text{const}$ ). Найдем в соответствии принципом Гюйгенса–Френеля результирующую амплитуду волн, приходящих от всех точек фронта волны в точку наблюдения  $P$  (рис. 7.16б). В точке наблюдения будет иметь место результат сложения вторичных когерентных волн, испущенных каждым малым участком фронта волны

$$A_P = \int_S dA, \quad dA = dE = C(\varphi) \frac{E_m dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (7.22)$$

где  $E_m$  и  $(\omega t - kr + \alpha)$  — соответственно амплитуда и фаза вторичной сферической волны, испущенной участком площади  $dS$  фронта волны; этот участок находится на расстоянии  $r$  до точки наблюдения. Коэффициент  $C(\varphi)$  в формуле (7.22) учитывает угол, под которым виден этот участок фронта волны из точки наблюдения  $P$ .

Можно упростить формулу (7.20) для расчета результирующей амплитуды  $A_p$ , если применить метод разбиения фронта волны на зоны, предложенный Френелем. Для этого из точки наблюдения проводят сферы радиусов  $PC$

$$PC + \frac{\lambda_0}{2}, PC + 2\frac{\lambda_0}{2}, PC + 3\frac{\lambda_0}{2}, PC + 4\frac{\lambda_0}{2}$$

и т. д. Эти сферы разбивают фронт волны на зоны Френеля. Первая зона Френеля представляет собой сферический сегмент, а остальные — кольца на поверхности сферы. При этом зоны Френеля обладают следующими свойствами.

1. Волны, приходящие в точку наблюдения от соседних зон Френеля, имеют оптическую разность хода, разность  $\lambda_0/2$  или разность фаз, равную  $\pi$ .

2. При не слишком больших значениях номера  $m$  зоны площади зон примерно одинаковы.

3. Для амплитуды волн, приходящих от разных зон Френеля в точку наблюдения, справедливы следующие соотношения:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 \dots, A_i = \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2}. \quad (7.23)$$

Чем больше будет номер зоны Френеля, тем дальше она будет отстоять от точки наблюдения и тем меньше будет ее угловой размер, под которым она видна из нее. Это приводит к тому, что с увеличением номера зоны будет уменьшаться амплитуда волны, приходящая в точку наблюдения (см. формулу (7.23)).

Введение зон Френеля позволяет найти результирующую амплитуду в точке наблюдения через амплитуды волн от всех зон Френеля. Так, вместо интеграла (7.22) для  $A_p$  можно записать знакопеременный ряд, который можно просуммировать, учитывая формулу (7.23):

$$\begin{aligned} A_p &= \int dA = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - \frac{A_1 + A_3}{2} + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - \frac{A_3 + A_5}{2} + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_N}{2} \approx \frac{A_1}{2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

В формуле (7.24) учтено, что при значении  $N$ , стремящемся к бесконечности ( $N \rightarrow \infty$ ), вкладом зоны Френеля с номером  $N$  можно пренебречь по сравнению с вкладом от первой зоны Френеля.

Итак, в точке наблюдения результирующая амплитуда всех вторичных волн, испущенных от всех точек фронта волны, равна половине амплитуды вторичной волны, приходящей в точку наблюдения от первой зоны Френеля.

В случае сферической волны для радиусов  $r_m$  зон Френеля (рис. 7.16б) несложно получить формулу

$$r_m = \sqrt{\frac{SC \cdot PC}{SC + PC}} \lambda_0 m, \quad (7.25)$$

из которой следует, что для видимого диапазона излучения ( $\lambda_0 = 500$  нм) и расстояний от источника  $S$  излучения до фронта волны ( $SC = 1$  м) и от фронта волны до точки наблюдения  $P$  ( $PC = 1$  м) радиус первой зоны Френеля составляет  $r_1 = 0,5$  мм.

Следовательно, в видимой области излучения первая зона Френеля имеет малые размеры. К тому же для различных положений фронта волны первые зоны Френеля располагаются на прямой линии, соединяющей источник  $S$  излучения и точку наблюдения  $P$  (рис. 7.16а). Все это доказывает прямолинейность распространения света в волновой теории. Действительно, интенсивность волны в точке наблюдения определяется малыми участками фронта волны, расположенными на прямой линии, соединяющей источник излучения и точку наблюдения.

Метод зон Френеля позволяет достаточно просто предложить способы для получения значений амплитуды результирующей волны в точке наблюдения, превышающих значение  $A_1/2$ . Так, если закрыть непрозрачным экраном все зоны Френеля, кроме первой, то тогда можно увеличить амплитуду результирующей волны в два раза ( $A_p = A_1$ ), а интенсивность — в четыре раза.

Для дальнейшего увеличения  $A_p$  можно на пути волны поставить амплитудную зонную пластинку, которая закрывает все четные зоны Френеля, что приводит к следующему результату:

$$A_p = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + \dots$$

Максимальное увеличение амплитуды  $A_p$  можно получить с помощью фазовой зонной пластинки, которая изменяет фазу волн, идущих в точку наблюдения от четных зон Френеля на значение, равное  $\pi$ :

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + \dots$$

Амплитудные и фазовые зонные пластинки достаточно просто создать для электромагнитных волн в области сверхвысоких частот (СВЧ-диапазон). В этом случае размеры зон Френеля будут достаточно большими. Так, из формулы для радиусов зон Френеля (7.25) в случае СВЧ-диапазона ( $\lambda_0 \approx 1$  см,  $SC = PC = 1$  м) можно получить следующие оценки:  $r_1 = 7$  см ;  $r_2 = 10$  см,  $r_3 = 12$  см и т. д.

### 7.3.2. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ НА КРУГЛОМ ДИСКЕ И КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

Рассмотрим конкретные примеры расчета дифракционной картины с использованием метода зон Френеля. Этот метод достаточно просто позволяет понять ее основные особенности, хотя не позволяет оценить интенсивности получаемых максимумов.

**1. Круглый диск.** Пусть на круглый диск падает сферическая монохроматическая волна, испущенная точечным источником  $S$  монохроматического излучения ( $\lambda_0 = \text{const}$ ). За диском находится экран, на котором наблюдается результат прохождения волной диска (см. рис. 7.17а).

Необходимо ответить на вопрос, что наблюдается на экране и в точке  $O$ , расположенной в центре экрана. Для ответа используем метод зон Френеля.

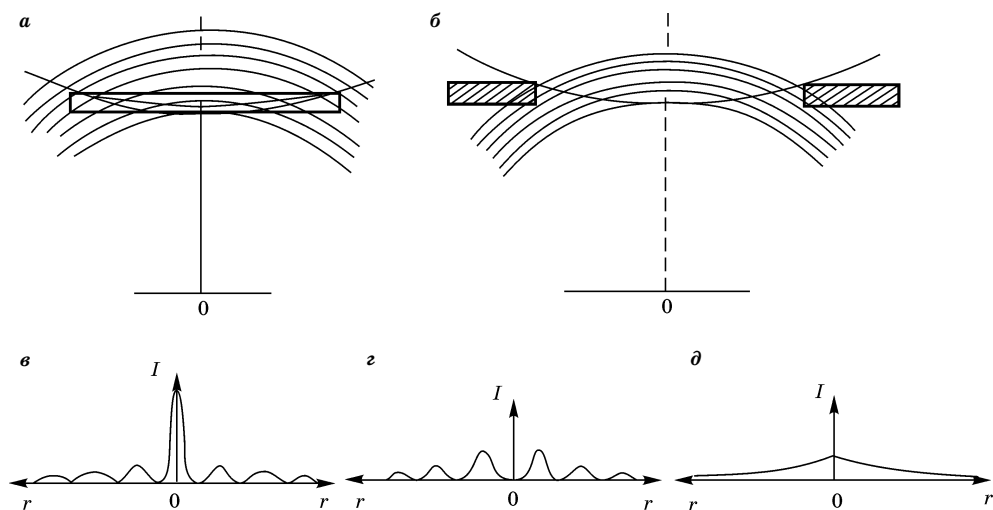


Рис. 7.17

Разобьем фронт волны, занимающий положение в области диска, на зоны Френеля относительно точки  $O$ . Пусть диск закрывает первые  $i$  зон. Применяя описанную выше методику разбиения видимой части фронта волны на зоны и суммируя знакопеременный ряд для амплитуд волн, приходящих в точку наблюдения от зон Френеля, получим

$$A_p = A_{i+1} - A_{i+2} + A_{i+3} - A_{i+4} + \dots = \frac{A_{i+1}}{2} \pm \frac{A_N}{2} \approx \frac{A_{i+1}}{2}. \quad (7.26)$$

Из данного выражения следует, что в центре картины, в точке  $O$  будет наблюдаться светлое пятно, которое получило название **пятна Пуассона**, а на экране — дифракционная картина в виде светлых (окрашенных в один цвет) и темных колец (рис. 7.17в).

Дифракционная картина наблюдаться не будет, если диск закрывает менее чем одну зону Френеля или закрывает достаточно большое количество зон Френеля. В этих случаях на экране наблюдается монотонное падение интенсивности света от центра картины к ее краям (рис. 7.17д).

**2. Круглое отверстие.** Пусть точечный источник монохроматического излучения посылает волну на преграду, в которой имеется круглое отверстие (рис. 7.17б). Необходимо ответить на вопрос, что наблюдается на экране и в точке  $O$ , расположенной напротив источника излучения.

Для ответа на этот вопрос применим метод зон Френеля, а именно разобьем видимую часть фронта волны на зоны Френеля. Пусть отверстие открывает первые  $i$  зон. Применяя деление фронта волны на зоны Френеля относительно точки  $O$  и суммируя знакопеременный ряд, получим в итоге следующее выражения для амплитуды результирующей волны

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_i}{2}. \quad (7.27)$$

Как видно из полученного выражения, здесь возможны два случая.

1. Если число  $i$  является малым и нечетным, то тогда в точке  $O$  будет наблюдаться светлое пятно, так как все зоны, кроме одной, разбиваются на пары, которые гасят друг друга. Остается непогашенной одна зона, которая и дает свет в точке  $O$ . На экране будет наблюдаться дифракционная картина, состоящая из светлых (окрашенных в один цвет) и темных колец (рис. 7.17в).

2. Если же число  $i$  будет малым и четным, то тогда все зоны разбиваются на пары, которые гасят друг друга, и в точке  $O$  будет темное пятно. На экране, как и в первом случае, будет наблюдаться дифракционная картина, состоящая из светлых (окрашенных в один цвет) и темных колец (рис. 7.17г).

Дифракционная картина будет отсутствовать, если отверстие открывает менее чем одну зону Френеля или достаточно большое число зон. В этом случае на экране наблюдается монотонная картина падения интенсивности света от центра к краям (рис. 7.17д).

### 7.3.3. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ОДНОЙ ЩЕЛИ (ДИФРАКЦИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛУЧАХ). ИЗМЕНЕНИЕ КАРТИНЫ ДИФРАКЦИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ШИРИНЫ ЩЕЛИ

Пусть плоская монохроматическая волна ( $\lambda_0 = \text{const}$ ) падает перпендикулярно на поверхность щели шириной  $a$  ( $AB = a$ ). С помощью линзы в одной точке на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, собираются все параллельные лучи, испущенные каждой точкой фронта волны под углом  $\varphi$  к первоначальному направлению падения лучей на щель (рис. 7.18а). В этом состоит отличие дифракции Фраунгофера от дифракции Френеля.

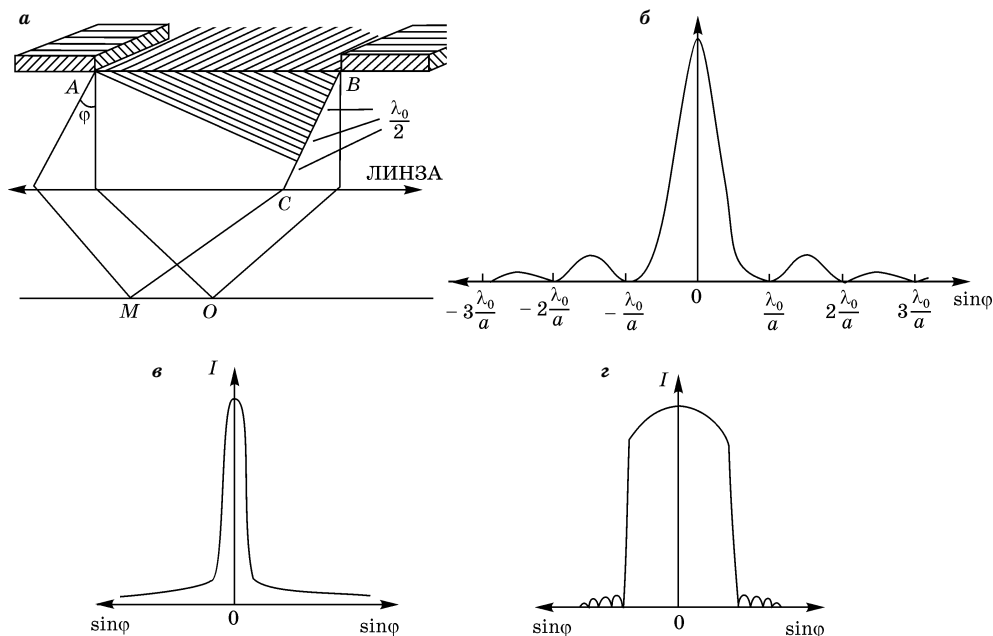


Рис. 7.18

Так, в дифракции Френеля не принимается никаких мер для собирания лучей, они сами приходят в точку наблюдения, поэтому ее можно назвать дифракцией в сходящихся лучах.

Для расчета дифракционной картины, наблюдаемой на экране, используем метод зон Френеля. Разобьем фронт волны на зоны Френеля. Отметим, что на линии  $AB$  оптическая разность хода вторичных волн, испущенных каждой точкой фронта волны, равна нулю, после линии  $AC$  она не изменяется. Поэтому оптическая разность хода возникает при переходе вторичных волн от линии  $AB$  к линии  $BC$ , то есть отрезок  $BC$  дает оптическую разность хода вторичных волн.

Разделим его на участки длиной  $\lambda_0/2$ , затем проведем через границы этих участков прямые, параллельные линии  $AC$ . Это приведет к делению фронта волны на прямоугольные полоски одинаковой ширины, которые и представляют собой зоны Френеля. Для соседних зон оптическая разность хода волн будет равна  $\lambda_0/2$ , что является главным свойством зон Френеля.

Если на отрезке  $BC$  укладывается четное число зон Френеля, то тогда все зоны открытой части фронта волны делятся на пары зон, причем волны, приходящие в точку наблюдения от каждой пары зон, гасят друг друга и на экране в точке  $M$  наблюдается темная полоса

$$\frac{BC}{\lambda_0/2} = \frac{a \sin \varphi}{\lambda_0/2} = 2m \Rightarrow a \sin \varphi = \pm \frac{\lambda_0}{2} 2m, m = 1, 2, \dots, \quad (7.28)$$

то есть уравнение (7.28) дает условие наблюдения минимумов дифракционной картины на экране.

Если на отрезке  $BC$  укладывается нечетное число зон Френеля, то тогда все зоны открытой части фронта волны делятся на пары зон, кроме одной. Волны, приходящие в точку наблюдения от каждой пары зон, гасят друг друга, остается только одна зона, которая и дает на экране светлую полосу:

$$\frac{BC}{\lambda_0/2} = \frac{a \sin \varphi}{\lambda_0/2} = 2m + 1 \Rightarrow a \sin \varphi = \pm \frac{\lambda_0}{2} (2m + 1), m = 1, 2, \dots \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29) дает условие наблюдения на экране максимумов дифракционной картины.

В связи с приближенным характером расчетов с помощью метода зон Френеля (в общем случае необходимо проводить точное вычисление интеграла в формуле (7.22), разбивая щель на бесконечное число узких полосок) полученная формула является приближенной. Более точные расчеты дают следующую формулу для наблюдения максимумов:

$$\operatorname{tg}(a \sin \varphi / \lambda) = a \sin \varphi / \lambda. \quad (7.30)$$

На рис. 7.18б приведена дифракционная картина, отражающая зависимость интенсивности  $I$  не от координаты  $r$  точек экрана, а от значения  $\sin \varphi$ , что является удобным, так как на этом графике можно точно обозначить положение минимумов и максимумов дифракционной картины.

В центре картины, для угла  $\varphi = 0$ , наблюдается центральный максимум нулевого порядка, который не описывается формулой (7.29). Как показыва-



ют расчеты, интенсивность первых ( $m = \pm 1$ ) максимумов в 22 раза меньше интенсивности центрального максимума. В связи с этим картина дифракции на экране получается достаточно слабой по интенсивности — на фоне яркой светлой полосы (центрального максимума) другие максимумы практически не видны — и является нечеткой: наблюдаются плавные переходы между соседними максимумами и минимумами.

Представляет интерес рассмотреть, как изменяются условия наблюдения дифракционной картины при изменении ширины щели. Здесь возможны три случая.

**1. Ширина щели значительно меньше длины волны падающего света:**

$$a \ll \lambda_0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\lambda_0}{2a} (2m + 1) > 1.$$

Это приводит к тому, что все максимумы и минимумы дифракционной картины уходят от центра картины на большие расстояния и картина дифракции не наблюдается (рис. 7.18в).

**2. Размеры щели сопоставимы с длиной волны падающего излучения:**  $a \sim \lambda_0$ . В этом случае максимумы и минимумы приходят из бесконечности — на экране наблюдается дифракционная картина.

**3. Ширина щели значительно превышает длину волны падающего излучения**

$$a \gg \lambda_0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\lambda_0}{2a} (2m + 1) \ll 1.$$

Все максимумы и минимумы сходятся в окрестности одной точки пространства. Картина дифракции наблюдаться не будет — практически невозможно наблюдать близко расположенные максимумы и минимумы на фоне яркого центрального максимума (рис. 7.18з).

Рассмотренный пример позволяет еще раз привести доводы в пользу известного вывода о том, что, дифракционные явления наблюдаются тогда, когда размеры препятствий сопоставимы с длиной волны падающего излучения ( $r \sim \lambda_0$ ).

#### 7.3.4. ОДНОМЕРНАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА. УСЛОВИЯ НАБЛЮДЕНИЯ ГЛАВНЫХ МАКСИМУМОВ

Одномерная дифракционная решетка представляет собой совокупность большого числа  $N$  одинаковых щелей ширины  $a$ , отстоящих друг от друга на одном и том же расстоянии  $b$  (см. рис. 7.19а). Расстояние  $d$ , равное  $d = (a + b)$ , называют **периодом** или **постоянной дифракционной решетки**.

Пусть на дифракционную решетку падает плоская монохроматическая волна. С помощью линзы в одной точке на экране, расположенном в ее фокальной плоскости, собираются все параллельные лучи, испущенные каждой щелью дифракционной решетки (рис. 7.19а). В результате в каждой точке экрана наблюдается сложение  $N$  одинаково направленных одной и той же частоты гармонических колебаний вектора  $\vec{E}$ , начальные фазы которых образуют арифметическую прогрессию с шагом  $\delta$ .

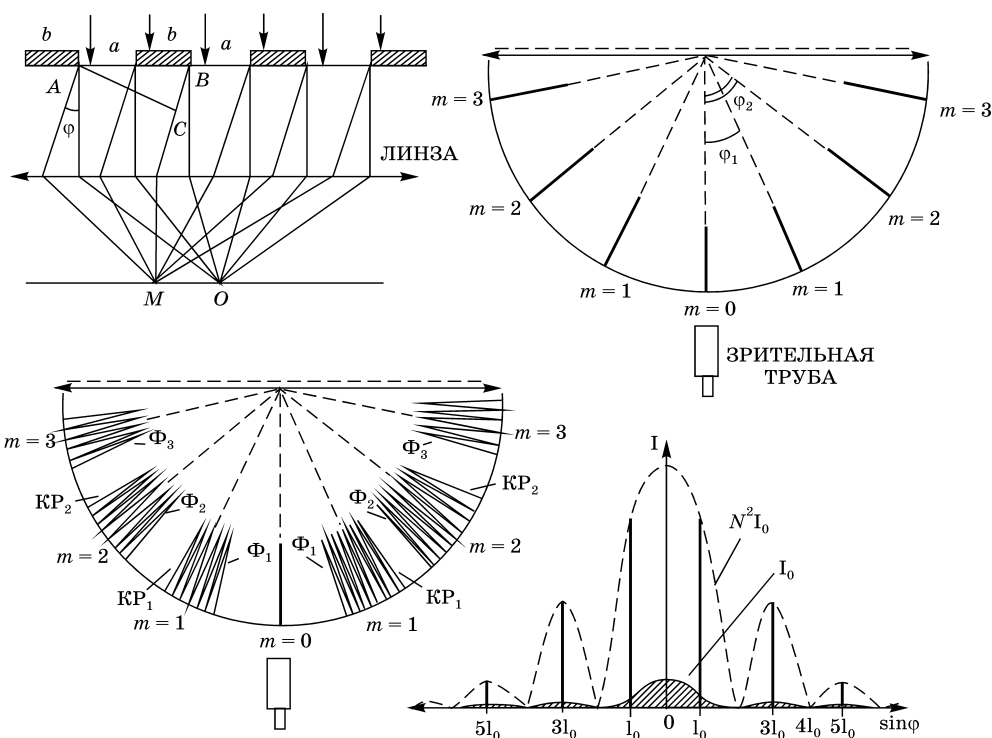


Рис. 7.19

1 щель:  $E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , 2 щель:  $E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta)$ ,

3 щель:  $E_3 = A_3 \cos(\omega t + \varphi_0 + 2\delta)$ , ...,  $N$  щель:  $E_N = A_N \cos(\omega t + \varphi_0 + (N-1)\delta)$ .

Здесь  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) обозначает амплитуду волны, приходящей в точку наблюдения от одной щели. Входящий в фазу колебаний параметр  $\delta$  дает разность фаз волн, идущих от соседних щелей. Он связан с оптической разностью хода  $\Delta$  этих волн, равной расстоянию  $BC$  (рис. 7.19a), соотношением

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} BC = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \varphi. \quad (7.31)$$

Такой случай сложения колебаний был рассмотрен в разделе 5.7.2, где была получена для результирующей амплитуды колебаний формула (5.31). Она позволяет записать следующее выражение:

$$A_P = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \quad I \sim A^2 \Rightarrow I_P = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \quad (7.32)$$

В этой формуле под интенсивностью  $I_0$  понимают интенсивность волны, приходящей в точку наблюдения от одной щели. Отметим, что  $I_0$  так же как и параметр  $\delta$ , зависит от угла  $\varphi$ .

Формула (7.32) полностью описывает дифракционную картину, определяя расположение максимумов и минимумов на экране и их интенсивность.

Оказывается, что на экране **наблюдаются только главные максимумы**. Найдем из формулы (7.30) **условие наблюдения главных максимумов**. Для этого нужно одновременно приравнять нулю числитель и знаменатель выражения (7.32):

$$\sin \frac{N\delta}{2} = 0, \sin \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{N\delta}{2} = \pi m, \frac{\delta}{2} = \pi m \Rightarrow \delta = 2\pi m \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \varphi = 2\pi m \Rightarrow d \sin \varphi = m\lambda_0, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.33)$$

Из этого уравнения можно найти углы, под которыми наблюдаются главные максимумы.

Найдем интенсивность главных максимумов. Для этого подставим в формулу (7.32) параметр  $\delta$ , равный  $2\pi m$ , и раскроем дробь с использованием правила Лопиталья:

$$\frac{\left(\sin^2 \frac{N\delta}{2}\right)'}{\left(\sin^2 \frac{\delta}{2}\right)'} = \frac{\left(2 \frac{N}{2} \sin \frac{N\delta}{2} \cos \frac{N\delta}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}\right)'} = \frac{N(\sin(N\delta))'}{(\sin \delta)'} = \frac{N \cdot N \cos(N\delta)}{\cos \delta} = N^2, \quad I_{\text{гл}} = I_0 N^2. \quad (7.34)$$

Как следует из формулы (7.34), интенсивность главных максимумов в  $N^2$  раз больше интенсивности света от одной щели. Это связано с тем, что в случае дифракционной решетки складывается в  $N$  раз большее число когерентных волн, это приводит к более резкому перераспределению энергии световой волны в пространстве.

На основе формулы (7.32) можно показать, что между двумя главными максимумами находится  $(N - 1)$  минимумов и  $(N - 2)$  побочных максимумов. *Интенсивность побочных максимумов в 22 раза меньше интенсивности главных максимумов, и поэтому побочные максимумы на дифракционной картине не видны.*

В итоге картина дифракции будет резкой и яркой, а именно: *наблюдаются яркие узкие линии главных максимумов, разделенные большими темными промежутками*. На рис. 7.19б приведена картина дифракции, наблюдаемая с помощью зрительной трубы при ее повороте от центра картины вправо и влево на углы, достигающие значения  $\varphi = 90^\circ$ .

Из условия (7.32) следует, что главные максимумы дифракционной картины наблюдаются при углах, равных  $\varphi = 0^\circ$  (главный максимум нулевого порядка,  $m = 0$ ),  $\varphi_1 = \pm \arcsin(\lambda_0/d)$  (главные максимумы первого порядка,  $m = \pm 1$ ),  $\varphi_2 = \pm \arcsin(2\lambda_0/d)$  (главные максимумы второго порядка,  $m = \pm 2$ ) и т. д.

Наибольший порядок главного максимума, который можно наблюдать на дифракционной решетке, определяется из условия

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda_0}{d} \leq 1 \Rightarrow m_{\text{макс}} \leq \frac{d}{\lambda_0}, \quad (7.35)$$

а общее число главных максимумов будет равно  $N_{\text{гл}} = (2m_{\text{макс}} + 1)$ . Например, при  $d/\lambda_0 = 3,98$ ,  $m_{\text{макс}} = 3$ ,  $N_{\text{гл}} = 7$ .

При падении на дифракционную решетку белого света все главные максимумы, кроме центрального максимума, будут разлагаться в спектр. При этом в спектре разных порядков фиолетовые линии (Ф) будут располагаться ближе к центру картины, чем красные линии (КР, рис. 7.19б).

Действительно, при  $m = 0$  для всех волн белого света из уравнения (7.33) следует, что угол дифракции  $\varphi$  равен нулю ( $\varphi = 0^\circ$ ). Следовательно, все волны с разной длиной волны приходят в центр экрана и при сложении дают белую полосу. Для  $m \neq 0$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) угол наблюдения  $\varphi = \arcsin(m\lambda_0/d)$  будет зависеть от длины волны и так как  $\lambda_0 < \lambda_{\text{кр}}$ , то и  $\varphi_{\text{ф}} < \varphi_{\text{кр}}$  в спектре любого порядка.

Построим картину дифракции для дифракционной решетки, отражающую зависимость интенсивности  $I$  света в разных точках экрана от значения  $\sin \varphi$  (см. рис. 7.19г).

Для этого на горизонтальной оси будем откладывать значения  $\sin \varphi$  с шагом  $\lambda_0/d$ . Затем нанесем на этой оси точки, в которых наблюдаются минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели ( $I_0 = 0$ ). Возьмем, например, отношение ширины щели  $a$  к постоянной  $d$  дифракционной решетки, равное  $d/a = 2$ , и используем условие (7.28). Тогда

$$a \sin \varphi = \frac{\lambda_0}{2} 2m, m = 1, 2, \dots \Rightarrow \sin \varphi = 2m\lambda_0/d = \pm 2\frac{\lambda_0}{d}, \pm 4\frac{\lambda_0}{d}, \pm 6\frac{\lambda_0}{d}, \dots$$

Это позволяет представить дифракционную картину от одной щели в виде кривой зависимости  $I_0$  от значений  $\sin \varphi$ . Как видно из рис. 7.19г, эта зависимость будет малой интенсивности и размытой.

Затем увеличиваем картину дифракции от одной щели в  $N^2$  раз (на одном поле это можно показать только качественно, так как  $N$  может достигать значений порядка  $5 \cdot 10^4$ ) и наносим при всех значениях  $\lambda_0/d$  главные максимумы в виде узких линий с интенсивностью  $I_0 N^2$  (см. рис. 7.19г). Отметим, что в данном конкретном случае для отношения  $d/a$ , равного двум, пропадают главные максимумы для значений  $m$ , равных ( $m = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ ).

В итоге, из рис. 7.19г наглядно видно, как размытая малой интенсивности картина дифракции от одной щели за счет сложения в  $N$  раз большего числа когерентных волн переходит в резкую дифракционную картину большой яркости для решетки. Это позволяет использовать дифракционные решетки для наблюдения спектров излучения различных веществ, то есть в качестве спектральных приборов.

### 7.3.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ (УГЛОВАЯ ДИСПЕРСИЯ, РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ)

Для количественного описания качества дифракционной решетки вводят такие понятия, как угловую дисперсию  $D$  и разрешающую способность  $R$ , которые независимы друг от друга и взаимно дополняют друг друга.

Угловая дисперсия определяет расстояние по углам  $d\varphi$  двух близко расположенных по длинам волн  $d\lambda$  спектральных линий и рассчитывается по формуле

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (7.36)$$

Используя условие наблюдения главных максимумов (7.33), можно записать

$$d \sin \varphi = m \lambda_0 \Rightarrow d \cos \varphi \cdot d\varphi = m d\lambda \Rightarrow$$

$$D = \frac{m}{d \cos \varphi} \left( \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right) = 2,063 \cdot 10^5 \frac{m}{d \cos \varphi} \left( \frac{''}{\text{мм}} \right). \quad (7.37)$$

Как видно из формулы (7.37), угловая дисперсия  $D$  определяется периодом  $d$  дифракционной решетки, то есть определяется числом щелей решетки, приходящихся на единицу ее длины ( $d = l/N$ , где  $N$  — число щелей,  $l$  — ширина используемой рабочей части решетки). Чем меньше будет  $d$ , тем лучше будет решетка, тем дальше по углам будут отстоять две близко расположенные спектральные линии и тем легче их будет наблюдать.

На рис. 7.20а приведены две спектральные линии ( $\varphi_1, \varphi_2$ ), наблюдаемые в спектре порядка  $m$  для решеток с разным периодом  $d$ , но с одинаковым числом используемых щелей ( $N_1 = N_2, d_2 < d_1$ ). Видно, что расстояние  $\Delta\varphi$  по углам растет при переходе к решетке с меньшим периодом  $d$ . При одинаковом

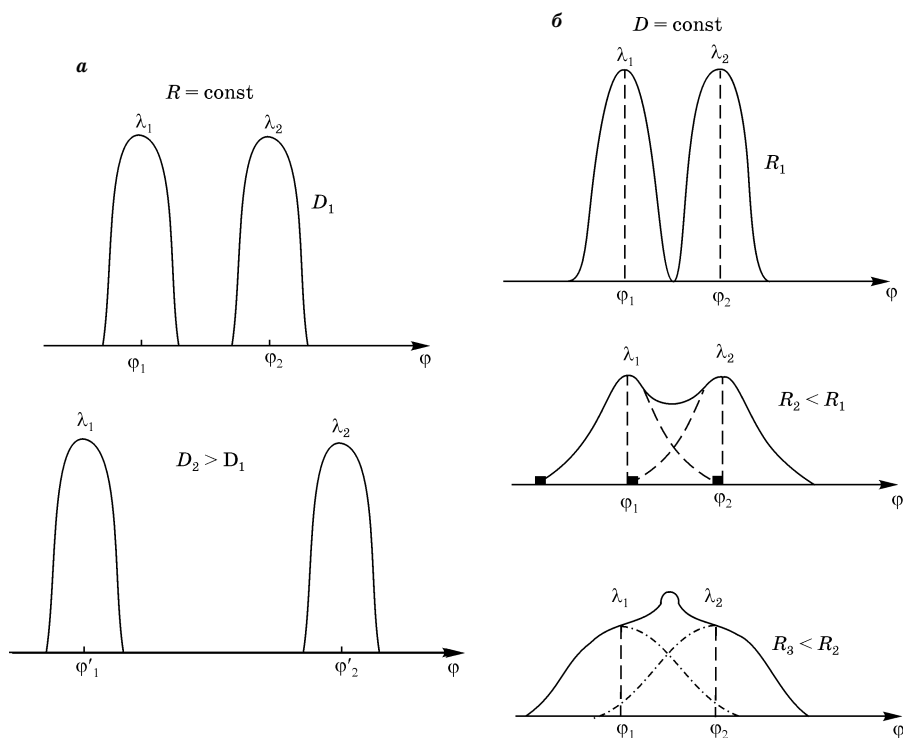


Рис. 7.20

же числе используемых щелей (то есть при одинаковой разрешающей способности  $R$ ) в спектре одного порядка ширина линий остается неизменной.

Под разрешающей способностью  $R$  дифракционной решетки понимают ее способность видеть раздельно, разрешать две близко расположенные по длинам волн спектральные линии. Она определяется по формуле

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (7.38)$$

где под длиной волны  $\lambda$  понимают среднее значение длин волн спектральных линий, а под  $\delta\lambda$  — их разность:

$$\lambda = (\lambda_2 + \lambda_1)/2, \delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Минимальное расстояние по длинам волн двух спектральных линий, при котором они еще видны раздельно, определяется **критерием Рэлея**. Согласно этому критерию, две спектральные линии еще видны раздельно, если минимум одной из них приходится на максимум другой. На рис. 7.20б этот случай соответствует значению  $R_2$ , при этом на результирующей интенсивности света будет наблюдаться провал, составляющий 25% от максимального значения. В соответствии с формулами (7.32) и (7.33) для главного максимума порядка  $m$  для длины волны  $(\lambda + \delta\lambda)$  и первого минимума для длины волны  $\lambda_0$  можно записать

$$\begin{aligned} d \sin \varphi_{\text{макс}} &= m(\lambda_0 + \delta\lambda), \quad d \sin \varphi_{\text{мин}} = (m + 1/N)\lambda_0, \\ R = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda} &= mN = ml/d, \end{aligned} \quad (7.39)$$

то есть разрешающая способность дифракционной решетки определяется числом щелей, участвующих в создании картины дифракции ( $l$  — ширина используемой рабочей части решетки,  $d$  — период решетки).

При увеличении этого числа происходит более резкое перераспределение интенсивности света в пространстве, спектральные линии становятся уже и возможно их более четкое наблюдение при одном и том же угловом расстоянии между ними. На рис. 7.20б решетки имеют одинаковые периоды  $d$ , то есть для них будет одинакова угловая дисперсия  $D$ :  $D_1 = D_2$ .

### 7.3.6. ДИФРАКЦИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ. УСЛОВИЕ БРЭГГА–ВУЛЬФА

Рентгеновские лучи представляют собой ЭМВ с длиной волны  $\lambda_0 \sim 1 \times 10^{-10}$  м. Как уже отмечалось ранее, для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы размеры препятствий были сопоставимы с длиной волны падающего излучения. Это требует изготовления дифракционных решеток с постоянной решетки  $d$  такого же порядка. Искусственное изготовление таких решеток нанесением алмазным острием (или лучом лазера) штрихов на поверхности стекляннной пластинки невозможно.

Однако в природе уже существуют такие дифракционные решетки — это кристаллы, в которых атомы располагаются упорядоченно в узлах кристаллической решетки. Атом кристалла, как и щель дифракционной решетки,

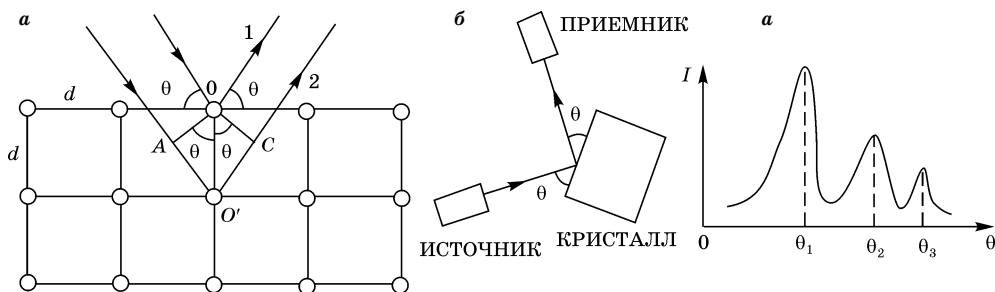


Рис. 7.21

излучает ЭМВ под действием падающей волны. Поэтому цепочка атомов является аналогом одномерной дифракционной решетки, а «упакованную» атомами плоскость и сам кристалл можно рассматривать как двухмерную и трехмерную дифракционные решетки.

Картину дифракции рентгеновских лучей можно наблюдать или в проходящем кристалле, или в отраженном кристаллом излучении.

Рассмотрим дифракцию рентгеновского излучения при отражении от кристалла. Пусть на кристалл падает под углом  $\theta$  к плоскости кристалла (он называется **углом скольжения**) рентгеновское излучение длины волны  $\lambda_0$  (рис. 7.21а). Под действием падающего излучения атомы кристалла создают отраженное излучение. Лучи 1 и 2 являются когерентными. На линии  $OA$  оптическая разность хода этих лучей была равна нулю. После линии  $OC$  она не изменяется, поэтому для лучей 1 и 2 она будет равна

$$\Delta = (AO' + O'C) = 2d \sin \theta.$$

В соответствии с формулой (7.9) запишем условие максимального усиления когерентных волн при дифракции рентгеновских лучей (оно получило название **условия Брэгга–Вульфа**):

$$2d \sin \theta = m \lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.40)$$

Дифракционную картину фиксируют следующим образом. Источник рентгеновского излучения посылает рентгеновские лучи на поверхность кристалла под углом скольжения  $\theta$ , приемник регистрирует интенсивность отраженного под углом  $\theta$  рентгеновского излучения (рис. 7.21б). Непрерывно изменяя (сканируя) угол скольжения  $\theta$ , строится график зависимости интенсивности  $I$  отраженного излучения от угла скольжения  $\theta$  (рис. 7.21в).

На этом графике (он получил название рентгенограммы) углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  определяют положение максимумов дифракционной картины. Рентгенограмма позволяет по известным углам  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  с использованием условия Брэгга–Вульфа (7.40) решать две основные задачи:

1) по известным значениям периода кристаллической решетки определять длину волны падающего рентгеновского излучения (**рентгеновская спектроскопия**);

2) по известной длине волны падающего рентгеновского излучения определять структуру кристаллов (**рентгеноструктурный анализ**).

### 7.3.7. ГОЛОГРАФИЯ

Слово голография переводится с латинского языка как «полная запись». Это означает, что при записи голограмм фиксируют не только амплитудные, но также и фазовые соотношения интерферирующих волн. Основные закономерности этого явления были предсказаны Д. Габором в 1947 году, но из-за отсутствия в то время когерентных источников с высокими характеристиками по временной и пространственной когерентности это явление не было экспериментально подтверждено. Только с открытием лазеров началось широкое применение голографии в научных исследованиях и в промышленности.

Рассмотрим схему записи и наблюдения плоской голограммы (толщина фотоэмульсионного слоя сопоставима с длиной волны падающего излучения).

Луч лазера падает на полупрозрачное зеркало, которое пропускает 50% падающего на него излучения. При этом формируются опорный и предметный лучи (рис. 7.22а). Предметный луч освещает предмет, отраженные от разных участков его поверхности лучи доходят до голограммы. Она представляет собой стеклянную пластинку, на которую нанесен тонкий фотоэмульсионный слой. Здесь встречаются опорный и предметный лучи, на голограмме записывается картина их интерференции.

Если посмотреть на голограмму, то она представляет собой чередование светлых и темных полос, никакого предмета таким образом наблюдать нельзя. Для наблюдения необходимо взять луч лазера и под тем же углом падения осветить голограмму (рис. 7.22б). При этом из луча лазера, рассеянного на максимумах и минимумах дифракционной картины, формируются два пучка света. Один — сходящийся пучок света, с помощью которого можно наблюдать действительное изображение предмета, но оно будет зеркальным и его не используют. Другой — расходящийся пучок света; если смотреть против хода лучей сквозь голограмму, как через окно, можно наблюдать мнимое изображение, его и применяют для наблюдения голограмм.

Рассмотрим кратко достоинства голограмм по сравнению с обычной фотографией.

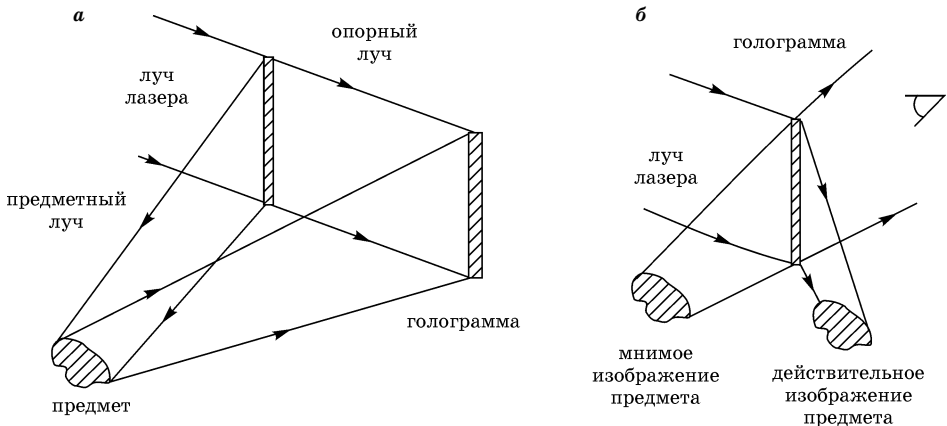


Рис. 7.22



**1. Надежность хранения информации.** Информация о предмете записана на всех участках голограммы, так как все освещенные предметным лучом точки поверхности предмета из-за ее шероховатости посылают лучи на все точки голограммы. Поэтому если взять не всю голограмму, а только ее часть, то можно также получить изображение всего предмета, но оно будет менее четким, чем при наблюдении от всей голограммы. В этом отношении голограмма существенно отличается от обычной фотографии, где утеря какой-то ее части приводит к полной потере записанной там информации.

**2. Большой объем записываемой информации.** Оказывается, что на одной голограмме размером  $(10 \times 10)$  см при условии уверенного считывания можно записать один том Большой советской энциклопедии. Для этого записывают на голограмму отдельные страницы, изменяя с небольшим шагом угол падения опорного луча.

**3. Изображение предмета получается объемным,** то есть при изменении угла наблюдения голограммы можно видеть те части предмета, которые не были видны при первоначальном наблюдении.

**4. На основе объемных цветных фотографий возможно создание голографического кино и телевидения.** Цветные голограммы можно получить, используя как тонкослойные, так и толстослойные (объемные) голограммы (они состоят из набора плоскостей тонкослойных фотоэмульсий) и излучения нескольких лазеров с разной длиной волны, соответствующей разным цветам (например красному, зеленому и синему). Для наблюдения объемных цветных голограмм излучения лазеров трех цветов не нужно, так как сама голограмма за счет явления дифракции падающего белого света на наборе плоскостей тонкослойных фотоэмульсий выбирает необходимое для ее наблюдения излучение.

**5. Голографическая интерферометрия.** Голограмма фиксирует предмет с очень большой точностью, что позволяет детально и подробно изучать явления, которые влияют на голограмму, например деформации, колебания, распределение температур и напряжений в теле и т. д.

**\*7.3.8.  
ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ.  
ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ.  
ИНТЕРФЕРОМЕТР ФАБРИ–ПЕРО.  
ФУРЬЕ-ОПТИКА**

**Основные характеристики спектральных приборов.** Под спектральным прибором понимают любой прибор, позволяющий исследовать спектр частот (или длин волн) падающего на него излучения. Картины интерференции и дифракции, получаемые от интерферометров и дифракционных решеток, зависят от длины волны, следовательно, интерферометры и дифракционные решетки являются спектральными приборами.

Основными характеристиками любого спектрального прибора являются **угловая дисперсия  $D$ , разрешающая способность  $R$  и область дисперсии  $\Delta\lambda$ .** Первые две были рассмотрены в разделе 7.3.6. Под областью дисперсии  $\Delta\lambda$  понимают ширину спектрального интервала, при котором еще нет перекрытия

соседних спектров. Это возможно в том случае, когда длинноволновая граница спектра порядка  $m$  совпадает с коротковолновой границей спектра порядка  $(m + 1)$ :  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda_0 \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_0/m$ .

**Дифракционные решетки.** Согласно формуле (7.39) разрешающая способность прибора  $R$  зависит от числа  $N$  складываемых когерентных волн и от наблюдаемого порядка спектра  $m$ . Для дифракционных решеток можно увеличить  $R$ , взяв достаточно большое число щелей ( $N$  может доходить до  $\sim 200\,000$ ) при малом порядке спектра.

Относительно угловой дисперсии можно отметить следующее. Для инфракрасной области спектра изготавливают дифракционные решетки, на один миллиметр длины которых приходится несколько штрихов ( $d \approx 1\text{ мм}/5 = 2 \cdot 10^5\text{ нм} \Rightarrow D = 1 \cdot m/\cos\varphi$  ("/нм)), для видимого диапазона излучения (600–1200) штрихов на 1 мм ( $d \approx (1670 \div 833)\text{ нм} \Rightarrow D = (123 \div 248)m/\cos\varphi$  ("/нм)), а для ультрафиолетовой части спектра порядка 3600 штрихов на 1 мм ( $d \approx 1\text{ мм}/3600 = 278\text{ нм} \Rightarrow D = 742m/\cos\varphi$  ("/нм),  $d \approx 1\text{ мм}/5 = 2 \cdot 10^5\text{ нм}$ ).

Малые значения  $m$ , которые используются в дифракционных решетках, позволяют исследовать спектры в достаточно большом интервале длин волн, то есть для них характерны большие значения области дисперсии  $\Delta\lambda$ . Для оптического диапазона используют спектры до третьего порядка  $m = 1, 2, 3$ , что для длины волны зеленого цвета  $\lambda_0 = 550\text{ нм}$  дает  $\Delta\lambda \approx 200\text{ нм}$ .

**Интерферометры.** **Интерферометр Фабри–Перо.** По числу складываемых когерентных волн можно выделить многолучевые интерферометры и интерферометры, для которых число интерферирующих лучей будет небольшим (например двухлучевой интерферометр Майкельсона). С целью увеличения разрешающей способности прибора берут для исследований спектры большого порядка.

В многолучевом интерферометре Фабри–Перо порядок спектра достигает значений  $m \sim 10^6$  и более. Это приводит к высокой  $R$  и малой области дисперсии (например для зеленого цвета ( $\Delta\lambda \approx \lambda_0/m = 550\text{ нм}/10^6 = 5,5 \cdot 10^{-4}\text{ нм}$ )).

Рассмотрим кратко принцип работы интерферометра Фабри–Перо. Он представляет собой прибор, состоящий из двух стеклянных или кварцевых пластин, разделенных воздушным промежутком (рис. 7.23а). Пластины по-

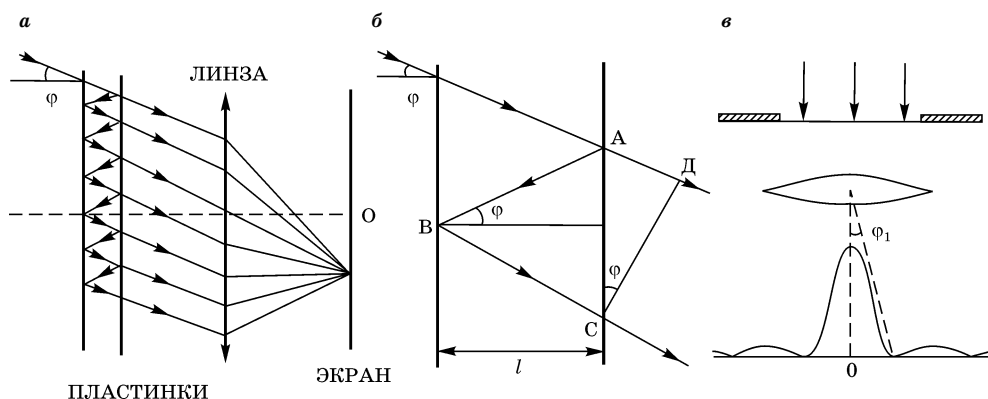


Рис. 7.23

крыты отражающим слоем и строго параллельны друг другу. Луч, вошедший в зазор между пластинами, многократно отражается от них, образуется пучок параллельных лучей, которые собираются линзой в одной точке в фокальной плоскости линзы. Амплитуды колебаний этих лучей уменьшаются в геометрической прогрессии в соответствии с коэффициентом отражения  $\rho - A_1:A_2:A_3:\dots = 1:\rho:\rho^2:\dots$ . За счет сложения большого числа когерентных волн картина интерференции будет представлять собой не чередование светлых и темных полос одинаковой толщины, а яркие узкие линии, разделенные большими темными промежутками. Это позволяет улучшить разрешающую способность интерферометра ( $R = mN$ ).

При падении на прибор расходящегося пучка света на экране возникают полосы равного наклона, имеющие вид резких колец.

Разность хода  $\Delta$  двух соседних интерферирующих лучей можно найти, используя рис. 7.23б:

$$\Delta = (AB + BC) - AD = 2l \cos \varphi,$$

откуда получается условие наблюдения главных максимумов:

$$2l \cos \varphi = m \lambda_0 \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.41)$$

Из формулы (7.41) следует, что порядок интерференции растёт с уменьшением диаметра кольца. Центральное пятно ( $\varphi = 0$ ) соответствует максимальному порядку интерференции  $m_{\text{макс}} = 2l/\lambda_0$ , первому светлomu кольцу соответствует  $(m_{\text{макс}} - 1)$  и т. д.

При расстоянии  $l$  между пластинами порядка  $(1 \div 100)$  мм для длины волны зеленого цвета ( $\lambda_0 = 550$  нм) получим  $m_{\text{макс}} \approx (4000 \div 400\,000)$  и разрешающую способность порядка  $1 \cdot 10^6$  и более.

Интерферометр Фабри–Перо является примером спектрального прибора высокой разрешающей способности. Для исследования спектров в видимой, инфракрасной и в сантиметровой областях длин волн широко используются специальные сканирующие интерферометры Фабри–Перо с фотоэлектрической регистрацией.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на круглом отверстии (рис. 7.23в). На непрозрачный экран с круглым отверстием падает плоская монохроматическая волна. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы.

В центре картины будет светлое пятно, окруженное светлыми и темными кольцами. Можно показать, что первое темное кольцо наблюдается под углом, удовлетворяющим условию

$$\varphi_{\text{мин}} = 1,22 \frac{\lambda_0}{D}, \quad (7.42)$$

где учтено, что обычно диаметр  $D$  отверстия значительно больше длины волны  $\lambda_0$  падающего излучения ( $D \gg \lambda_0$ ). Большая часть падающего светового потока приходится на центральное светлое пятно. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного светлого пятна, то есть его можно рассматривать как изображение удаленного

точечного источника света (это связано с тем, что на отверстие падает плоская волна).

Как видно из формулы (7.42), дифракционная картина не зависит от расстояния между отверстием и линзой. Поэтому линзу можно поместить прямо в отверстие. Отсюда можно сделать вывод: вследствие волновой природы света изображение точки, даваемое линзой, имеет вид светлого пятна, как результат дифракции света на оправе линзы.

Разрешающую способность объектива (линзы) можно определить по критерию Рэля: два точечных источника можно видеть раздельно, если центр пятна одного из них совпадает с первым минимумом дифракционной картины другого источника (рис. 7.20б). Поэтому разрешающую способность объектива можно связать с углом  $\varphi_{\min}$  и записать:

$$R = \frac{1}{\varphi_{\min}} = \frac{D}{1,22\lambda_0}. \quad (7.43)$$

Из формулы (7.43) следует, что чем больше будет диаметр объектива (линзы), тем больше будет его разрешающая способность.

Если взять диаметр зрачка глаза равным значению  $D = 2$  мм, то тогда для зеленого цвета  $\lambda_0 = 550$  нм можно получить  $\varphi_{\min} = 3,36 \cdot 10^{-4}$  рад  $\approx 1'$ ,  $R = 3000$ .

**Фурье-оптика.** В геометрической оптике основным понятием является световой луч и выясняется вопрос о влиянии разных параметров задачи на направление его распространения. В Фурье-оптике основным понятием является волна и рассматривается влияние различных факторов на волновой фронт, фазу и амплитуду волны. Такой подход является наиболее общим, чем в геометрической оптике, поскольку, зная поведение волновых фронтов, можно выяснить не только поведение лучей, но и изменение амплитуды излучения. Основная идея такого подхода состоит в том, что объект рассматривается как источник вторичных волн, дифракционная картина от которого описывается методами дифракции.

Подход, применяемый в Фурье-оптике, позволяет предложить разнообразные методики улучшения картины изображения, например, такие как метод темного поля, метод фазового контраста и пространственная фильтрация изображения.

*Метод темного поля.* Если допустимо уменьшение яркости изображения, то разрешающую способность объектива можно увеличить без увеличения его диаметра, за счет соответствующей фазово-амплитудной модуляции падающего на объектив света, а именно специальным подбором распределения амплитуд и фаз излучения в плоскости объектива можно уменьшить радиус центрального дифракционного максимума.

Можно показать, что в видимом диапазоне излучения можно наблюдать детали линейных размеров  $(0,15-0,3)$  мкм. Более мелкие детали в видимом диапазоне наблюдать нельзя. Но можно обнаружить их наличие с помощью метода темного поля. Для этого освещают такие частицы белым светом, который не попадает в глаз наблюдателя. В глаз наблюдателя, смотрящего в микроскоп, попадают дифрагированные частицей лучи, и они фиксируются в виде светящихся точек, форма которых не имеет ничего общего с формой частицы.

*Метод фазового контраста* позволяет наблюдать тонкие прозрачные объекты, слабо поглощающие свет и не создающие сколько-нибудь заметной модуляции (изменения) проходящего их света. Для этого рассматривают дифракционную картину, полученную дифракцией двух волн — волны, прошедшей мимо предмета, и волны, прошедшей предмет (эта волна изменяет амплитуду и фазу при прохождении предмета). Полученная дифракционная картина и представляет собой изображение предмета.

*Пространственная фильтрация изображений* состоит в том, что вносятся изменения в изображение предмета посредством модификации дифракционной картины предмета в фокальной плоскости линзы, из которой в последующем и формируется изображение. Основная задача — создание фильтра, который нужным образом изменяет проходящую через него волну.

Отметим, что рассмотренный выше метод голографии также относится к применениям Фурье-оптики.

## 7.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Понимание многих явлений взаимодействия электромагнитного излучения с веществом возможно в рамках классической электронной теории. Согласно этой теории внутри атомов находятся электроны, которые могут совершать затухающие колебания около своих положений равновесия. Для каждого атома существуют собственные частоты  $\omega_{0K}$  колебаний электронов (они в квантовой теории соответствуют переходам электронов между разрешенными уровнями энергии). В области видимого и ультрафиолетового излучения основной вклад во взаимодействие с излучением дают электроны, слабо связанные с атомами.

### 7.4.1. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Под поглощением света понимают процесс уменьшения интенсивности проходящей вещество ЭМВ, связанный с переходом энергии волны во внутреннюю энергию вещества (вещество нагревается, ионизируются и возбуждаются атомы и молекулы и т. д.).

Световая волна в веществе возбуждает вынужденные колебания электронов внутри атомов. Эти вынужденные колебания приводят к возникновению вторичных волн, которые частично возвращают обратно энергию первичному излучению, а часть энергии превращается во внутреннюю энергию вещества.

Поглощающие свойства вещества будут зависеть от частоты (длины волны) движущегося в веществе света. Действительно, наибольшая энергия затрачивается волной на раскачку электронов при совпадении частоты падающей волны  $\omega$  с собственными частотами колебаний электронов в атомах ( $\omega = \omega_{0K}$ ). В этих случаях амплитуда колебаний электронов будет максимальной, максимальным будет и поглощение света.

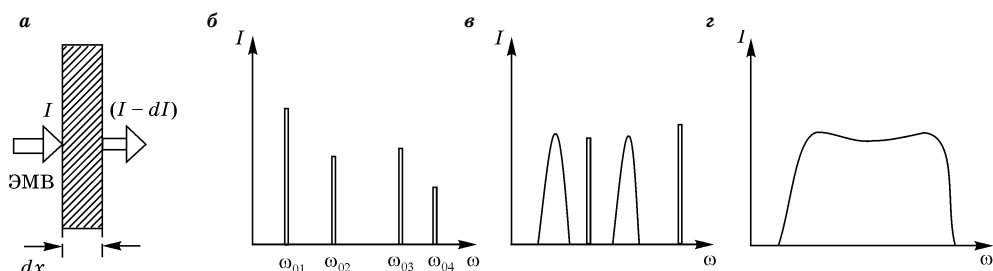


Рис. 7.24

Найдем зависимость интенсивности  $I$  проходящей вещество волны от расстояния  $x$ . Для описания этой зависимости введем понятие коэффициента поглощения  $\alpha$ .

Пусть плоская световая волна интенсивности  $I$  падает нормально на поверхность пластинки толщиной  $dx$  (рис. 7.24а). На выходе из нее, за счет поглощения, интенсивность света уменьшится и станет равной  $(I - dI)$ . Причем величина  $dI$  будет пропорциональной  $I$ ,  $dx$ , и поэтому можно записать следующее равенство:

$$dI = -\alpha I dx.$$

Интегрируя это выражение, получим **закон Бугера–Ламберта**:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}. \quad (7.44)$$

Согласно этому закону интенсивность света при его движении в однородном веществе уменьшается с расстоянием по экспоненциальному закону.

Из формулы (7.44) следует, что  $\alpha$  можно численно определить как толщину слоя, при прохождении которого интенсивность падающего света уменьшается в  $e$  ( $e$  — основание натурального логарифма):

$$\alpha = 1/x \Rightarrow I = I_0/e. \quad (7.45)$$

Рассмотрим зависимость коэффициента поглощения различных веществ от длины волны (угловой частоты) света.

**Разреженные газы, пары металлов при невысоком давлении.** Наблюдаются линейчатые спектры поглощения света (рис. 7.24б). Для всех  $\lambda$  коэффициент поглощения практически равен нулю ( $\alpha \approx 0$ ), и только для узких линий малой толщины ( $\delta\lambda \approx 0,001$  нм,  $\delta\omega \approx 10^{10}$  рад/с) он будет отличен от нуля. Частоты этих линий соответствуют собственным частотам колебаний электронов в атоме.

**Разреженные газы с многоатомными молекулами.** Спектры поглощения представляют собой набор полос поглощения (систем близко расположенных линий), они обусловлены строением молекул, колебательными и вращательными движениями атомов внутри молекул. Это приводит к дополнительным резонансным частотам колебаний электронов в молекулах (рис. 7.24в).

**Жидкие и твердые диэлектрики** характеризуются широкими полосами поглощения, связанными с сильным взаимодействием между молекулами и

атомами, что приводит к появлению дополнительных резонансных частот поглощения (рис. 7.24г).

**Металлы в жидком и твердом состоянии.** Наличие большого количества свободных электронов приводит к большим коэффициентам отражения падающего излучения. За счет возникновения токов проводимости вблизи поверхности металла преломленная волна быстро поглощается металлом.

В видимой области спектра большую роль начинают играть не свободные электроны, а электроны, находящиеся в ионах металла. Поэтому здесь возможны эффекты, при которых световое излучение может проходить через тонкие пленки металлов.

#### 7.4.2. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Как уже отмечалось в разделе 6.1.6, дисперсия света связана с зависимостью фазовой скорости ЭМВ от ее частоты или длины волны. В оптике эта зависимость сводится к зависимости показателя преломления вещества от длины волны (частоты):

$$v = v(\omega), \quad v = c/n \Rightarrow n = n(\omega), \quad n = n(\lambda_0).$$

Наглядно явление дисперсии света можно наблюдать при прохождении светом призмы из прозрачного материала. При этом разные длины волн видимого диапазона излучения имеют разный показатель преломления  $n = n(\omega)$ , что приводит к разложению белого света в спектр (рис. 7.25а).

В изотропных немагнитных средах:  $n = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(\omega)$ , то есть для теоретического описания дисперсии света необходимо найти зависимость диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  среды от  $\lambda$  или  $\omega$ .

Рассмотрим, как это можно сделать в рамках классической электронной теории. Для этого запишем формулы, известные из «Электростатики» (разделы 2.4 и 2.12.3):

$$\varepsilon = 1 + \chi, \quad P_X = \chi \varepsilon_0 E_X = n_0 p_X = n_0 (-qx) \Rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{n_0 qx}{\varepsilon_0 E_X} \cdot E_X = E_m \cos \omega t. \quad (7.46)$$

В этих формулах  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость;  $P_X$  — проекция вектора поляризации  $\vec{P}$  на направление колебаний вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля падающей ЭМВ (направление оси  $Ox$ );  $n_0$  —

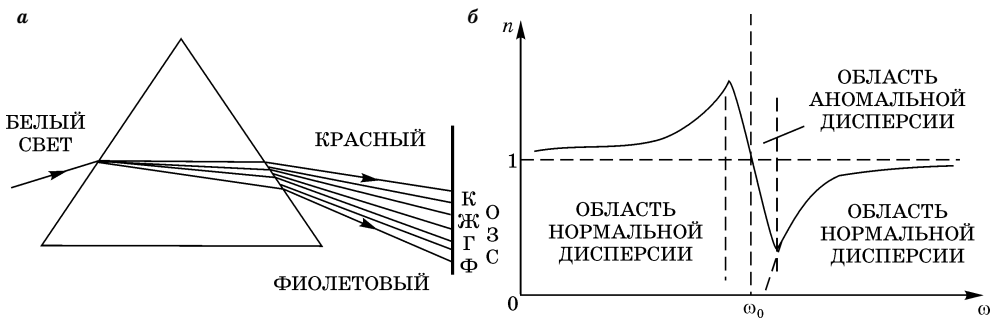


Рис. 7.25

концентрация молекул;  $p_x$  — проекция дипольного момента молекулы на направление оси  $Ox$  (в простейшей модели молекула считается неполярной, в электрическом поле падающей волны у молекулы появляется наведенный дипольный момент);  $q$  — заряд ядра атома, равный по модулю заряду сферической электронной оболочки атома  $q = z|e|$  ( $z$  — заряд ядра);  $x$  — смещение центра тяжести электронной оболочки относительно положения равновесия под действием падающей ЭМВ.

Зависимость смещения центра тяжести электронного облака при вынужденных колебаниях можно найти в соответствии с уравнениями (5.56) и (5.62)

$$x = x_m \cos(\omega t - \psi) \quad x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad F_m = qE_m / m, \quad (7.47)$$

где  $F_m$  — амплитуда внешней кулоновской силы, действующей на электрический заряд со стороны электрического поля ЭМВ;  $m$  — масса электронного облака ( $m = zm_e$ ).

Рассмотрим сначала для простоты случай, при котором частота  $\omega$  падающей ЭМВ существенно отличается от собственных частот колебаний  $\omega_{0K}$  электронов в атоме. Тогда  $2\beta\omega \ll (\omega_0^2 - \omega^2)$ , что приводит к упрощению формул (7.46):

$$\omega < \omega_0 : \psi \approx 0, \quad \varepsilon = 1 + \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega > \omega_0 : \psi \approx \pi, \quad \varepsilon = 1 - \frac{b}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (7.48)$$

Постоянная величина  $b$  в формуле (7.48) составляет  $b = zn_0 e^2 / \varepsilon_0 m_e$ .

В области частот, близких к собственным частотам колебаний электронов в атоме ( $\omega \approx \omega_0$ ), выражение (7.48) приводит к разрыву в графике зависимости  $n(\omega)$  (пунктирные линии, рис. 7.25б); здесь необходимо учитывать затухание колебаний электронов в атоме, что приводит к конечным значениям  $n$  (сплошные линии на рис. 7.26б).

Из графика  $n(\omega)$  на рис. 7.25б видно, что вдали от собственных частот колебаний электронов в атоме производная  $dn/d\omega > 0$ , что соответствует области нормальной дисперсии (см. раздел 6.1.8)

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{d(c/v)}{d\omega} = -\frac{c}{v^2} \frac{dv}{d\omega} > 0 \Rightarrow \frac{dv}{d\omega} < 0 \quad \frac{dv}{d\lambda} < 0.$$

В этих областях частот коэффициент поглощения света веществом является небольшим, то есть среда является прозрачной для света.

Вблизи собственных частот колебаний электронов в атоме происходит сильное поглощение света веществом, эта область частот соответствует области аномальной дисперсии, для которой  $dv/d\omega > 0$ ,  $dv/d\lambda < 0$ . В этой области (рис. 7.25б) вблизи резонанса, при частотах  $\omega > \omega_0$ , показатель преломления вещества  $n$  будет меньше единицы. Это означает, что в этой области частот фазовая скорость света в среде превышает скорость света в вакууме:  $v = c/n > c$ . Этот факт не противоречит специальной теории относительности, так как она накладывает ограничения лишь на скорость передачи информации (сигнала), то есть на групповую скорость сигнала. В области аномальной дисперсии ввиду сильного поглощения света и большого искаже-



ния формы (огибающей) волнового пакета понятие групповой скорости утрачивает свой физический смысл как скорости передачи информации.

Отметим, что для описания дисперсионных свойств среды используется также понятие **дисперсии вещества** как производной от показателя преломления вещества по длине волны света в вакууме ( $dn/d\lambda_0$ ).

### 7.4.3. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Под **рассеянием света** понимают перераспределение по всем направлениям интенсивности проходящего среду света, обусловленное дифракцией вторичных волн на неоднородностях среды. Наблюдаемая при этом дифракционная картина характеризуется распределением интенсивности света по всем направлениям.

Под **неоднородностями среды** понимают наличие в ней областей (частич), размещенных внутри нее хаотично и в которых показатель преломления существенно отличается от показателя преломления окружающей среды. Примером неоднородных сред с явно выраженной оптической неоднородностью являются **мутные среды**. К ним относят: *аэрозоли* — это дым (взвеси в газах мельчайших твердых частиц) или туман (взвеси в газах мельчайших капелек жидкости); *эмульсии* — взвеси в жидкости мельчайших капелек другой жидкости; *суспензии* — взвеси в жидкости частиц твердого вещества; *твердые тела* — такие как перламутр.

В оптически однородной среде, как показывают расчеты, дифракция вторичных волн приводит к тому, что они гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первоначальной волны. Поэтому для однородных сред рассеяние света отсутствует.

Однако если учесть тепловое движение атомов и молекул, то наблюдается так называемое **молекулярное рассеяние света**. Оно связано с тем, что тепловое движение приводит к возникновению в среде флуктуаций плотности, то есть в разных малых объемах плотность (и соответственно показатель преломления) вещества будет разной и все время будет случайно изменяться. Такие малые объемы среды с различной плотностью можно рассматривать как оптические неоднородности.

Важную роль при рассеянии света играет соотношение между линейными размерами неоднородностей  $r$  среды и длиной  $\lambda$  волны проходящего среды света.

**Рэлеевское рассеяние света** ( $r \leq 0,03 \lambda$ ). В этом случае малые размеры неоднородности приводят к согласованному излучению электронов в атомах под действием электромагнитного поля световой волны, и поэтому можно рассматривать излучение одной неоднородности (частицы) как излучение одного диполя, что позволяет использовать формулу (6.60 б) для зависимости интенсивности излучения диполя от частоты:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda_0^4}. \quad (7.49)$$

Эта зависимость интенсивности рассеянного излучения от его частоты (или длины волны) получила название **закона Рэля**. Если среду проходит

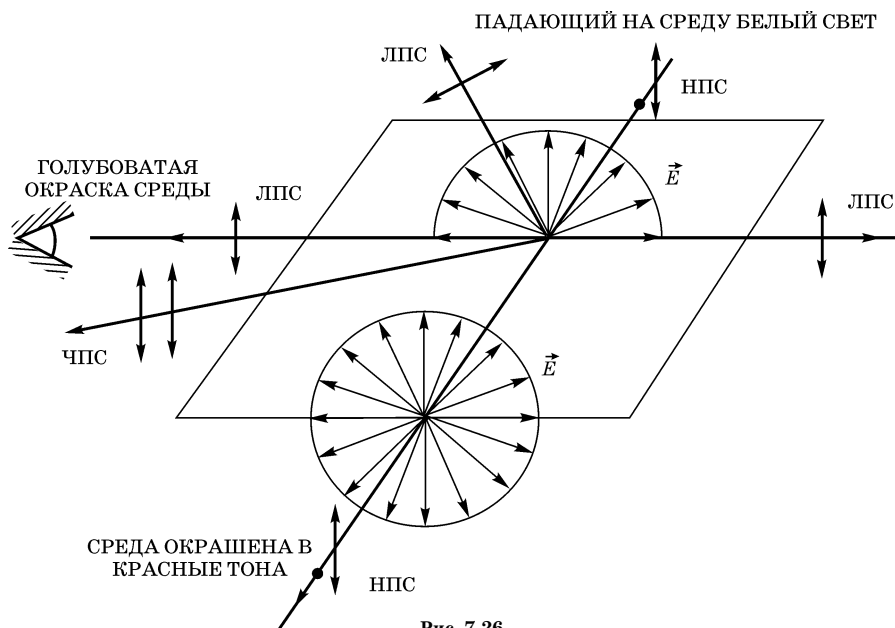


Рис. 7.26

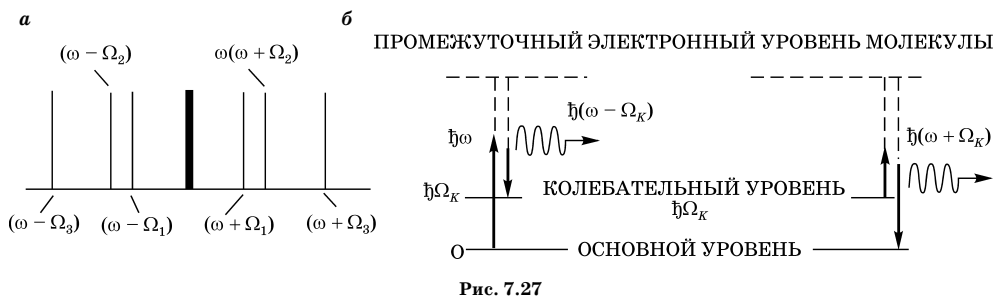


Рис. 7.27

белый свет, то согласно закону Рэля наиболее интенсивно будет рассеиваться коротковолновая часть излучения. Так, на рис. 7.26 показано, что при наблюдении среды (мутная вода) сбоку она будет окрашена в голубой цвет. В прошедшем же такую среду излучении будет преобладать длинноволновая часть падающего излучения (среда будет окрашена в красные тона, рис. 7.26).

При прохождении неполяризованного излучения (НПС) через неоднородную среду происходит поляризация рассеянного излучения (рис. 7.26), а именно в плоскости, перпендикулярной к направлению первоначального движения падающей волны, рассеянное излучение будет линейно поляризованным (ЛПС), а в остальных направлениях его поляризация будет частичной (ЧПС).

Это связано с тем, что вдоль оси диполи не излучают вторичных волн, а оси диполей располагаются вдоль направления колебаний векторов  $\vec{E}$  электрического поля первичной ЭМВ, то есть по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной к первоначальному направлению (рис. 7.27).

Как показывают оценки, в случае молекулярного рассеяния света размер неоднородностей среды существенно меньше длины волны света. Следовательно, здесь также будет справедлив закон Рэлея. Это объясняет голубой цвет неба (до глаз доходит рассеянный атмосферой свет). При заходе и восходе Солнца прямые лучи, попадающие в глаза, будут окрашены в красные тона. За пределами атмосферы небо будет темным, так как в глаза человека попадают только прямые лучи света от звезд (рассеянных лучей не будет).

**Рассеяние Г. Ми** ( $r \geq \lambda$ ). В этом случае излучение электронов в атомах одной неоднородности теряет свою согласованность, что приводит к меньшей зависимости интенсивности рассеянного излучения от частоты и при больших размерах неоднородностей среды ( $r \gg \lambda$ ) спектральный состав рассеянного и проходящего среду излучений будет одинаковым.

Рассеяние Ми объясняет, например, белый цвет облаков (свет рассеивается на каплях воды в облаке), и при задымлении атмосферы небо становится белесым.

#### **Рассеяние света с изменением его частоты.**

**1. Рассеяние Мандельштама–Бриллюэна.** Если создать в среде звуковую волну частоты  $\Omega$ , то она приведет к гармоническому изменению плотности (следовательно, и показателя преломления) среды. Вследствие этого происходит модуляция амплитуды колебаний распространяющейся в среде световой волны  $E = A \cos(\omega t)$  на частоте  $\Omega$ . Тогда для вектора напряженности ЭМВ можно записать

$$E = A(a + \cos(\Omega t)) \cdot \cos(\omega t) = aA \cos \omega t + \frac{A}{2} (\cos(\omega - \Omega)t + \cos(\omega + \Omega)t), \quad (7.50)$$

то есть согласно разделу 5.8 спектр данного колебания вместо одной частоты  $\omega$  на входе в среду содержит три частоты — несмещенная компонента на частоте  $\omega$  и две смещенные (сателлитные) на частотах  $(\omega - \Omega)$  и  $\omega + \Omega$ . Входящая в формулу постоянная  $a$  определяется оптическими характеристиками среды, не зависящими от времени.

**2. Комбинационное рассеяние света** — Ч. Рамазан, Г. Ландсберг, Л. Мандельштам (1928). Известно, что для каждой молекулы наблюдается большой набор собственных частот колебаний  $\Omega_K$ , связанный с ее колебательными и вращательными движениями. Следовательно, оптические свойства молекулы изменяются по гармоническому закону с частотами, соответствующими частотам собственных колебаний молекулы. Это приводит к модуляции амплитуды вторичного излучения, вызванного проходящей в среде ЭМВ частоты  $\omega$ :

$$E = A(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t),$$

что в соответствии с разделом 5.7.5 означает, что в спектре рассеянного света будут содержаться несмещенная циклическая частота  $\omega$  и смещенные частоты  $\omega - \Omega_K$  и  $\omega + \Omega_K$  (рис. 7.27а, указаны шесть смещенных компонент).

В связи с тем, что для молекулы спектры частот являются полосатыми, наблюдается достаточно большое число смещенных компонент в спектре рассеянного света.

Отличие комбинационного рассеяния света от рассеяния Мандельштама–Бриллюэна состоит в том, что в данном случае в среде не нужно создавать

звуковую волну, оно связано с набором собственных частот колебаний  $\Omega_K$  молекул среды.

Комбинационное рассеяние света позволяет определить собственные частоты колебательного и вращательного движения молекул, это позволяет изучить их строение и динамику движения. Для каждой молекулы имеется свой, вполне определенный спектр комбинационного рассеяния света, это позволяет использовать его в методах распознавания конкретного типа молекул.

В отличие от других видов рассеяния света, которые достаточно хорошо объяснялись в рамках классической электронной теории, комбинационное рассеяние света находит количественное подтверждение только в рамках квантовой теории излучения.

Согласно представлениям квантовой теории процесс комбинационного рассеяния света состоит из двух связанных между собой актов — поглощения первичного фотона с энергией  $W_\phi = \hbar\omega$  и испускания фотона с энергией  $W_{\phi R} = \hbar(\omega \pm \Omega_K)$ , происходящих в результате взаимодействия молекулы с полем падающей световой волны.

Молекула, находящаяся в невозбужденном состоянии, под действием кванта с энергией  $\hbar\omega$  через промежуточное электронное состояние, испуская квант  $\hbar(\omega - \Omega_K)$ , переходит в состояние с колебательной энергией  $\hbar\Omega_K$  (см. рис. 7.27б). Если фотон  $W_\phi = \hbar\omega$  поглощается системой, в которой уже возбуждены колебания, то после рассеяния она может перейти в нулевое состояние (основной уровень), при этом энергия  $W_{\phi R} = \hbar(\omega + \Omega_K)$  рассеянного фотона превышает энергию поглощенного  $W_\phi = \hbar\omega$  (см. рис. 7.27в).

Интенсивность линий комбинационного рассеяния света является малой при обычных температурах. При возбуждении комбинационного рассеяния света лазерами большой мощности возникает вынужденное комбинационное рассеяние света, интенсивность которого того же порядка, что и интенсивность возбуждающего света.

#### 7.4.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА

Как известно, заряженная частица не излучает электромагнитных волн, если она движется с постоянной скоростью. Однако при значениях скорости частицы, превышающей скорость света в среде

$$v_{\text{частицы}} < v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} < c,$$

наблюдается излучение, открытое в 1934 г. П. Вавиловым и С. Черенковым.

Поясним, как возникает это излучение. Частица в каждый момент времени излучает электромагнитные волны (точнее, частица на своем пути возбуждает колебания электронов в атомах среды, и они становятся источниками волн), которые распространяются в среде, накладываются друг на друга и формируют результирующую волну. В момент времени  $t_1$  частица находится в точке  $A$  и излучает ЭМВ в направлении  $AB$  (рис. 7.28а), а в момент времени  $t$  ( $t > t_1$ ) частица находится в точке  $C$  ( $AC = v_{\text{частицы}}(t - t_1)$ ,  $AB = v(t - t_1)$ ). Фронт этой результирующей волны представляет собой конус, на вершине

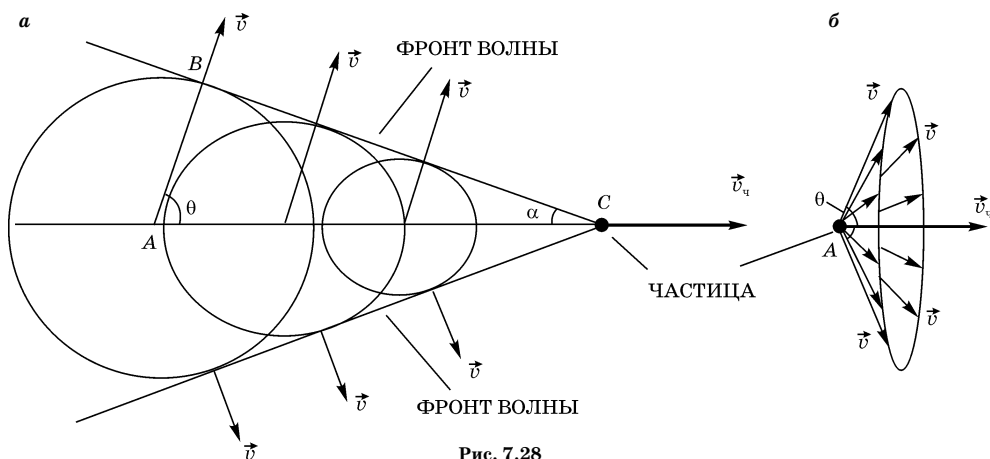


Рис. 7.28

которого находится частица (рис. 7.28а). Фронт волны движется со скоростью  $v$ . Угол  $\alpha$  при вершине конуса зависит от скорости движения частицы:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{v(t - t_1)}{v_{\text{частицы}}(t - t_1)} = \frac{v}{v_{\text{частицы}}} = \frac{c}{nv_{\text{частицы}}}. \quad (7.51)$$

Скорости  $v$  излучаемой частицей результирующей волны должна быть перпендикулярна к фронту волны. Это означает, что в каждый момент времени частица излучает волны, распространяющиеся вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы (на рис. 7.28б изображен конус, вдоль которого распространяется волна, испущенная частицей в момент времени  $t_1$ , в точке А; угол  $\theta$  между образующими конуса и скоростью частицы равен  $\theta = 90^\circ - \alpha$ ).

Из формулы (7.51) видно, что для скоростей частицы, меньших скорости света в данной среде ( $v_{\text{частицы}} < v$ ),  $\sin \alpha > 1$ . Это означает, что ЭМВ не возникает, то есть интерференция испущенных частицей когерентных волн приводит к их гашению.

Излучение Вавилова–Черенкова аналогично ударным звуковым волнам, возникающим при движении тел со скоростями, превышающими фазовые скорости упругих волн в данной среде (см. п. 6.2.5).

Излучение Вавилова–Черенкова широко используется в методах регистрации частиц большой энергии. Частицы, проходя вещество, вызывают появление световой вспышки, которая фотоумножителями превращается в импульс тока. Применяя среды с разными показателями преломления, можно регистрировать частицы разных энергий и оценивать их число и скорость движения.

#### \*7.4.5.

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В СРЕДЕ

**Генерация оптических гармоник.** Напряженность электрического поля ЭМВ от естественного источника света составляет порядка  $E \sim (10^2 \div 10^3)$  В/м, что существенно меньше напряженности внутриатомного электрического

поля ( $E_{\text{атома}} \sim (10^{10} \div 10^{11})$  В/м,  $E \ll E_{\text{атома}}$ ). Это означает, что световое поле ЭМВ не изменяет оптических характеристик среды, и поэтому диэлектрическая восприимчивость среды  $\chi$  остается постоянной величиной ( $\chi = \chi_0$ ), не зависящей от напряженности электрического поля ЭМВ. Вследствие этого при распространении в среде такой электромагнитной волны нелинейных эффектов не возникает.

Если же взять излучение лазера ( $E_{\text{лазера}} \sim (10^8 \div 10^{10})$  В/м), то тогда возникает необходимость учитывать зависимость диэлектрической восприимчивости от напряженности ЭМВ ( $E_{\text{лазера}} \leq E_{\text{атома}}$ ). Это вызывает изменение свойств вещества, среда становится нелинейной.

В этом случае зависимость вектора поляризации  $\vec{P}$  вещества от вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля ЭМВ становится нелинейной и ее можно представить в виде разложения в ряд по параметру ( $E_{\text{лазера}}/E_{\text{атома}}$ ), меньшему единице:

$$\chi(E) = \chi_0 + \chi_1 E + \chi_2 E^2 + \dots, \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (\chi_0 \vec{E} + \chi_1 \vec{E}^2 + \chi_2 \vec{E}^3 + \dots). \quad (7.52)$$

Коэффициенты  $\chi_1, \chi_2$  и т. д. называются нелинейными восприимчивостями, они по порядку величины являются обратными  $E_{\text{атома}}$  ( $\chi_1 \sim 1/E_{\text{атома}}, \chi_2 \sim 1/E_{\text{атома}}^2$  и т. д.).

Если на среду будет падать ЭМВ частоты  $\omega$  ( $E = A \cos(\omega t - kx)$ ), то тогда формулу (7.52) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 (\chi_0 A \cos(t - kx) + \chi_1 A^2 \cos^2(\omega t - kx) + A^3 \cos^3(\omega t - kx) + \dots) = \\ &= \varepsilon_0 \chi_0 A \cos(\omega t - kx) + \varepsilon_0 \chi_1 A^2 \frac{1}{2} [\cos 2(\omega t - kx) + 1] + \\ &+ \varepsilon_0 \chi_2 A^3 \frac{1}{4} [\cos 3(\omega t - kx) + 3 \cos(\omega t - kx)] + \dots \end{aligned} \quad (7.53)$$

Электромагнитная волна частоты  $\omega$ , распространяясь в среде, поляризует ее; эта поляризация распространяется в среде в виде волны поляризованности. Как видно из выражения (7.53), эта волна поляризованности содержит частоты  $\omega, 2\omega, 3\omega$  и т. д. Это означает, что вторичные ЭМВ, испускаемые волной поляризованности, также будут содержать частоты  $\omega, 2\omega, 3\omega$  и т. д. В этом случае происходит генерация оптических гармоник — электромагнитных волн на частотах  $2\omega, 3\omega$  и т. д.

Для получения оптических гармоник достаточной интенсивности необходимо обеспечить условия эффективной перекачки энергии первичной волны на частоте  $\omega$  в энергию гармоник. Это возможно при выполнении так называемых **условий пространственного синхронизма**, которые означают одинаковую фазовую скорость распространения волн (например для гармоники на частоте  $2\omega$  необходимо, чтобы показатели преломления среды на частотах  $\omega$  и  $2\omega$  совпадали:  $n(\omega) = n(2\omega)$ ).

Рассмотрим, как объясняет возникновение второй гармоники квантовая теория излучения, согласно которой ЭМВ представляет собой поток фотонов. При большой плотности светового потока возможны процессы слияния двух

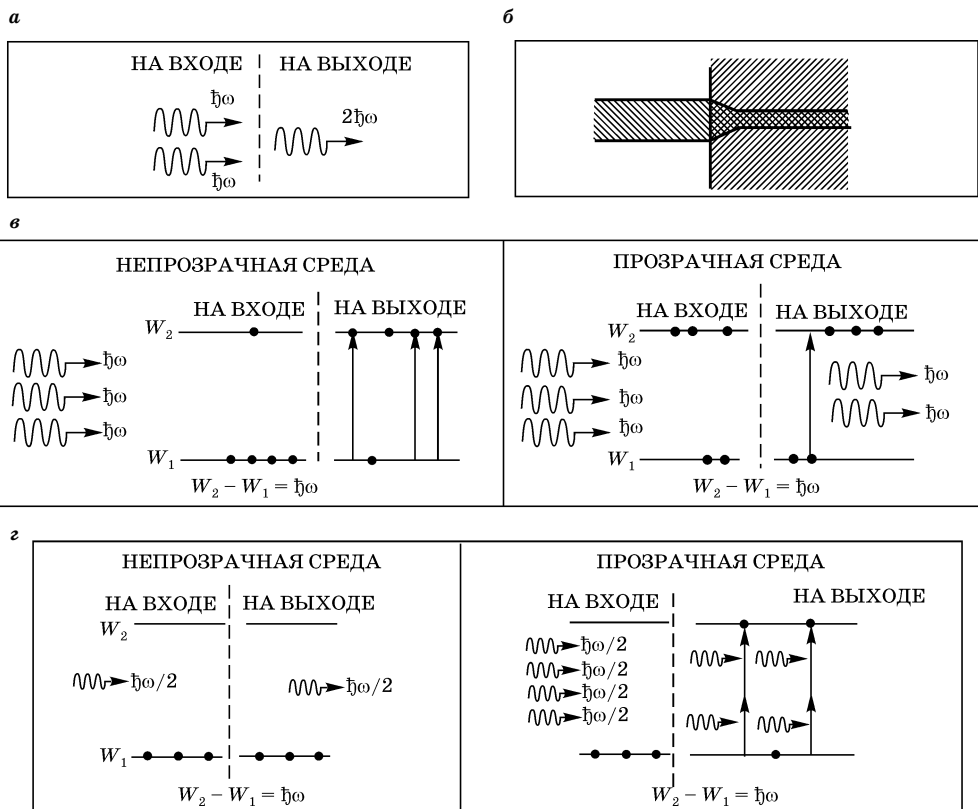


Рис. 7.29

фотонов в один (рис. 7.29а). При этом процессе должны выполняться законы сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega + \hbar\omega = 2\hbar\omega, \quad \vec{p}_{\Phi 1} + \vec{p}_{\Phi 2} = \vec{p}_{\Phi}. \quad (7.54)$$

Закон сохранения импульса и представляет собой условие, которое в общем случае называют условием векторного синхронизма. Оно в случае генерации второй гармоники сводится к условию  $n(\omega) = n(2\omega)$ .

Аналогичным образом объясняются случаи генерации высших гармоник (они протекают с участием большего числа фотонов).

#### Генерация электромагнитной волной суммарных и разностных частот.

Если на среду падают две световые волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то тогда в соответствии с формулой (7.54) наряду с гармониками каждой из волн ( $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  и т. д.) возникают волны с комбинациями частот ( $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$  и т. д.).

Для повышения интенсивности ЭМВ с комбинациями частот необходимо также выполнение условий (7.54). Причем направление распространения этих волн может не совпадать с направлением распространения первоначальных ЭМВ. С квантовой точки зрения этот процесс сводится также к слиянию фотонов при большой мощности первичных ЭМВ.

**Параметрическое усиление света.** Пусть в среде распространяются три волны с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega$ , причем интенсивность волны с частотой  $\omega$  существенно больше интенсивности двух других волн. При выполнении законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = 2\hbar\omega, \quad \vec{p}_{\omega_1} + \vec{p}_{\omega_2} = \vec{p}_{\omega} \quad (7.55)$$

происходит перекачка энергии от волны частоты  $\omega$  к волнам с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Это явление называют параметрическим усилением света (одна волна большой интенсивности моделирует оптические свойства среды, что приводит к увеличению интенсивности двух других волн).

В параметрических генераторах света, которые используют это явление, необходима только одна волна частоты  $\omega$ . При выполнении условий (7.54) происходит генерация двух ЭМВ с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Сами частоты  $\omega_1$ , и  $\omega_2$  определяются параметрами нелинейной среды, которые можно плавно изменять за счет изменения, например, температуры, внешнего электрического поля и т. д. Следовательно, в параметрических генераторах света возможна плавная перестройка частоты генерируемого света.

**Самофокусировка света.** Нелинейный отклик колебаний электронов в атомах на сильное световое поле является наиболее универсальной причиной нелинейных оптических эффектов. Однако существуют и другие причины, связанные, например, с нагревом среды лазерным излучением. Это приводит к изменению показателя преломления среды, что сопровождается самофокусировкой света. Она происходит тогда, когда область среды, занятая пучком, обладает большей оптической плотностью (большим показателем преломления). Поэтому периферийные лучи пучка света отклоняются к его центру, и линейные размеры поперечного сечения пучка света будут уменьшаться (см. рис. 7.29б). Если же среда в области пучка обладает меньшей оптической плотностью, то происходит дефокусировка света, то есть мощный лазерный пучок расходится быстрее, чем пучок малой интенсивности.

**Генерация звуковых волн.** В сильном световом поле  $\vec{E}$  лазера за счет явления электрострикции (это явления сжатия вещества в световом поле  $\vec{E}$ , электрострикционное давление пропорционально  $E^2$ ) изменяется плотность среды, что приводит к генерации звуковых волн.

**Изменение прозрачности среды.** Если на среду падает слабое по интенсивности излучение частоты  $\omega$ , которая соответствует переходу электрона между уровнями энергии  $W_1$  и  $W_2$  ( $W_2 - W_1 = \hbar\omega$ ) атомов среды, то тогда происходит интенсивное поглощение излучения, то есть среда является непрозрачной (см. рис. 7.29в). При большой интенсивности излучения происходит переход большого числа атомов на верхний уровень энергии  $W_2$ , поглощающая способность среды ослабевает и она становится прозрачной для излучения частоты  $\omega$  (см. рис. 7.29в).

Если на такую среду будет падать слабое по интенсивности излучение частоты  $\omega/2$ , то его поглощения не будет, среда будет прозрачной для такого излучения. Действительно, электрону некуда перейти при поглощении этого фотона. В случае же такого излучения, но большой интенсивности, возможно протекание процессов поглощения с одновременным участием двух



фотонов и поэтому происходит интенсивное поглощение проходящего среды излучения (см. рис. 7.29г), среда становится непрозрачной для такого излучения с частотой  $\omega/2$ .

**Электронно-оптический эффект.** Он заключается в появлении двойного лучепреломления или, если оно уже существует, в его изменении при создании в среде однородного электрического поля и объясняется тем, что сильное электрическое поле приводит к изменению оптических свойств среды, к зависимости показателя преломления среды от напряженности внешнего электрического поля.

Различают линейный и квадратичный электронно-оптический эффекты. Для линейного эффекта — его называют **эффектом Поггеля** — наблюдается изменение показателя преломления среды, пропорциональное первой степени напряженности электрического поля:  $\chi(E) = \chi_0 + \chi_1 E \Rightarrow \Delta n \sim E$ , а для квадратичного эффекта, который называют **эффектом Керра**, —  $\chi(E) = \chi_0 + \chi_2 E^2 \Rightarrow \Delta n \sim E^2$ .

**Вынужденное рассеяние света.** При возбуждении рассеяния света лазерами большой мощности возникает вынужденное комбинационное рассеяние света, вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, вынужденное рэлеевское рассеяние. Их механизм возникновения был описан ранее, но при большой мощности падающего излучения интенсивность рассеянного света будет того же порядка, что и интенсивность возбуждающего света.

Несмотря на успехи электромагнитной теории света, выяснилось, что она не объясняет процессы поглощения и испускания света (считалось, что свет испускается и поглощается атомами непрерывно). Так, например, применение классической электродинамики к равновесному тепловому излучению абсолютно черного тела, к анализу его распределения по длинам волн привело к нарушению закона сохранения энергии, к ультрафиолетовой катастрофе. М. Планк (1900) для решения этой проблемы предположил, что атомы излучают электромагнитные волны не непрерывно, а отдельными порциями энергии — квантами. Развитие идеи Планка, противоречащей классическим представлениям, не только разрешило проблемы теплового излучения, но и заложило основы всей современной квантовой физики. Эйнштейн (1905) предположил, что распространение и поглощение электромагнитного излучения происходит также в виде отдельных порций энергии — фотонов. Это позволило Эйнштейну объяснить основные законы фотоэффекта, впервые исследованные А. Г. Столетовым в 1888–1890 гг., и дать ясную трактовку фотохимических превращений.

Представление электромагнитного излучения в виде потока фотонов дает наглядное истолкование существованию коротковолновой границы в тормозном излучении электронов (максимальная энергия фотона равна энергии электрона), эффекту Комптона (1923), комбинационному рассеянию света (1928) и огромному числу других явлений взаимодействия света с веществом.

В настоящее время задачей квантовой оптики является изучение микроструктуры световых полей (световое поле — сложный физический объект, состояние которого определяется бесконечным числом параметров) и оптических явлений, в которых проявляется квантовая природа света. Успехи лазерной физики (появление квантовых генераторов и квантовых усилителей) и совершенствование техники регистрации слабых световых потоков способствуют решению этих задач.

В разделе «Волновая оптика» было наглядно показано, что свет обладает волновыми свойствами. Однако данные свойства являются проявлением только одной стороны электромагнитного излучения. В этом разделе рассматривается другая, корпускулярная сторона электромагнитного излучения и подтверждающие ее опытные факты и явления.

## 8.1. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### 8.1.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ, ВВОДИМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ЗАКОН КИРХГОФА

Под тепловым излучением понимают излучение электромагнитных волн телами за счет их внутренней энергии, то есть за счет теплового движения молекул и атомов. Такое излучение присуще всем телам, так как тепловое движение существует при всех температурах выше абсолютного нуля.

Тепловое излучение уже рассматривалось в волновой оптике как излучение естественного источника света (см. 7.1.1). Поэтому можно отметить следующие его свойства — оно является немонахроматичным (присутствуют всевозможные частоты в спектре излучения) и неполяризованным.

Кроме того, в отличие от других видов излучения, **тепловое излучение является равновесным**, то есть может находиться в равновесии с излучающим телом. Это связано с тем, что интенсивность теплового излучения  $I$  зависит от температуры излучающего тела ( $I = I(T)$ ), и поэтому любые отклонения от равновесного состояния между излучающим телом и излучением приводят к тому, что положение равновесия восстанавливается.

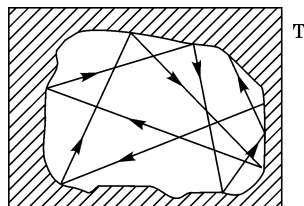


Рис. 8.1

Действительно, пусть внутри тела имеется полость (рис. 8.1), заполненная тепловым излучением. Если, например, температура тела внезапно увеличится, то тогда интенсивность излучения станет больше, что приведет к уменьшению внутренней энергии тела  $U$ , которая пропорциональна температуре ( $U = U(T)$ ). Следовательно, температура тела станет меньше, интенсивность излучения понизится и снова наступит равновесие между телом и излучением в полости:  $\uparrow T \Rightarrow \uparrow I \Rightarrow \downarrow U \Rightarrow \downarrow T$ .

Равновесность теплового излучения позволяет изучать его закономерно-сти с помощью законов равновесной термодинамики. Так, законы теплового излучения были установлены применением к этому излучению термодинамического подхода, в котором не рассматривается внутреннее строение систем, а выводы о поведении систем делаются на основе трех законов (начал) термодинамики (см. раздел 12).

Для описания теплового излучения вводятся такие понятия, как **энергетическая светимость  $R_T$**  и **спектральная плотность энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$**  (испускательная способность):

$$R_T = \frac{dW}{dSdt}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{dR}{d\lambda}, \quad (8.1 \text{ а})$$

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda. \quad (8.1 \text{ б})$$

Как видно из формулы (8.1 а),  $R_T$  представляет собой энергию, излучаемую с единицы поверхности тела в единицу времени во всем интервале длин волн (или частот).

Спектральная плотность энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$  представляет собой энергию, излучаемую с единицы поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длин волн.  $R_T$  и  $r_{\lambda,T}$  связаны между собой формулой (8.1 б).

В теоретических и экспериментальных исследованиях наряду со спектральной плотностью энергетической светимости, выраженной через длину волны  $r_{\lambda,T}$ , применяется характеристика, зависящая от частоты излучения  $\nu$ :

$$r_{\nu,T} = \frac{dR}{d\nu}. \quad (8.2)$$

Формула связи между ними запишется таким образом:

$$r_{\nu,T} = \frac{dR}{d\nu} = \frac{dR}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\nu} = -r_{\lambda,T} \frac{d(c/\nu)}{d\nu} = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T} \Rightarrow r_{\nu,T} = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T}. \quad (8.3)$$

При выводе формулы (8.3) было учтено, что для приращения  $d\nu > 0$  приращение  $d\lambda$  будет меньше нуля ( $d\lambda < 0$ ).

Для описания способности тел поглощать электромагнитное излучение вводят **монохроматический коэффициент поглощения (поглощательную способность)**

$$a_{\lambda,T} = \frac{dW_{\text{погл.}}}{dW_{\text{пад}}}. \quad (8.4)$$

Он показывает, какая часть энергии  $dW_{\text{пад}}$  падающего излучения с длинами волн в пределах от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  поглощается телом.

Как следует из формул (8.1 а) и (8.2), энергетическая светимость и испускательная способность являются размерными величинами ( $[R_T] = \text{Вт/м}^2$ ),  $[r_{\lambda,T}] = \text{Вт/м}^3$ ,  $[r_{\nu,T}] = \text{Вт} \cdot \text{с/м}^2$ ), а поглощательная способность — безразмерной величиной. Они зависят от температуры тела ( $R_T$ ) и от длины волны (частоты) излучаемого (поглощаемого) теплового излучения ( $r_{\lambda,T}$  и  $a_{\lambda,T}$ ).

По способности поглощать электромагнитное излучение рассматривают два идеальных тела:

**абсолютно черное тело (а. ч. т.)** — тело, которое во всем интервале длин волн поглощает полностью падающее на него излучение ( $a_{\lambda,T} = 1$ );

**абсолютно серое тело (а. с. т.)** — тело, для которого поглощательная способность во всем интервале длин волн является постоянной величиной, меньшей единицы ( $a_{\lambda,T} = \text{const} < 1$ ).

Поглощательная и испускательная способности любого тела связаны между собой **законом Кирхгофа**, который был установлен в 1859 г. на основе применения законов термодинамики к тепловому излучению. Этот закон относится только к равновесному тепловому излучению.

Согласно закону Кирхгофа *отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и является универсальной функцией температуры тела и длины волны, которую называют универсальной функцией Кирхгофа, или испускательной способностью абсолютно черного тела:*

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_2 = \dots = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_{\text{а.ч.т.}} = (r_{\lambda,T})_{\text{а.ч.т.}} = r_{\lambda,T}^0, \quad (8.5)$$

где  $r_{\lambda,T}^0$  — испускательная способность абсолютно черного тела.

Из закона Кирхгофа вытекают следующие выводы:

- 1) если на каком-то интервале длин волн тело сильно излучает, то на этом интервале длин волн оно и сильно поглощает. Действительно, если  $(r_{\lambda,T})_1 > (r_{\lambda,T})_2$ , то тогда из закона Кирхгофа (8.5) следует, что  $(a_{\lambda,T})_1 = (a_{\lambda,T})_2 (r_{\lambda,T})_1 / (r_{\lambda,T})_2 > (a_{\lambda,T})_2$ ;
- 2) наиболее сильно при данной температуре во всем интервале длин волн излучает абсолютно черное тело; действительно, из закона Кирхгофа (8.5) получим:  $r_{\lambda,T}^0 = (r_{\lambda,T} / a_{\lambda,T}) \geq (r_{\lambda,T})$ , так как  $(a_{\lambda,T}) \leq 1$ ;
- 3) для установления законов теплового излучения необходимо экспериментальное и теоретическое исследование испускательной способности абсолютно черного тела.

### 8.1.2. МОДЕЛЬ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Итак, для экспериментального исследования испускательной способности абсолютно черного тела необходимо его смоделировать. На первый взгляд это оказывается достаточно сложным, так как любое реальное тело не может иметь поглощательную способность, равную единице, во всем интервале длин волн. Даже для черного бархата поглощательная способность отклоняется от единицы за пределами видимого диапазона излучения.

Однако выяснилось, что моделью абсолютно черного тела может считаться полость внутри тела, которая имеет малое входное отверстие (рис. 8.2).

Действительно, все излучение, попадающее в эту полость, практически не выходит наружу. Это связано с тем, что при многократных отражениях от стенок полости энергия падающего излучения практически полностью поглощается. Следовательно, поглощательная способность такой полости во всем интервале длин волн будет равна единице, и тогда выходящее из полости тепловое излучение и представляет собой излучение а. ч. т. Температура этого излучения будет равна температуре тела, внутри которого находится полость.

Такое излучение можно изучить с помощью спектральных приборов (например дифракционной решетки, см. п. 7.3.4) и построить график

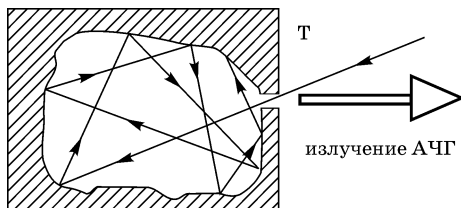


Рис. 8.2

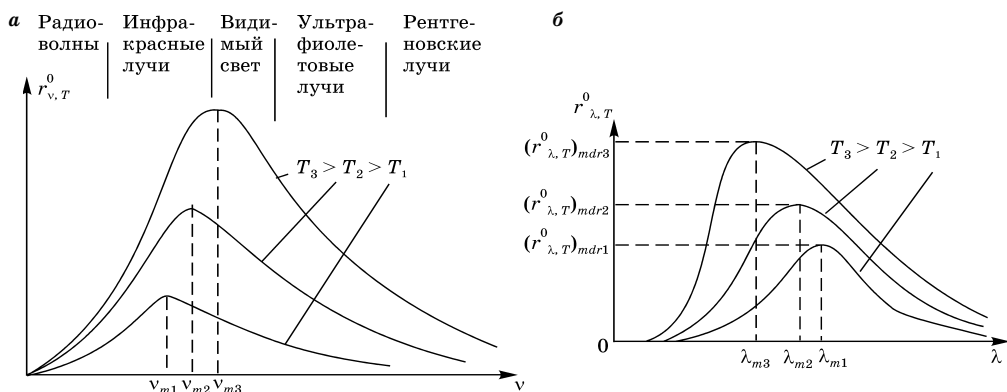


Рис. 8.3

зависимости испускательной способности  $r_{\lambda, T}^0$  абсолютно черного тела от длины волны  $\lambda$ . Как видно из рис. 8.3б, график имеет максимум, зависящий от температуры тела; кривая  $r_{\lambda, T}^0$  плавно спадает в области больших длин волн и практически равна нулю в области рентгеновского излучения. С повышением температуры интенсивность излучения возрастает, максимум  $r_{\lambda, T}^0$  увеличивается и смещается в область малых длин волн.

Полученные экспериментально графики для испускательной способности а. ч. т. при разных температурах излучающего тела позволили сформулировать опытные законы теплового излучения. Перечислим их.

**1. Закон Стефана–Больцмана.** Можно экспериментально показать, что площадь под графиком испускательной способности  $r_{\lambda, T}^0$  абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его температуры. Если учесть, что площадь под графиком а. ч. т. определяется энергетической светимостью тела  $R_T$ , то тогда можно сформулировать закон Стефана–Больцмана: *энергетическая светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его температуры*:

$$R_T = \sigma T^4. \quad (8.6)$$

Входящая в формулу (8.6) величина  $\sigma$  получила название *постоянной Стефана–Больцмана*:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ . Отметим, что этот закон был открыт экспериментально Стефаном (1879) и теоретически доказан Л. Больцманом (1884) на основе законов термодинамики.

**2. Закон смещения Вина** позволяет найти смещение длины волны  $\lambda_{\text{max}}$ , соответствующей максимуму испускательной способности абсолютно черного тела при известной его температуре. Вин (1893) с помощью законов термодинамики и электродинамики доказал теоретически, что *длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре абсолютно черного тела*

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}, \quad (8.7)$$

где *постоянная Вина*  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Этот закон был подтвержден затем экспериментально.

Законы теплового излучения абсолютно черного тела, полученные экспериментально, а также с помощью термодинамического подхода, поставили задачу теоретического объяснения этих законов и вывода формулы, которая дает совпадение с экспериментальной испускательной способностью абсолютно черного тела во всем интервале длин волн. Попытка решения этой задачи в рамках классической физики с помощью статистического подхода была предпринята Рэлеем и Джинсом.

### 8.1.3. ФОРМУЛА РЭЛЕЯ–ДЖИНСА. УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ КАТАСТРОФА. ФОРМУЛА ПЛАНКА

**Формула Рэлея–Джинса.** Расчет испускательной способности абсолютно черного тела в рамках классической физики был проведен Рэлеем и Джинсом. Они рассматривали равновесное излучение черного тела в закрытой полости (см. рис. 8.1). Предполагалось, что атомы стенок полости излучают как совокупность линейных гармонических осцилляторов (электрических диполей) со всевозможными частотами. Исходя из этого предположения, была получена формула для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle, \quad r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \langle \varepsilon \rangle, \quad (8.8)$$

где  $\langle \varepsilon \rangle$  — средняя энергия осциллятора.

Затем, предполагая, что атомы излучают волны непрерывно, Рэлей и Джинс предложили для средней энергии одного осциллятора  $\langle \varepsilon \rangle$  следующую формулу:

$$\langle \varepsilon \rangle = kT, \quad (8.9)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура излучающего тела.

Эта формула является следствием *принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы* (см. раздел 12): на каждую степень свободы любого движения приходится энергия  $\langle \varepsilon \rangle = kT/2$ . Отметим, что колебательное

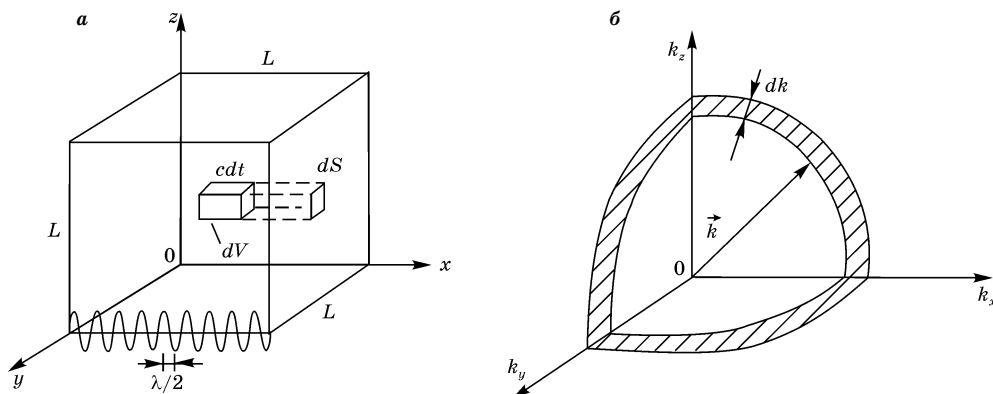


Рис. 8.4

движение осцилляторов включает в себя кинетическую и потенциальную энергии, на каждую из которых приходится энергия теплового движения  $kT/2$ .

В итоге была получена формула (она записана как для частот, так и для длин волн теплового излучения), названная *формулой Рэлея–Джинса*:

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT. \quad (8.10)$$

При выводе формулы полость внутри тела можно взять в виде куба с ребром  $L$  (см. рис. 8.4а). В такой полости возникают стоячие волны, для которых вдоль ребер куба по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  должно укладываться целое число полуволн, так как узлы стоячих волн будут находиться в вершинах куба (аналог стоячих волн, возникающих в струне, см. 6.1.4)

$$L = L_X = \frac{\lambda}{2} n_1 = \frac{\pi}{k_X} n_1, \quad L_Y = \frac{\pi}{k_Y} n_2, \quad L_Z = \frac{\pi}{k_Z} n_3; \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $k_X, k_Y, k_Z$  — проекции волнового вектора, соответствующего стоячей волне на оси  $Ox, Oy, Oz$ .

В пространстве волновых векторов (см. рис. 8.4б) на одну стоячую волну приходится объем:

$$\Delta k_X \Delta k_Y \Delta k_Z = \left( \frac{\pi}{L} \Delta n \right)^3 = \left( \frac{\pi}{L} \right)^3.$$

Найдем число стоячих волн, заключенных в интервале модулей волновых векторов от  $k$  до  $k + dk$ . В пространстве волновых векторов этот интервал представляет собой шаровой слой толщиной  $dk$  (рис. 8.4б). Разделим объем шарового слоя на объем, приходящийся на одну стоячую волну:

$$dN = \frac{4\pi k^2 \Delta k}{(\pi/L)^3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = L^3 \frac{(2\pi)^3 v^2 \Delta v}{\pi^2 c^3} = 8\pi V \frac{v^2 dv}{c^3},$$

где учтено, что  $k = 2\pi\nu/c$ ;  $V = L^3$  — объем полости.

Из-за небольшого изменения частоты можно заменить  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ ; одной стоячей волне соответствуют две волны с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний вектора  $\vec{E}$ , и поэтому в формуле появляется коэффициент 2. Коэффициент  $1/8$  в формуле связан с тем, что выбирается часть шарового слоя для положительных значений  $k$ .

Объемная плотность излучения в полости, соответствующая частоте  $\nu$ , составит:

$$w = \frac{dN}{V d\nu} \langle \epsilon \rangle = 8\pi \frac{v^2}{c^3} \langle \epsilon \rangle. \quad (8.11)$$

Испускательная способность абсолютно черного тела и объемная плотность излучения в полости связаны следующим выражением:

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{c}{4} w(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \epsilon \rangle, \quad (8.12)$$

что и подтверждает формулу (8.8).

Приведем аргументы, показывающие справедливость формулы (8.12). Тепловое равновесное излучение является изотропным, то есть распростра-



няется по всем направлениям одинаково. Если бы излучение распространялось только по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , то тогда в положительном направлении оси  $Ox$  распространялась бы только  $1/6$  часть излучения, находящегося в полости. Поэтому за время  $dt$  элементарная площадка  $dS$  поверхности куба (см. рис. 8.4а) поглощала бы  $1/6$  часть энергии, заключенную в объеме полости, равную  $dV = dSdl = dS(cdt)$ , в интервале частот  $(\nu, \nu + d\nu)$ , то есть поглощала бы энергию  $dW_{\text{полгл}} = wdS(cdt)d\nu/6$ .

Как показывают расчеты, учет других направлений распространения теплового излучения приводит к тому, что в формулу для  $dW_{\text{полгл}}$  должен входить коэффициент  $1/4$ , то есть  $dW_{\text{полгл}} = wdS(cdt)d\nu/4$ . Из закона сохранения энергии следует, что такую же энергию  $dW_{\text{изл}} = r_{\lambda,T}^0 S dtd\nu$  эта площадка поверхности а. ч. т. излучает:

$$dW_{\text{изл}} = r_{\lambda,T}^0 dS dtd\nu = dW_{\text{полгл}} = wdSc dtd\nu/4 \Rightarrow r_{\lambda,T}^0 = \frac{c}{4} w(\nu, T),$$

что и требовалось показать.

**Ультрафиолетовая катастрофа.** Сопоставление графика испускательной способности абсолютно черного тела, построенного по формуле Рэлея–Джинса (8.10), с экспериментальной кривой (рис. 8.5а) свидетельствует о том, что наблюдается согласие в области длинноволнового излучения и резкое расхождение в области ультрафиолетового и рентгеновского излучений (см. рис. 8.4а).

Причем расчет энергетической светимости абсолютно черного тела по формуле Рэлея–Джинса приводит к бесконечно большой энергии излучения, то есть нарушается закон сохранения энергии:

$$(R_T)_{\text{Р-Д}} = \int_0^\infty (r_{\lambda,A})_{\text{Р-Д}} d\lambda = 2\pi ckT \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \infty.$$

Итак, классическая физика не смогла объяснить зависимости от длины волны спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела во всем интервале длин волн. Сложившееся на этот момент временное состояние в классической физике, когда для теплового излучения наблюдалось резкое расхождение между теоретическим и экспериментальным

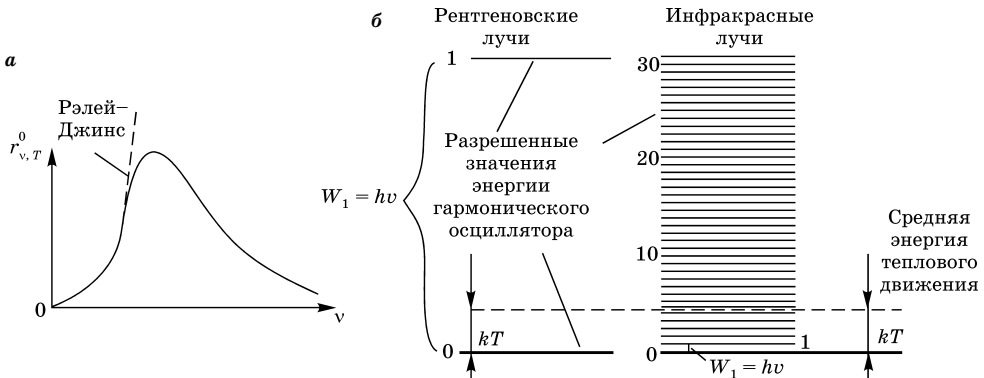


Рис. 8.5

значениями  $r_{\nu,T}^0$  в ультрафиолетовой области и нарушался закон сохранения энергии, получило название *ультрафиолетовой катастрофы*.

**Формула Планка.** Впервые правильная формула для испускательной способности абсолютно черного тела была получена Планком. Им было высказано чуждое классической физике предположение о том, что атомы излучают электромагнитные волны не непрерывно, а отдельными порциями энергии (квантами). Это означает, что энергии осцилляторов квантуются, то есть принимают дискретный набор значений (см. рис. 8.5б):

$$W_n = nW_1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8.13)$$

где  $W_1$  — минимальная энергия осциллятора, называемая также квантом энергии.

Для определения средней энергии осциллятора  $\langle \varepsilon \rangle$  Планк использовал распределение Больцмана:

$$N_n = A \exp(-W_n/kT) = A \exp(-nx), \quad x = W_1/kT,$$

что позволило получить совершенно новый результат для средней энергии гармонического осциллятора. Приведем вывод этой формулы.

Так, для  $\langle \varepsilon \rangle$  можно записать:

$$\langle \varepsilon \rangle = W_1 \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-nx) / \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx).$$

Данное выражение можно представить в следующем виде:

$$\langle \varepsilon \rangle = W_1 \frac{d}{dx} \left( \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right) \right).$$

Если учесть, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = 1/(1 - \exp(-x)),$$

то тогда для средней энергии осциллятора  $\langle \varepsilon \rangle$  получим:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{W_1}{\exp(x) - 1} = \frac{W_1}{\exp(W_1/kT) - 1}. \quad (8.14)$$

Согласно Планку, энергия кванта  $W_1$  электромагнитной волны с частотой  $\nu$  (энергия фотона) определяется формулой

$$W_1 = W_{\Phi} = h\nu = \hbar\omega = h \frac{c}{\lambda}, \quad (8.15)$$

которая была получена из условия совпадения во всем интервале волн расчетной и экспериментальной испускательной способности абсолютно черного тела.

Входящая в формулу (8.15) величина  $h$  получила название постоянной Планка,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж · с, для другой часто используемой постоянной Планка  $\hbar = h/(2\pi)$  значение  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

В итоге Планком была записана следующая формула для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{hc/\lambda}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}, \quad r_{\nu,T}^0 = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (8.16)$$

Полученное выражение для  $r_{\lambda,T}^0$  полностью описывает зависимость спектральной плотности энергетической светимости а. ч. т. от длины волны во всем интервале длин волн. Из нее также вытекают законы Стефана–Больцмана и Вина.

В области длинноволнового излучения, когда можно пренебречь квантованием энергии (дискретностью энергии) осциллятора по сравнению с энергией теплового движения атомов, формула (8.16) приводит к формуле Рэлея–Джинса (8.10):

$$hc/\lambda kT \ll 1 \Rightarrow \exp(hc/\lambda kT) - 1 \approx hc/\lambda kT + 1 - 1 = hc/\lambda kT.$$

Формула (8.16) позволяет также получить точные выражения для постоянной Стефана–Больцмана  $\sigma$  и постоянной Вина  $b$ , входящих в опытные законы теплового излучения:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 h^3 c^2}, \quad b = \frac{hc}{4,965k}. \quad (8.17)$$

Выражение (8.14) позволяет установить, что максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости а. ч. т. прямо пропорционально пятой степени его абсолютной температуры:

$$(r_{\lambda,T}^0)_{\max} = c'T^5, \quad (8.18)$$

где

$$c' = \frac{2\pi k^5}{c^3 h^4} \cdot \frac{(4,9651)^5}{\exp(4,9851) - 1} = 1,28 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}. \quad (8.19)$$

Забегая вперед, можно сказать, что предположение Планка об излучении атомами квантов энергии означает, что энергия самих атомов также принимает только дискретный набор значений, то есть свидетельствует о дискретном характере энергетических уровней. При переходе между ними и происходит излучение квантов энергии.

В заключение этого раздела ответим на вопрос: почему спектральная плотность энергетической светимости в области рентгеновских лучей уменьшается до нуля? Ответ вытекает из различия в энергиях квантов электромагнитного излучения в разных диапазонах длин волн.

Для того чтобы испустить квант энергии рентгеновского излучения, необходимо возбудить осциллятор, то есть перевести его хотя бы на уровень энергии с номером  $n$ , равным единице ( $n = 1$ , рис. 8.5б). Это практически невозможно осуществить за счет энергии теплового движения атомов вследствие большого различия энергии кванта рентгеновского излучения и средней энергии теплового движения атомов:  $h\nu \gg kT$ . Поэтому такие кванты энергии излучаются достаточно редко.

Действительно, для температуры  $T = 300 \text{ К}$  средняя энергия теплового движения  $kT$  составляет  $0,025 \text{ эВ}$ , а первый возбужденный уровень энергии для рентгеновского излучения длины волны  $\lambda = 0,1 \text{ нм}$  отстоит от основного уровня энергии на расстояние

$$\Delta W = hc/\lambda = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8) / 1 \cdot 10^{-10} = 19,89 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = 1,243 \cdot 10^4 \text{ эВ},$$

что превышает энергию теплового движения примерно в  $\Delta W/kT = 500\,000$  раз.

Для диапазона инфракрасного излучения ( $770 \text{ нм} \leq \lambda \leq 0,5 \text{ мм}$ ) при комнатной температуре отношение  $\Delta W/kT = 64 \div 0,1$  приводит к большей интенсивности излучения для этих длин волн (см. рис. 8.5б).

#### 8.1.4. ОПТИЧЕСКАЯ ПИРОМЕТРИЯ

Под оптической пирометрией понимают совокупность оптических (бесконтактных) методов измерения температуры тел. Они основаны на измерении интенсивности теплового излучения тел, которая существенно зависит от температуры. Так, согласно формуле (8.18) максимальное значение испускательной способности абсолютно черного тела при понижении температуры от 1000 К до 300 К уменьшается достаточно резко, примерно в 400 раз. Поэтому эти методы главным образом применяют при температурах, превышающих 1200 К, а для температур 3000 К и выше они являются практически единственными.

Основное условие применения методов пирометрии заключается в том, чтобы излучение тела было чисто тепловым, то есть подчинялось закону Кирхгофа (формула (8.5)). Твердые тела и жидкости при высоких температурах обычно удовлетворяют этому требованию. В случае же газов и плазмы необходима специальная проверка этого условия.

Приборы, измеряющие оптический диапазон теплового излучения, называют **пирометрами**.

Широкое распространение нашли **яркостные пирометры**, обеспечивающие наибольшую точность измерений температуры в диапазоне  $10^3 \div 10^4 \text{ К}$ . При этом с помощью светофильтра выделяют узкий диапазон длин волн вблизи длины волны  $\lambda = 650 \text{ нм}$ . Изменяя силу тока, проходящего через нить лампы, добиваются совпадения яркости нити и излучающего тела, при этом изображение нити исчезает (метод исчезающей нити). Предварительная градуировка прибора (каждому значению силы тока ставится в соответствие своя температура) позволяет сразу определять яркостную температуру тела  $T_b$ . Истинная температура тела рассчитывается с помощью формулы, полученной на основе закона Кирхгофа и формулы Планка.

**Цветовые пирометры** применяются для тел, у которых поглощательная способность постоянна в оптическом диапазоне излучения. Это позволяет, измеряя отношения яркостей двух длин волн оптического диапазона (обычно берут волны в синей и красной областях спектра), находить цветовую температуру тела  $T_c$ , по которой и определяют истинную температуру тела.

Наиболее чувствительными (но и наименее точными) являются **радиационные пирометры**, или пирометры суммарного излучения, регистрирующие полное излучение тела. Действие их основано на применении законов Стефана–Больцмана и Кирхгофа. В этих приборах с помощью линзы фокусируют наблюдаемое излучение на приемник (термостолбик, электрический ток которого определяется разностью температур холодного и горячего спая). Сигнал от него регистрируется прибором, который градуирован по излучению абсолютно черного тела. Этот прибор показывает радиационную температу-

ру тела  $T_r$ . В соответствии с законом Стефана–Больцмана истинная температура тела определяется по формуле

$$T = \alpha^{1/4} \cdot T_r,$$

где  $\alpha$  — полный коэффициент поглощения тела.

Радиационные пирометры можно применять для измерения температуры, начиная от значений  $200^\circ\text{C}$ ; они широко применяются для контроля и управления температурными режимами разнообразных технологических процессов.

## 8.2. ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ. ЗАКОНЫ ФОТОЭФФЕКТА И ИХ ОБЪЯСНЕНИЕ

Объяснение опытных законов фотоэффекта приводит к выводу о том, что электромагнитное излучение не только испускается атомами в виде отдельных порций энергии, но также распространяется и поглощается отдельными порциями энергии, называемыми фотонами. Рассмотрим, как был сделан этот вывод.

**Вольт-амперная характеристика, ее основные закономерности.** Внешним фотоэффектом называют явление выбивания электронов из металла под действием падающего излучения. Основные законы фотоэффекта были изучены на установке, схема которой приведена на рис. 8.6а.

Внутри вакуумной трубки (баллона) находятся два электрода — анод и катод, между которыми прикладывается напряжение  $U$ . На катод через кварцевое окно падает монохроматическое электромагнитное излучение, оно выбивает из металла электроны, они летят на анод, цепь замыкается, в цепи возникает электрический ток. Напряжение между анодом и катодом измеряется вольтметром, а сила тока — амперметром.

На этой установке снимаются вольт-амперные характеристики при разных условиях проведения опытов — разные интенсивности и частоты падающего света, различные металлы, из которых изготавливается катод. Для примера одна из вольт-амперных характеристик приведена на рис. 8.6в. Обсудим ее основные особенности.

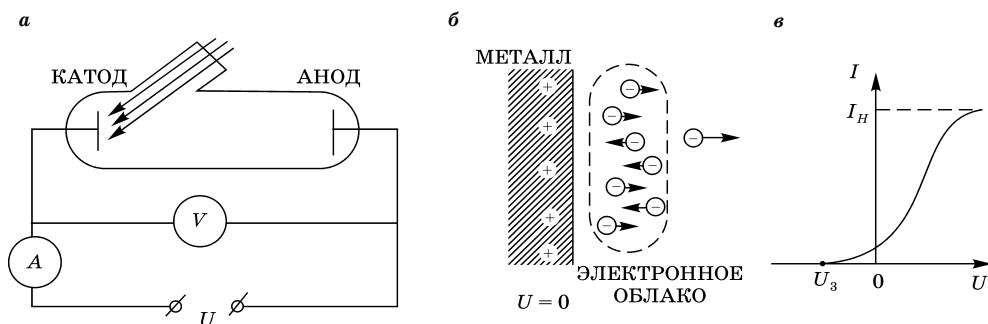


Рис. 8.6

1. При напряжении  $U$ , равном нулю, электрический ток в цепи отличен от нуля. Электроны, вылетающие с поверхности катода под действием падающего электромагнитного излучения, притягиваются к положительно заряженному металлу и возвращаются снова на металл. Вблизи металла образуется облако из электронов, покидающих и возвращающихся на катод. Однако существуют электроны, скорость которых при выходе из металла будет наибольшей. Они способны преодолевать двойной электрический барьер (металл притягивает вылетающий электрон, а электронное облако его отталкивает) вблизи поверхности металла и достигать анода.

2. Напряжение на трубке больше нуля (катод подключается к минусовому зажиму источника напряжения). В этом случае в трубке появляется электрическое поле и, образно говоря, «электрический ветер», который сносит электроны на анод. Число электронов, достигающих анода, возрастает, электронное облако становится меньше и при больших напряжениях полностью исчезает. Электрический ток достигает насыщения  $I = I_H$ , так как все электроны, выбиваемые с поверхности катода, достигают анода.

3. Напряжение на трубке меньше нуля; электрическое поле, возникающее при этом в трубке, тормозит электроны. Появляется «электрический ветер», который препятствует движению электронов к аноду. Сила электрического тока падает и при напряжении, называемом **задерживающим**, —  $U_3$ , обращается в ноль. При этом даже самые быстрые электроны не достигают анода, то есть кулоновская сила электрического поля совершает работу по уменьшению скорости таких электронов до нуля. Согласно теореме о кинетической энергии можно записать следующее равенство:

$$eU_3 = |e| \cdot |U_3| = \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2}.$$

**Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.** Согласно Планку, электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии — квантов. Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение не только испускается, но также распространяется и поглощается в виде отдельных порций энергии, которые получили название фотонов. Они обладают корпускулярно-волновым дуализмом, сочетают в себе свойства и частицы, и волны. Для расчета энергии фотона  $W_\Phi$  используются следующие формулы:

$$W_\Phi = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = m_\Phi c^2 = p_\Phi c, \quad (8.20)$$

в которые входят постоянная Планка  $h$ , масса  $m_\Phi$  и импульс фотона  $p_\Phi$ , длина волны  $\lambda$  и частота электромагнитного излучения  $\nu$ .

Согласно Эйнштейну, электрон поглощает фотон. Энергия фотона позволяет электрону выйти из металла (это требует энергии  $W_{\text{вых}}$ ) с кинетической энергией  $W_K$ . На основе закона сохранения энергии для такого процесса можно записать:

$$W_\Phi = W_{\text{вых}} + W_K.$$

Энергия выхода  $W_{\text{вых}}$  электрона из металла изменяется в зависимости от расстояния электрона до поверхности металла. Для электронов, вылетающих с поверхности металла, энергия выхода будет минимальной (она для

каждого металла имеет определенное значение и называется работой выхода  $A_{\text{вых}}$ ), а их кинетическая энергия будет соответственно максимально возможной. В этом случае уравнение примет вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2}. \quad (8.21)$$

Полученное уравнение получило название уравнения Эйнштейна для фотоэффекта.

Можно привести различные формы записи этого уравнения:

$$\begin{pmatrix} \text{фотон} \\ W_{\Phi} \\ h\nu \\ hc/\lambda \\ h/T \\ m_{\Phi}c^2 \\ p_{\Phi}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{металл} \\ A \\ h\nu_K \\ hc/\lambda_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{электрон} \\ W_{K\text{макс}} \\ \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2} \\ \frac{p_{\text{макс}}^2}{2m_e} \\ eU_3 \\ |e| \cdot |U_3| \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

**Опытные законы фотоэффекта, их объяснение.** Приведем формулировку экспериментальных законов фотоэффекта, открытых Столетовым в 1886–1889 гг., и их объяснение с точки зрения волновой и корпускулярной теории.

**1-й закон.** Сила  $I_H$  фототока насыщения прямо пропорциональна падающему на катод потоку  $\Phi_S$  электромагнитного излучения при фиксированном его спектральном составе ( $I_H \sim \Phi_S$ ). В соответствии с формулой (6.17) для потока  $\Phi_S$  падающего на металл излучения и для силы фототока насыщения можно записать

$$\Phi_S = \frac{dW_S}{dt} = \frac{dN_{\Phi}(h\nu)}{dt}, \quad I_H = \frac{dq}{dt} = \frac{|e| dN_{\text{эл}}}{dt},$$

где  $dN_{\Phi}$  и  $dN_{\text{эл}}$  — число падающих на катод фотонов и число электронов, вылетающих из него за время  $dt$ . Известно, что лишь малая часть фотонов выбивает электроны, большая часть фотонов поглощается металлом, идет на его нагревание. Можно записать формулу связи между числом фотонов  $dN_{\Phi}$  и числом электронов  $dN_{\text{эл}}$ :

$$dN_{\text{эл}} = \eta \cdot dN_{\Phi},$$

где входящая в это выражение постоянная  $\eta$  существенно меньше единицы.

Учитывая это соотношение, можно получить следующую формулу связи:

$$I = \frac{|e| dN_{\text{эл}}}{dt} = \frac{|e| \eta dN_{\Phi}}{dt} = \frac{|e| \Phi_S dt}{(h\nu) dt} = \frac{|e| \eta}{(h\nu)} \Phi_S, \quad (8.23)$$

подтверждающую первый закон фотоэффекта. Действительно, при постоянной частоте падающего излучения ( $\nu = \text{const}$ ) из формулы (8.23) следует, что  $I_H \sim \Phi_S$ .

Волновая теория также объясняет первый закон, так как энергия падающей волны определяется ее амплитудой и частотой. Увеличение потока падающего монохроматического излучения связано с увеличением его амплитуды, что и приводит к выбиванию большего числа электронов из металла, то есть к большей силе тока насыщения.

**2-й закон.** *Максимальная кинетическая энергия вылетающих с поверхности катода электронов зависит линейно от частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности.*

Для объяснения второго закона запишем уравнение Эйнштейна в следующем виде:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{K \text{ макс}}. \quad (8.24)$$

Из этого уравнения следует, что максимальная кинетическая энергия  $W_{K \text{ макс}}$  вылетающих электронов будет пропорциональна частоте падающего излучения ( $W_{K \text{ макс}} \sim \nu$ ), так как для каждого металла работа выхода является постоянной величиной.

При обычных интенсивностях падающего излучения один электрон поглощает один фотон, вероятность многофотонных процессов практически равна нулю, поэтому  $W_{K \text{ макс}}$  не зависит от интенсивности падающего излучения, то есть от числа фотонов, падающих на металл в единицу времени.

Волновая теория объясняет второй закон фотоэффекта лишь частично. Увеличивая частоту волны, можно увеличить энергию вылетающего электрона, что объясняет пропорциональность максимальной кинетической энергии  $W_{K \text{ макс}}$  вылетающего электрона частоте падающего излучения. Но волновая теория не может объяснить, почему увеличение амплитуды волны, то есть интенсивности волны, не приводит к увеличению  $W_{K \text{ макс}}$  электрона.

**3-й закон.** *Существует красная граница фотоэффекта  $\nu_K$  — такая минимальная частота падающего излучения, ниже которой фотоэффект не наблюдается.*

Для частот  $\nu \geq \nu_K$  фотоэффект наблюдается, а для частот  $\nu < \nu_K$  фотоэффект отсутствует.

Под красной границей фотоэффекта также понимают длину волны  $\lambda_K = c/\nu_K$ . В этом случае фотоэффект будет наблюдаться, если длина волны падающего на металл излучения будет меньше или равна красной границе фотоэффекта  $\lambda_K$ :  $\lambda \leq \lambda_K$ .

Для объяснения третьего закона фотоэффекта рассмотрим уравнение (8.24). При уменьшении частоты падающего излучения его левая часть уменьшается, следовательно, будет уменьшаться и максимальная кинетическая энергия вылетающих из металла электронов (для каждого металла  $A_{\text{вых}} = \text{const}$ ). При частоте излучения, равной красной границе фотоэффекта ( $\nu = \nu_K$ ), энергии фотона хватает только на выход электрона из металла:  $h\nu_K = A_{\text{вых}}$ ,  $W_{K \text{ макс}} = 0$ . Если частота излучения будет меньше  $\nu_K$ , то тогда энергии фотона не хватит на вылет электрона из металла и фотоэффекта не будет.

Таким образом, красная граница фотоэффекта для данного металла определяется формулой

$$\nu_K = A_{\text{вых}}/h, \lambda_K = c/\nu_K = hc/A_{\text{вых}}. \quad (8.25)$$



Волновая теория данный закон объяснить не может. Это связано с тем, что согласно волновой теории при малой частоте волны можно так увеличить ее амплитуду, что энергии волны будет достаточно для наблюдения фотоэффекта и при значениях  $\nu$ , меньших  $\nu_K$  ( $\nu < \nu_K$ ).

Отметим, что фотоэффект является безынерционным явлением. Если послать излучение на металл, то практически мгновенно из металла будут вылетать электроны, никакой задержки в их вылете не будет.

Согласно Эйнштейну, процесс поглощения фотона электроном будет происходить практически мгновенно, и сразу же будет наблюдаться выход электронов из металла. В волновой теории этот факт не объясняется, так как на раскачку электрона (он будет совершать вынужденные колебания) падающей волной до энергии, необходимой для выхода из металла, требуется время.

Подводя итог обсуждению опытных законов фотоэффекта, можно сделать вывод о том, что они находят свое полное объяснение в рамках корпускулярной теории электромагнитного излучения и оставляют много вопросов без ответа в рамках волновой теории.

**Зависимость задерживающего напряжения от частоты.** Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (8.22) в следующем виде:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + |e| \cdot |U_3| \Rightarrow |U_3| = \frac{h}{|e|} \nu - \frac{A_{\text{вых}}}{|e|}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 8.7. По графику можно найти постоянную Планка  $h$  ( $h = |e| \cdot \text{tg } \alpha$ ) и красную границу  $\nu_K$  для данного металла (по точке пересечения графика с осью частот:  $U_3 = 0 \Rightarrow \nu = A_{\text{вых}}/h = \nu_K$ ).

**Многофотонный фотоэффект.** При падении на катод электромагнитного излучения большой интенсивности от лазеров возможно протекание многофотонных процессов, при которых один электрон при выходе из металла поглощает несколько фотонов ( $N = 2, 3, 4$  и т. д.). Это приводит к другой форме записи уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$N h \nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2} \quad (8.26)$$

и к нарушению (видоизменению) третьего закона для фотоэффекта. Согласно уравнению (8.26) фотоэффект возможен и для частот, меньших красной границы фотоэффекта. Она будет смещаться в сторону меньших частот:  $\nu'_K = A_{\text{вых}}/(Nh)$ . Также нарушается (видоизменяется) и первый закон для фотоэффекта.

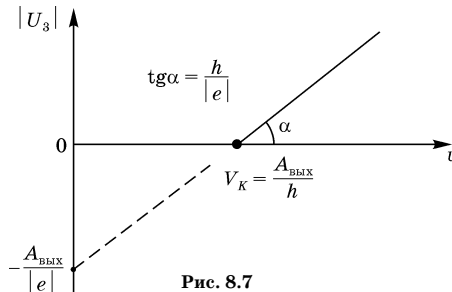


Рис. 8.7

### 8.3. ТОРМОЗНОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ЭФФЕКТ КОМПТОНА. ОПЫТ БОТЕ

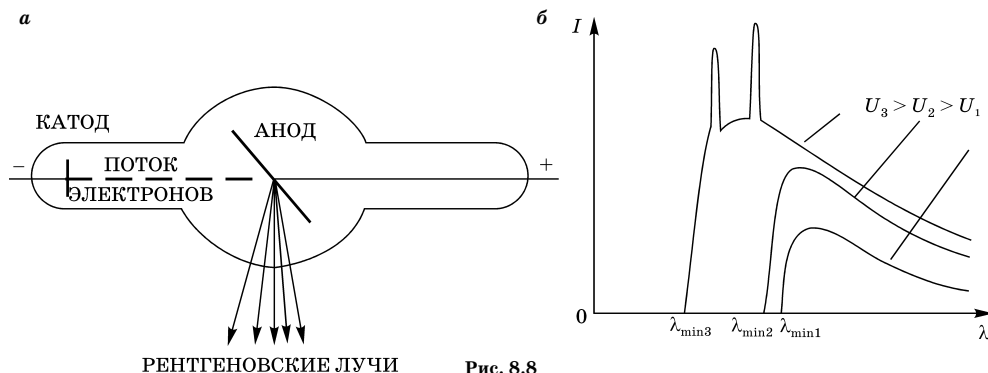
С увеличением частоты все четче и четче проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения. Так, например, изменяется характер взаимодействия между электроном и фотоном. Если в явлении фотоэффекта электрон поглощал фотон, то в области рентгеновского излучения, когда энергия фотона возрастает в тысячу раз, происходит рассеяние фотона на электро-не, то есть их взаимодействие носит характер взаимодействия двух частиц. Ниже рассматриваются опыты с участием рентгеновского излучения.

**Тормозное и характеристическое рентгеновское излучение.** Рентгенов-ское излучение обычно получают при торможении пучка быстро движущих-ся электронов в веществе. Для этого используется рентгеновская трубка (рис. 8.8а). Она представляет собой стеклянный баллон, внутри которого на-ходятся два электрода — анод и катод. За счет термоэлектронной эмиссии из катода вылетают электроны; они, проходя большую ускоряющую разность потенциалов, приобретают большие скорости и при торможении веществом анода излучают электромагнитные волны, максимум интенсивности кото-рых находится в области рентгеновского излучения. Экспериментально изу-ченные зависимости интенсивности рентгеновского излучения от длины вол-ны при разных напряжениях на рентгеновской трубке приведены на рис. 8.8б.

Обсудим основные особенности представленных на рис. 8.8б зависимостей.

Как видно из графиков, представленных на рис. 8.8б, в тормозном рент-геновском излучении присутствуют все длины волн, начиная с некоторой минимальной длины волны  $\lambda_{\min}$ , то есть *наблюдается резкая граница рент-геновского излучения в области малых длин волн*. Этот факт не находит объяснения в волновой теории. Согласно волновой теории при торможении электрона должны возникать все частоты электромагнитного излучения, то есть интенсивность рентгеновского излучения должна медленно падать до нуля в области коротких длин волн.

Резкую границу по длинам волн тормозного рентгеновского излучения можно объяснить в корпускулярной теории света. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $U$ , приобретает кинетическую энергию  $W_K$ , которую



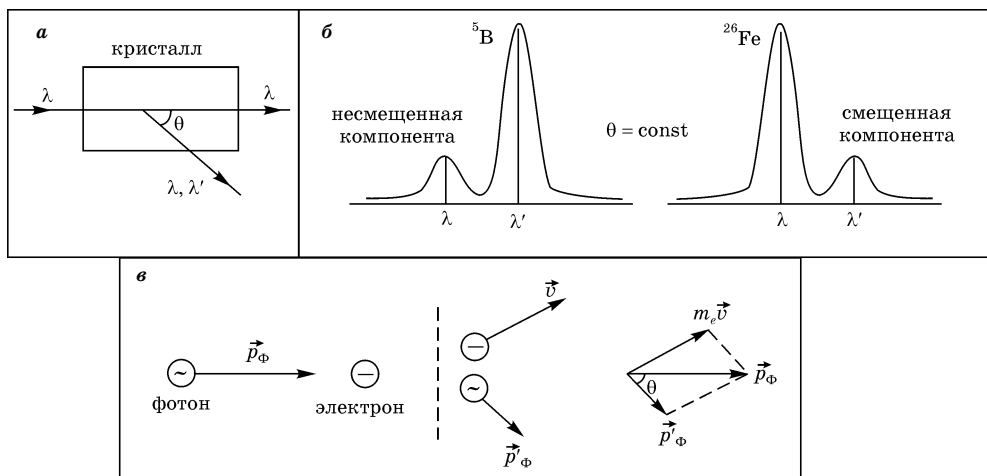


Рис. 8.9

он может, в частности, израсходовать на излучение одного фотона. При этом энергия фотона будет максимально возможной, а длина волны, соответствующая фотону, будет минимальной:

$$W_K = W \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = |e|U = hc/\lambda_{\min} \Rightarrow \lambda_{\min} \Rightarrow hc/(|e|U). \quad (8.27)$$

При больших напряжениях на трубке на графиках зависимости интенсивности  $I$  от длины волны  $\lambda$  появляются резкие узкие линии (рис. 8.8б), расположение которых зависит от вещества, из которого сделан анод (изменение материала анода изменяет расположение этих линий). В связи с этим такой вид излучения получил название *характеристического рентгеновского излучения*. Возникновение этого излучения связано с взаимодействием электронов с атомами вещества анода и, как это будет показано в разделе «Квантовая механика», оно отражает дискретный характер энергетических уровней атомов (см. п. 10.2.2).

**Эффект Комптона.** Рассмотрим эксперимент по рассеянию рентгеновского излучения веществом. Пучок рентгеновских лучей с определенной длиной волны  $\lambda$  падает на кристалл и рассеивается им под разными углами (рис. 8.9а).

Оказывается, что в рассеянном излучении наряду с излучением с длиной волны  $\lambda$  (несмещенная компонента излучения) появляется рассеянное излучение с длиной волны  $\lambda'$  (смещенная компонента излучения), причем  $\lambda' > \lambda$  (рис. 8.9б).

В появлении смещенной компоненты в рассеянном веществом рентгеновском излучении и заключается эффект Комптона. Причем оказывается, что  $\lambda'$  не зависит от природы рассеивающего вещества и рассчитывается по формуле

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta). \quad (8.28)$$

Входящая в выражение (8.28) величина  $\lambda_C$  называется *комптоновской длиной волны*:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_{0e}c} = 2,426 \text{ пм.} \quad (8.29)$$

В явлении фотоэффекта энергия фотона мала по сравнению с энергией покоя свободного электрона, и поэтому происходит поглощение фотона электроном:

$$W_{\Phi}/W_{0e} = h\nu/m_{0e}c^2 = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{16})/(9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}) \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

В области рентгеновских лучей энергия фотона возрастает настолько ( $W_{\Phi}/W_{0e} \approx 0,05$ ), что процесс взаимодействия электрона и фотона принимает совершенно другой характер, а именно происходит процесс упругого рассеяния фотона на электроне.

Смещенная компонента появляется при рассеянии падающего излучения на свободных электронах, энергия связи которых с атомом будет значительно меньше энергии налетающего на них фотона.

Выведем формулу (8.28). Для этого используем законы сохранения энергии и импульса для процесса взаимодействия электрона и фотона (см. рис. 8.9в):

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} + m_{0e}c^2 &= \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2 \Rightarrow hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = m_{0e}c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + 1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow (\lambda_c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + 1)^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_c^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - 2 \frac{1}{\lambda\lambda'} \right) + 2\lambda_c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + 1 &= \frac{1}{1-v^2/c^2}; \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\Phi} &= \vec{p}'_{\Phi} + m_e \vec{v} \Rightarrow \sqrt{p_{\Phi}^2 + p_{\Phi}'^2 - 2p_{\Phi}p_{\Phi}' \cos \theta} = \frac{m_{0e}v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{h}{\lambda'} \right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta &= \frac{m_{0e}^2 v^2}{1-v^2/c^2} \Rightarrow \lambda_c^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - 2 \frac{1}{\lambda\lambda'} \cos \theta \right) = \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (**)$$

Вычитая правые и левые части первого (\*) и второго (\*\*) уравнений, получим формулу (8.28).

Несмещенная компонента возникает при рассеянии фотонов на сильно связанных с атомами электронах, для них энергия связи с атомом значительно превосходит энергию налетающего фотона. Поэтому процесс рассеяния фотона будет происходить с атомом, что приводит к существенному уменьшению различия между длинами волн  $\lambda'$  и  $\lambda$  (порядка в  $1 \cdot 10^4$  раз) — в этом случае в формулу (8.28) войдет не масса покоя электрона, а масса покоя атома. Такое различие в длинах волн в эффекте Комптона не обнаруживается.

Относительно интенсивностей смещенной и несмещенной компонент можно отметить следующее. Интенсивность смещенной компоненты будет больше, чем интенсивность несмещенной компоненты для элементов с малым номером в таблице Менделеева (см. рис. 8.8б). Это связано с тем, что для атомов с малым атомным номером преобладают электроны, слабо связанные с атомами, поэтому рассеяние фотонов идет в основном на свободных электронах. Для атомов с большими атомными номерами будет преобладать чис-

ло электронов, сильно связанных с атомами, и поэтому интенсивность несмещенной компоненты будет больше (см. рис. 8.8б).

**Опыт Боте.** Этот опыт наглядно показывает, что в области рентгеновских лучей электромагнитное излучение представляет собой поток фотонов. В этом опыте металлическая фольга облучалась рентгеновским излучением и сама при этом становилась источником вторичного рентгеновского излучения. Интенсивность этого излучения выбиралась такой, чтобы можно было фиксировать по обе стороны от фольги каждый акт испускания фотона — попадание фотона регистрировалось на ленте самописца (рис. 8.10). Как показал опыт, самописец регистрировал хаотично испускаемые в одном направлении частицы, то есть метки на нем с разной стороны располагались хаотично. Согласно волновой теории сферические волны излучаются по всем направлениям одинаково, и поэтому метки с разных сторон самописца должны располагаться одинаково.

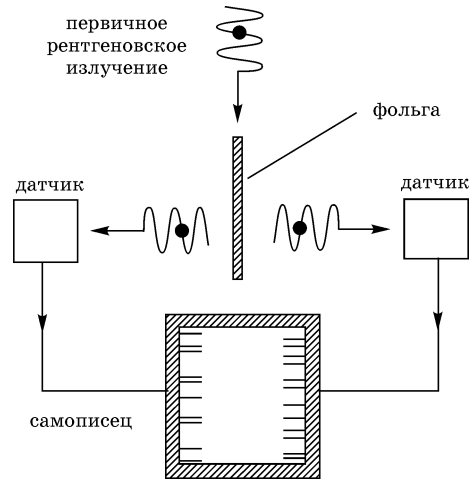


Рис. 8.10

## 8.4. ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Итак, электромагнитное излучение в одних опытах проявляет волновые свойства (интерференция, дифракция и поляризация света), а в других — корпускулярные свойства (тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона и т. д.). Возникает вопрос: что представляет собой электромагнитное излучение? С современной точки зрения это поток особых частиц, называемых фотонами. Они обладают корпускулярно-волновым дуализмом, сочетают в себе свойства и частицы, и волны одновременно.

Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения наглядно представлен на рис. 8.11.

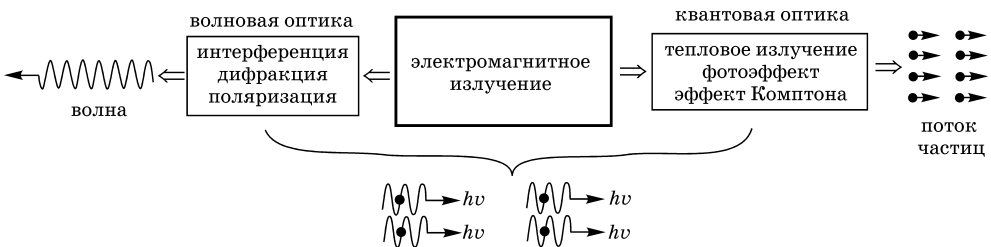


Рис. 8.11

Взаимосвязь корпускулярной и волновой картины можно видеть в записи энергии фотона (8.20), где она выражается через волновые (через длину и частоту волны) и корпускулярные (через массу и импульс) свойства фотона. Выражение вида

$$p_{\Phi} = \frac{h}{\lambda} \quad (8.30)$$

наглядно отражает корпускулярно-волновой дуализм фотона.

Для того чтобы полнее понять взаимосвязь разных картин описания фотона, выясним, какие свойства частицы и волны в классическом понимании этих слов сохраняются у фотона. Для этого сначала перечислим свойства волны и частицы, которыми они обладают в классической механике:

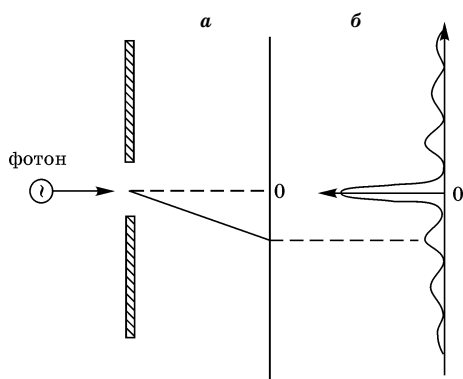


Рис. 8.12

**Частица:** 1) неделима во всех взаимодействиях; 2) имеет траекторию движения; 3) локализована в пространстве, то есть в данный момент времени занимает определенную точку пространства.

**Волна:** 1) делится; 2) не имеет траектории движения; 3) занимает все пространство.

Рассмотрим теперь, что произойдет с фотоном при прохождении им щели (рис. 8.12а). Из опыта известно, что фотон при прохождении щели попадет в определенную точку экрана, то есть фотон как частица является

неделимым при любых взаимодействиях. Фотон как волна испытывает явление дифракции и может отклониться на произвольный угол от первоначального направления движения.

Точное значение этого угла неизвестно, известна лишь вероятность его отклонения на разные углы. Наибольшая вероятность соответствует тем углам, при которых наблюдаются максимумы дифракционной картины, получаемой при накоплении достаточно большого числа фотонов (рис. 8.12б).

Волновые свойства у электромагнитного излучения (потока фотонов) проявляются в таких явлениях, как интерференция, дифракция и поляризация. Волновые же свойства отдельного фотона проявляются в вероятностном характере его поведения, они описывают вероятность его обнаружения в различных точках экрана (пространства). Эта особенность волновых свойств фотона является важной при построении квантовой механики — механики частиц малой массы.

Отметим, что корпускулярные свойства электромагнитного излучения проявляются все четче и четче при увеличении его частоты или уменьшении его длины волны.

## КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

В истории современной физики выделяют три этапа. Первый этап (1905–1931) начинается с создания третьей фундаментальной теории — специальной теории относительности (А. Эйнштейн, 1905) и завершается созданием и становлением четвертой фундаментальной физической теории — квантовой механики. До этого были известны две фундаментальные теории — механическая картина природы И. Ньютона и электродинамическая теория Дж. Максвелла.

Квантовая механика изучает движение частиц малой массы (микрочастиц), они, как и фотоны, обладают корпускулярно-волновым дуализмом (гипотеза Луи де Бройля, 1927). Движение таких частиц можно соотнести с волновым процессом, длина волны которого определяется формулой де Бройля (1927). Справедливость гипотезы де Бройля была подтверждена опытами К. Девиссона и Л. Джермера (1927), Дж. П. Томсона и Тартаковского (1927) и Л. М. Бибермана, Н. Г. Сушкина и В. А. Фабриканта (наблюдали дифракцию поочередно летящих электронов, 1949).

Наличие у микрочастиц волновых свойств приводит к тому, что для микрочастицы нельзя одновременно точно задать координату и соответствующий ей импульс (соотношение неопределенностей Гейзенберга, 1927), состояние микрочастицы в этом случае полностью определяется заданием в какой-то момент времени значения ее волновой функции. Поэтому движение таких частиц описывается уже не уравнением II закона Ньютона, а уравнением для волновой функции (уравнение Шредингера, 1926), то есть делается упор на описание волновых свойств микрочастиц. Оказалось, что волны де Бройля — это волны вероятности, волновая функция — это амплитуда вероятности, физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции, он описывает вероятность обнаружения частицы в пространстве (М. Борн, 1926). Задавая вид потенциального поля, в котором движется частица, из решения уравнения Шредингера можно

найти энергетический спектр микрочастицы и вероятность ее обнаружения в пространстве. Уравнение Шредингера точно решается только в ряде случаев (для свободной микрочастицы, для потенциальных полей определенного вида — прямоугольная потенциальная яма с бесконечно высокими стенками, потенциальное поле в виде бесконечно протяженной ступеньки, туннельный эффект, атом водорода, гармонический осциллятор, солитон). Эти решения применяются для объяснения различных эффектов и явлений, наблюдаемых на опыте. Они позволили выяснить строение атомов, природу химической связи, объяснить периодическую систему элементов, понять строение атомных ядер, изучить свойства элементарных частиц. Поскольку свойства макроскопических тел определяются движением и взаимодействием частиц, из которых они состоят, квантовая механика позволяет понять большинство макроскопических явлений, таких как ферромагнетизм, сверхтекучесть, сверхпроводимость, строение и многие свойства металлов, диэлектриков и полупроводников, механизм протекания термоядерных реакций на Солнце и других звездах. Она является основой создания нанотехнологий и принципов работы квантовых компьютеров.

Существуют также явления, в которых законы квантовой механики непосредственно проявляются в поведении макроскопических объектов (эффект Джозефсона). Ее законы лежат в основе работы ядерных реакторов, дают возможность осуществления в земных условиях управляемых термоядерных реакций, используются для целенаправленного поиска и создания новых материалов (особенно магнитных, полупроводниковых и сверхпроводящих). Таким образом, знание квантовой механики является необходимым в повседневной деятельности не только физикам-исследователям, но и инженерам.

## 9.1. ИДЕЯ ДЕ БРОЙЛЯ. ОПЫТЫ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ

В начале XX века было известно, что электромагнитное излучение обладает корпускулярно-волновым дуализмом, представляет собой поток особых частиц — фотонов, которые сочетают в себе свойства и частицы, и волны (см. п. 8.4). В 1927 г. французский физик Луи де Бройль обобщил корпускулярно-волновой дуализм на все частицы материи. Он высказал гипотезу, согласно которой каждой частице материи массы  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , можно поставить в соответствие волновой процесс, длина волны которого рассчитывается по формуле

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (9.1)$$

где  $p$  — импульс частицы.

Волны, соответствующие движущейся частице, получили название волн де Бройля, соответствующая же им длина волны называется длиной волны де Бройля. Это предположение в то время выглядело слишком смелым, так как тела большой массы не проявляли на эксперименте волновых свойств. Действительно, для тела массой  $m = 1$  кг, которое движется со скоростью  $v = 10$  м/с, длина волны де Бройля составляла

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10} = 6,63 \cdot 10^{-35} \text{ м.}$$



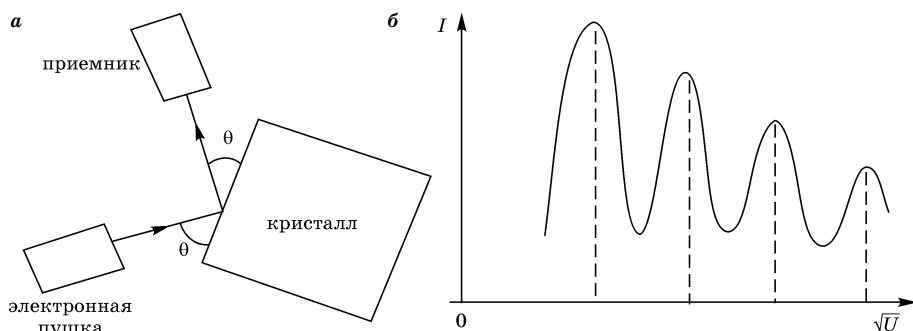


Рис. 9.1

Экспериментально можно обнаружить волны с длиной волны  $\lambda > 1 \cdot 10^{-18}$  м. Поэтому тела с большой массой (макротела) не проявляют на опыте своих волновых свойств. Если же уменьшать массу тела, то из формулы (9.1) следует, что длина волны де Бройля будет увеличиваться и для частиц малой массы можно обнаружить их волновые свойства. Частицы, для которых можно экспериментальным путем обнаружить волновые свойства, принято называть микрочастицами.

В связи с высказанной де Бройлем идеей был поставлен ряд опытов по обнаружению волновых свойств у микрочастиц. Рассмотрим те из них, которые вошли в историю физики.

**Опыты Девиссона и Джермера.** Эксперименты проводились по схеме, аналогичной опытам по дифракции рентгеновских лучей от поверхности кристалла (см. п. 7.3.6). С помощью электронной пушки формировался пучок электронов с постоянной скоростью  $v$ , который посылался под углом скольжения  $\theta$  на поверхность кристалла. Интенсивность отраженного пучка электронов  $I$  измерялась приемником (рис. 9.1а).

При фиксированном угле скольжения  $\theta$  непрерывно изменяли напряжение  $U$  на электронной пушке. При этом оказалось, что зависимость интенсивности  $I$  от квадратного корня напряжения на электронной пушке ( $\sqrt{U}$ ) носит немонокотный характер (рис. 9.1б). В частности, имеются максимумы и минимумы, что подтверждает волновые свойства пучка электронов, то есть гипотезу де Бройля. Причем максимумы интенсивности наблюдались на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 9.1б), что можно объяснить с помощью формул де Бройля (9.1) и Брэгга-Вульфа (7.40):

$$\frac{mv^2}{2} = |e|U \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|e|U}{m}} \Rightarrow \lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m|e|U}}, \quad 2d\sin\theta = n\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d\sin\theta}{n}$$

$$\lambda = \lambda_B \Rightarrow \sqrt{U} = \text{const} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где учтено, что угол скольжения  $\theta$  и постоянная решетки кристалла  $d$  остаются неизменными при проведении опытов.

Выбирая из опыта конкретные значения  $U = 54$  В,  $\theta = 64^\circ$  ( $n = 1$ ) и  $d = 0,0929$  нм, можно получить хорошее совпадение длин волн, рассчитанных по формулам (9.1) и (7.40), а именно  $\lambda = \lambda_B = 0,167$  нм.

Полученное совпадение значений длин волн де Бройля, рассчитанных разными способами, доказывает справедливость формулы де Бройля.

В другой серии опытов с помощью электронной пушки формировался пучок электронов с постоянной скоростью  $v$ , который посылался на монокристалл перпендикулярно к его поверхности. В опытах фиксировалась интенсивность  $I$  отраженного от поверхности кристалла пучка электронов при различных углах  $\varphi$  между падающим и отраженным пучками. Полученные кривые зависимости интенсивности  $I$  отраженного пучка электронов от угла  $\varphi$  при разных напряжениях  $U$  на электронной пушке оказались немонотонными, на них наблюдались максимумы и минимумы, что также подтверждает волновые свойства пучка электронов, то есть подтверждает гипотезу де Бройля.

**Опыты Томсона и Тартаковского.** Пучок электронов, имеющих постоянную скорость  $v$ , посылался на тонкий лист металла, который можно рассматривать как трехмерную дифракционную решетку (см. п. 7.3.6). Результат прохождения пучка рассматривался на экране, расположенном за этим листом металла (рис. 9.2), где наблюдалась дифракционная картина в виде светлых и темных колец. Это доказывало наличие волновых свойств у пучка электронов.

Расчет длины волны волнового процесса, сопровождающего движение пучка электронов, с помощью формулы де Бройля и с помощью формулы для дифракции рентгеновских лучей приводит к совпадению этих длин волн, что подтверждает формулу де Бройля (9.1).

Для того чтобы убедиться, что дифракционная картина не была получена фотонами, которые могут выбивать электроны, попадая на металлическую пластинку, установка помещалась в магнитное поле. В этом случае картина дифракции смещалась, что связано с тем, что на электроны, прошедшие металлическую фольгу, действовала со стороны магнитного поля сила Лоренца. Если бы картина дифракции была бы создана фотонами (у них электрический заряд равен нулю и сила Лоренца на них не действует), смещения не наблюдалось бы.

Аналогичные опыты, проведенные и для других микрочастиц (протоны, атомы, молекулы и т. д.), подтвердили наличие волновых свойств у потока микрочастиц.

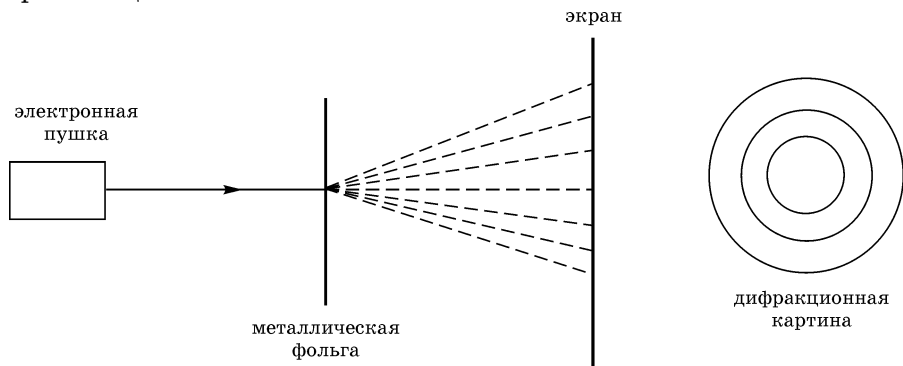


Рис. 9.2

**Опыты Бибермана, Сушкина и Фабриканта.** Из приведенных выше опытов по-прежнему не было ясно, чему приписать волновые свойства — потоку частиц или отдельной частице. Для ответа на этот вопрос учеными Л. Биберманом, Н. Сушкиным и В. Фабрикантом был поставлен следующий опыт. На установке, подобной той, которую использовали Тартаковский и Томсон, была создана малая интенсивность пучка электронов, а именно промежутки времени между последовательными вылетами двух электронов из электронной пушки в 40 000 раз превышал время пролета одним электроном всей установки. Тем самым исключалось влияние других электронов на прохождение одним электроном всей установки.

Результаты опыта оказались следующими: отдельный электрон, проходя установку, случайно отклонялся и попадал в какую-то точку экрана (в этом месте экрана на фоточувствительной пластинке появлялась темная точка); при накоплении достаточно большого числа электронов хаотичная картина случайных точек на экране превращалась в упорядоченную картину дифракции. Таким образом, было доказано, что волновыми свойствами обладает отдельно движущийся электрон. Итак, микрочастица обладает волновыми свойствами, которые проявляются в вероятностном характере ее поведения, в различной вероятности ее обнаружения в разных точках пространства.

## 9.2. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

### 9.2.1. СОПРЯЖЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В отличие от классических частиц, микрочастицы обладают волновыми свойствами, поэтому для них не всегда применимы такие классические понятия, как координата, импульс, время, энергия, траектория движения и т. д. В связи с этим возникают ограничения на применимость этих понятий для описания движения микрочастиц. Эти ограничения устанавливаются соотношениями неопределенностей Гейзенберга, согласно которым *произведение неопределенностей  $(\Delta A, \Delta B)$  двух сопряженных величин  $(A, B)$  не может быть меньше постоянной Планка  $\hbar$* :

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar/2, \hbar). \quad (9.2)^1$$

Сопряженными называют величины, которые не могут иметь одновременно точных значений.

Приведем ряд примеров на соотношение неопределенностей Гейзенберга.

**Пример 1.** Координата и соответствующая ей проекция импульса ( $A = x$ ,  $B = p_x$ ). Для них можно записать:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (9.3 \text{ а})$$

---

<sup>1</sup> В правой части формулы (9.2) в разных учебных пособиях может быть либо  $\hbar$ , либо  $\hbar/2$ , либо  $\hbar$ . Здесь важен порядок величины, а не обозначение.

Отметим, что такое же неравенство справедливо и для других координат ( $y, z$ ), и соответствующим им проекциям импульса

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar. \quad (9.3 \text{ б})$$

Если координата и проекция импульса друг другу не соответствуют, то тогда они одновременно могут иметь точные значения, для них соотношения неопределенностей Гейзенберга не выполняются.

Например,  $\Delta z \cdot \Delta p_x = 0, \Delta z \cdot \Delta p_y = 0, \Delta x \cdot \Delta p_y = 0, \Delta x \cdot \Delta p_z = 0$ .

Для того чтобы показать справедливость формул (9.3), рассмотрим пример прохождения электроном щели шириной  $a$  (рис. 9.3); кратко этот пример для фотона был обсужден в п. 8.4. Волновые свойства электрона приводят к тому, что при прохождении им щели понятие траектории для электрона будет неприменимо, иначе он попадал бы только в центр экрана. Поэтому он

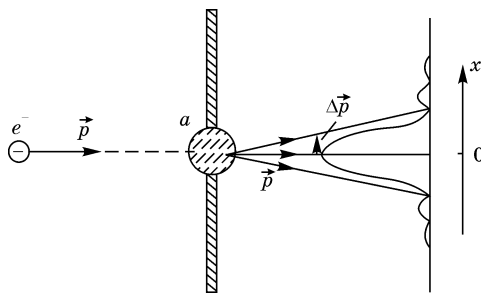


Рис. 9.3

случайным образом меняет направление своего первоначального движения, попадая с различной вероятностью в разные точки экрана — наибольшей вероятности соответствует наибольшая интенсивность при дифракции электронного пучка на одной щели. Если посылать на щель по одному электрону, то тогда при накоплении достаточно большого числа электронов на экране возникнет дифракционная

картина. Причем максимальной интенсивности дифракционной картины будет соответствовать наибольшая вероятность попадания электрона в данную точку экрана. Итак, волновые свойства электрона описывают вероятность его обнаружения в разных точках экрана (пространства).

При прохождении щели неопределенность координаты будет равна  $\Delta x = a$ , а после прохождения разброс импульсов электрона будет располагаться, в основном, в пределах первого максимума дифракционной картины при дифракции света на одной щели. Из рис. 9.3 видно, что

$$\Delta p_x = p \sin \varphi = p \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a},$$

и поэтому

$$\Delta x \Delta p_x = a \cdot \frac{h}{a} = h,$$

что и требовалось показать.

При оценке  $\Delta p_x$  было учтено, что первый минимум при дифракции электронов на одной щели наблюдается при угле  $\varphi$ , определяемом из условия (7.26):  $a \sin \varphi = k\lambda$ .

Отметим, что неизвестно, каким образом электроны проходят щель и что происходит с электронами в области щели. Новая теория квантовой механики не дает ответа на эти вопросы, она лишь дает результаты прохождения пучком электронов преграды с одной щелью.

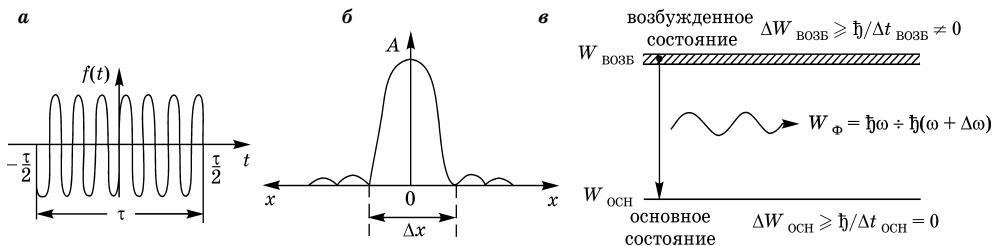


Рис. 9.4

**Пример 2.** В части 5 для приближенной оценки ширины частотного спектра различных импульсов  $\Delta\omega$  была записана формула (5.43):  $\Delta\omega \cdot \Delta\tau \approx 2\pi$ , она связывает ширину спектра  $\Delta\omega$  со временем излучения импульса  $\Delta\tau$ . Распространение этого импульса в пространстве можно описать понятием волнового пакета — группы волн с частотами, заключенными в пределах от  $\omega$  до  $\omega + \Delta\omega$  (рис. 9.4а).

Покажем, что область локализации  $\Delta x$  волнового пакета (область пространства, где амплитуда волнового пакета существенно отличается от нуля, рис. 9.4б) и разброс по модулю импульса  $\Delta p_x$  для волн этого волнового пакета связаны между собой соотношением  $\Delta x \Delta p_x \approx h$ .

Действительно,

$$\Delta x = c\Delta\tau \approx \frac{2\pi c}{\Delta\omega}, \quad \Delta p_x = \Delta\left(\frac{h}{\lambda_B}\right) = \Delta\left(\frac{h\omega}{2\pi c}\right) = \frac{h}{2\pi c} \Delta\omega \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \approx h,$$

что и требовалось показать.

Следовательно, и с точки зрения волновой теории координата и соответствующая ей проекция импульса являются сопряженными величинами.

**Пример 3.** Энергия и время ( $A = W$ ,  $B = t$ ). Для этих величин можно записать

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (9.4)$$

Здесь  $W$  — энергия частицы в квантовом состоянии,  $\Delta W$  — разброс по энергии данного квантового состояния,  $\Delta t$  — время жизни частицы в данном квантовом состоянии.

Согласно формуле (9.4) каждая линия излучения имеет естественную ширину или каждый излучаемый фотон имеет разброс по частотам. Поясним это с помощью рис. 9.4в. В основном состоянии атом может находиться сколь угодно долго ( $\Delta t_{\text{осн}} = \infty$ ), и поэтому ширина по энергии такого состояния равна нулю:  $\Delta W_{\text{осн}} \geq \hbar/\Delta t_{\text{осн}} = 0$ .

В возбужденном состоянии атом может находиться в течение времени  $\Delta t_{\text{возб}} \approx 1 \cdot 10^{-8}$  с, что приводит к размытию по энергии возбужденного уровня энергии атома:  $\Delta W_{\text{возб}} \geq \hbar/\Delta t_{\text{возб}} \neq 0$ . Поэтому излучаемый при переходе в основное состояние фотон будет иметь разброс по частоте  $\Delta\omega = \Delta W_{\text{ф}}/\hbar = \Delta W_{\text{возб}}/\hbar \approx 1/\Delta t_{\text{возб}} \approx 1 \cdot 10^8$  рад/с.

Отметим, что формулу (9.4) можно получить из выражения (5.43), если умножить его на постоянную  $\hbar$  ( $\hbar\Delta\omega \cdot \Delta\tau \approx 2\pi\hbar \Rightarrow \Delta W_{\text{ф}}\Delta\tau \approx h$ ).

### 9.2.2. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ

Запишем условия, при которых для описания движения микрочастиц, обладающих волновыми свойствами, можно применять законы классической механики. Это возможно, если применимо понятие траектории, то есть одновременно с достаточной степенью точности можно пользоваться понятиями координаты и импульса для микрочастицы:

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} \ll 1, \quad \frac{\Delta x}{L} \ll 1, \quad (9.5)$$

где величина  $L$  — характерный размер установки.

Эти условия можно объединить в одно, выражая неопределенности задания импульса и координаты из соотношений неопределенностей Гейзенберга (9.3 а) и перемножая неравенства в формуле (9.5)

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} \cdot \frac{\Delta x}{L} \ll 1 \Rightarrow \frac{\hbar}{\Delta x \cdot h/\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda_B}{2\pi L} \ll 1 \Rightarrow \lambda_B \ll L. \quad (9.6)$$

Согласно формуле (9.6) классическая механика применима для описания движения микрочастиц, если можно пренебречь волновыми свойствами частицы, то есть длина волны де Бройля существенно меньше характерного размера установки.

Приведем ряд примеров, поясняющих условия формул (9.5) и (9.6).

**Пример 1.** Движение электрона в электронно-лучевой трубке: пусть длина трубки составляет  $l = 0,1$  м, напряжение на трубке  $U = 10$  кВ. За счет расходимости пучка электронов радиус пятна на экране составляет  $r = 1,0 \cdot 10^{-5}$  м.

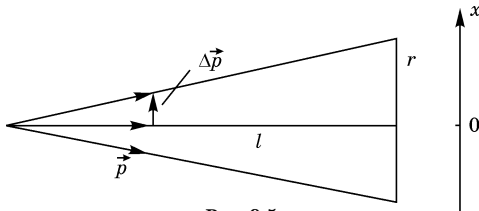


Рис. 9.5

Оценим точность задания импульса электрона. Из рис. 9.5 можно видеть, что

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} = \frac{r}{l} = 1 \cdot 10^{-4},$$

то есть понятием импульса можно пользоваться с достаточной степенью точности. Оценим точность задания координаты электронов. Характерным размером установки здесь является радиус пятна пучка электронов на экране  $r = L$ .

Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга (9.3 а), получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{L} &\approx \frac{\hbar}{L \Delta p_x} = \frac{\hbar}{L p_x \cdot 10^{-4}} = \frac{\hbar}{10^{-5} \cdot \sqrt{2|e|U m} \cdot 10^{-4}} = \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^4 / 9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll 1. \end{aligned}$$

Как видно, координата электронов тоже задана с достаточной степенью точности, то есть движение электронов в электронно-лучевой трубке можно описывать с помощью уравнений классической механики.

**Пример 2.** Электрон в атоме: его размеры составляют  $L \approx 1 \cdot 10^{-10}$  м, они являются характерным размером данной задачи. Из теории Бора для атома водорода известно, что скорость электрона на первой боровской орбите равна  $v \approx 1 \cdot 10^6$  м/с. Оценим длину волны де Бройля, соответствующую электрону в атоме водорода:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ м} \Rightarrow \lambda_B > L.$$

Следовательно, при описании поведения электрона в атомах необходимо использовать новую теорию — квантовую механику.

### 9.2.3. ТРАКТОВКА СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕРЕНИЯ

Итак, остается непонятным, как электроны проходят через щель в примере 1 (п. 9.2.1). Чтобы выяснить это, можно установить за ними наблюдение, посылая каждый раз фотон при приближении электрона к щели, причем энергия фотона должна быть существенно меньше полной энергии электрона (в этом случае можно пренебречь влиянием взаимодействия электрона и фотона на поведение электрона). По отраженному от электрона фотону можно выяснить, каким образом электрон проходит эту щель. Однако оказывается, что при таком наблюдении за электронами на экране не будет наблюдаться дифракционная картина — все электроны будут лететь без отклонения и попадать в центр экрана. Следовательно, поведение электрона при наблюдении за ним изменяется.

Из этого опыта можно сделать вывод, что любой процесс измерения (наблюдения) оказывает существенное влияние на поведение микрочастиц. Поэтому квантовая механика не рассматривает вопросы, связанные с детальным поведением частиц в том или ином опыте; она дает лишь результаты, взаимодействия частиц с различными преградами (потенциальными полями). Случайный характер движения отдельной частицы не позволяет однозначно описать ее поведение в опыте, но при накоплении достаточно большого числа случайных событий мы получаем закономерные явления, которые и описывает квантовая механика. Если убрать случайный характер поведения отдельной частицы, установив за ней наблюдение, то это приводит к исчезновению статистических закономерностей при накоплении большого числа случайных событий.

Как уже было отмечено, две сопряженные величины не могут иметь одновременно точных значений, то есть в одном опыте нельзя одновременно установить точные значения сопряженных величин. Это позволяет дать трактовку соотношений неопределенностей Гейзенберга с точки зрения процесса измерения.

Перепишем формулы (9.3 а) и (9.4) следующим образом:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}, \quad \Delta W \geq \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Полученные формулы можно истолковать следующим образом: чем точнее в данном опыте определяется импульс ( $\downarrow \Delta p_x$ ), тем менее точно будет известна координата ( $\uparrow \Delta x$ ); чем дольше измеряется энергия системы  $\uparrow \Delta t$ , тем с большей точностью ( $\downarrow \Delta W$ ) она будет известна.

### 9.3. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ. СТАНДАРТНЫЕ УСЛОВИЯ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Итак, движению микрочастицы соответствует волновой процесс, волна де Бройля. Возникает вопрос о природе этих волн де Бройля. Сначала считали, что волны де Бройля — это электромагнитные волны, а микрочастица представляет собой волновой пакет из ЭМВ. Однако такое представление оказалось неверным, так как из-за явления дисперсии волновой пакет, распространяясь в среде, расплывается, что противоречит стабильности существования микрочастиц.

Правильная трактовка природы волн де Бройля была дана М. Борном в 1927 г. Согласно Борну, *волны де Бройля — это волны вероятности, а волновая функция представляет собой амплитуду вероятности.*

Физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции  $|\Psi(x, y, z, t)|^2$  — это плотность вероятности  $P_{пл}(x, y, z, t)$ , она равна отношению вероятности  $dP(x, y, z, t)$  найти частицу в момент времени  $t$  в бесконечно малом объеме  $dV$ , взятом около точки с координатами  $(x, y, z)$ , к величине этого объема  $dV$ :

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = P_{пл}(x, y, z, t) = \frac{dP(x, y, z, t)}{dV}. \quad (9.7)$$

В связи с вероятностным смыслом волновой функции на нее накладываются *стандартные условия*, а именно волновая функция и ее частные производные по координатам должны быть непрерывными, однозначными и конечными.

На рис. 9.6а показаны точки, которые должны отсутствовать на графике для волновой функции или для модуля квадрата волновой функции.

Для волновой функции справедливо условие нормировки

$$\int_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1, \quad (9.8)$$

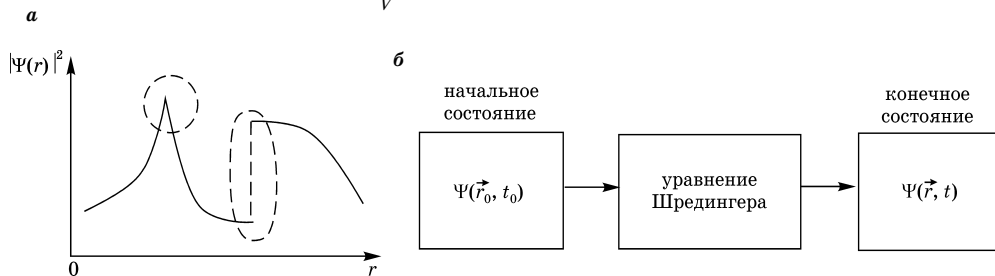


Рис. 9.6



оно дает вероятность найти частицу в какой-то момент времени в объеме ее существования; это вероятность достоверного события, и поэтому такой интеграл равен единице.

Рассмотрим теперь, как решается задача о движении частицы в классической и квантовой механике. В классической механике состояние частицы в какой-то момент времени определяется заданием ее координат и импульса. Поэтому схема решения задачи здесь выглядит следующим образом: задаются координаты и импульс частицы в начальный момент времени, затем решается уравнение II закона Ньютона и в итоге получают координаты и импульс в конечный момент времени (см. п. 1.2.2).

Такую схему решения задачи в квантовой механике применить нельзя, так как из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга невозможно одновременно точно задать координаты и импульс частицы. Здесь состояние частицы однозначно определяется заданием ее волновой функции, поэтому решается уравнение для этой волновой функции и таким образом однозначно находится конечное состояние частицы, то есть ее волновая функция в момент времени  $t$  (рис. 9.6б).

Впервые основное уравнение квантовой механики — уравнение для волновой функции было записано в 1926 г. Э. Шредингером и получило название уравнения Шредингера. Оно имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (9.9)$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ;  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица;  $m$  — масса частицы;  $U(x, y, z, t)$  — потенциальная энергия частицы в

силовом поле, в котором она движется;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа, его действие на волновую функцию сводится к взятию вторых частных производных по координатам. В левой части уравнения берется частная производная от волновой функции по времени  $t$ .

*Уравнение Шредингера является основным уравнением квантовой механики, оно не выводится, его справедливость проверяется сопоставлением полученных из него результатов с опытными данными.* Его значение в квантовой механике сравнимо с уравнениями Ньютона в классической механике и Максвелла в электродинамике или тремя началами в термодинамике.

Уравнение Шредингера не выводится, но можно понять, как оно может быть записано, например, в частном случае движения свободной частицы вдоль оси  $Ox$ . Забегая вперед, рассмотрим результаты решения задачи квантовой механики о свободной микрочастице (Задача 1) для энергетического спектра частицы и ее волновой функции:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t - kx\right)}, \quad W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Если выразить энергию  $W$  и импульс частицы  $p$  через ее волновую функцию

$$W = i \frac{\hbar}{\Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (9.10)$$

и подставить их в формулу для энергии  $W$ , то получим уравнение Шредингера для свободной микрочастицы.

Если же частица движется во внешнем силовом поле с потенциальной энергией  $U(x, t)$ , то тогда необходимо ввести волновую функцию в выражение

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(x, t) = W,$$

что приводит в общем случае к уравнению (9.9), записанному Шредингером. Еще раз подчеркнем, что это уравнение не выводится, оно является постулатом.

Обычно рассматриваются силовые поля, которые явно не зависят от времени  $t$ . Они называются стационарными полями. В таких полях потенциальная энергия частицы не зависит от времени ( $U = U(x, y, z)$ ), а полная энергия частицы остается постоянной ( $W = U + W_K = \text{const}$ ). Волновую функцию в этом случае можно представить в виде произведения временной ее части на координатную часть  $\psi(x)$ :

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{-i \frac{W}{\hbar} t} \psi(x). \quad (9.11)$$

Для координатной части волновой функции уравнение Шредингера (его называют *стационарным уравнением Шредингера*) примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi = W \psi. \quad (9.12)$$

В заключение приведем схему решения задач квантовой механики.

**1-й этап. Постановка задачи.** При этом задается вид силового поля, в котором движется частица, то есть задается зависимость потенциальной энергии частицы от координат во внешнем силовом поле.

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** Оно решается как дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Стандартные условия и условие нормировки, накладываемые на волновую функцию, приводят к тому, что уравнение имеет решение не для всех значений полной энергии частицы. Совокупность значений энергии, при которых уравнение имеет решение, называют собственными значениями энергии, а соответствующие им волновые функции называют собственными волновыми функциями. На этом этапе находят собственные значения энергии и собственные волновые функции задачи.

**3-й этап. Анализ полученного решения.**

1. Энергетический спектр частицы. Совокупность собственных значений энергии частицы образует энергетический спектр частицы.

2. Вероятность обнаружения частицы в различных точках пространства. Совокупность собственных волновых функций позволяет найти плотность вероятности обнаружения частицы в разных точках пространства.

Итак, решая уравнение Шредингера, можно найти только энергетический спектр частицы и вероятность ее обнаружения в различных точках пространства. Данные сведения используются для анализа поведения частицы в потенциальном поле определенного вида. Более детальной информации квантовая механика о поведении частиц не дает. Это является не недостатком теории, а следствием вероятностного поведения частицы в пространстве.

Поведение частиц вне экспериментальной ситуации, то есть самих по себе, нам не доступно, так как мы живем в макромире и используем понятия макромира. О наличии микромира мы узнаем из поведения частиц в экспериментальной ситуации, и это нужно помнить и не стараться брать от теории то, что она не может дать.

Ниже представлено решение ряда задач квантовой механики, имеющих точное решение. Таких задач существует немного, и они играют важную роль при анализе экспериментальных данных.

#### 9.4. ЗАДАЧА 1. СВОБОДНАЯ МИКРОЧАСТИЦА

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Частица движется с постоянной скоростью  $\bar{v}$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Внешнего силового поля нет, то есть потенциальная энергия частицы равна нулю ( $U(x) = 0$ ), частица является свободной. Импульс частицы равен  $\bar{p}$ .

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** Запишем уравнение Шредингера для свободной микрочастицы:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = W\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решением этого уравнения является следующая функция:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Если учесть, что полная волновая функция равна произведению координатной части функции на ее временную часть (формула (9.11)):

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{W}{\hbar}t} \psi(x) = Ae^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t - kx\right)} + Be^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t + kx\right)},$$

а также комплексное представление волновой функции для плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ ,

$$\xi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)},$$

то тогда можно сказать, что первое слагаемое в решении уравнения Шредингера для волновой функции представляет собой плоскую монохроматическую волну де Бройля, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$  (бегущая волна де Бройля), а второе слагаемое — плоскую монохроматическую волну де Бройля, распространяющуюся в отрицательном

направлении оси  $Ox$  (отраженная волна де Бройля). При этом циклическая частота  $\omega$  этих волн составит:  $\omega = W/\hbar$ , а параметр  $k$  представляет собой модуль волнового вектора  $\vec{k}$ .

В связи с тем, что при движении свободной частицы отражения нет, то тогда второе слагаемое в волновой функции будет отсутствовать:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t - kx\right)}. \quad (9.13)$$

Как видно, волновая функция удовлетворяет стандартным условиям во всей области ее существования, а условие нормировки дает для коэффициента  $A$  следующую формулу:

$$A = \frac{1}{V} = \text{const},$$

где  $V$  — объем пространства, в котором может находиться частица.

Из условия конечности волновой функции следует, что при стремлении  $V \rightarrow \infty$  коэффициент  $A$  стремится к нулю. Для собственных значений энергии можно получить

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}, \quad (9.14)$$

где были использованы формулы для импульса и модуля волнового вектора:

$$p_X = \frac{\hbar}{\lambda_B}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_B} \Rightarrow p = \hbar k. \quad (9.15)$$

### 3-й этап. Анализ полученного решения.

1. Энергетический спектр микрочастицы. Энергетический спектр свободной микрочастицы в классической механике является непрерывным, энергия частицы принимает положительные значения  $W = p^2/(2m)$ . Такие же выводы об энергетическом спектре частицы дает и квантовая механика, это видно из формулы (9.14).

2. Вероятность обнаружения микрочастицы в различных точках пространства. В классической механике известно, что частица является локализованной, то есть занимает определенную точку пространства. Поэтому вероятность найти частицу в какой-то точке пространства в данный момент времени равна единице, а в остальных — нулю.

В квантовой механике плотность вероятности обнаружения микрочастицы

$$P_{\text{пл}}(x, y, z, t) = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = A^2 = \text{const} \quad (9.16)$$

не зависит от координат и времени. Это означает, что вероятность найти частицу будет одинаковой, не равной нулю, во всех точках пространства, то есть свободная частица будет «размазанной» по всему пространству. Этот вывод резко отличается от вывода классической механики. Он является следствием наличия у микрочастицы волновых свойств, и его можно получить из соотношения неопределенностей Гейзенберга. Действительно, для свободной микрочастицы, движущейся с постоянным импульсом, неопределенность задания импульса будет равна нулю, а неопределенность задания координаты согласно соотношениям неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p_X = 0 \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_X} = \infty.$$

## 9.5. ЗАДАЧА 2. МИКРОЧАСТИЦА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ С БЕСКОНЕЧНО ВЫСОКИМИ СТЕНКАМИ

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Частица движется во внешнем силовом поле, в котором потенциальная энергия частицы задана следующими соотношениями:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 & |\psi|^2 = 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq l & |\psi|^2 \neq 0 \\ \infty & x > l & |\psi|^2 = 0 \end{cases} \quad (9.17)$$

Вид потенциального поля приведен на рис. 9.7а. Из него видно, что частица находится в потенциальной яме с бесконечно высокими прямоугольными стенками, за пределы которой она выйти не может.

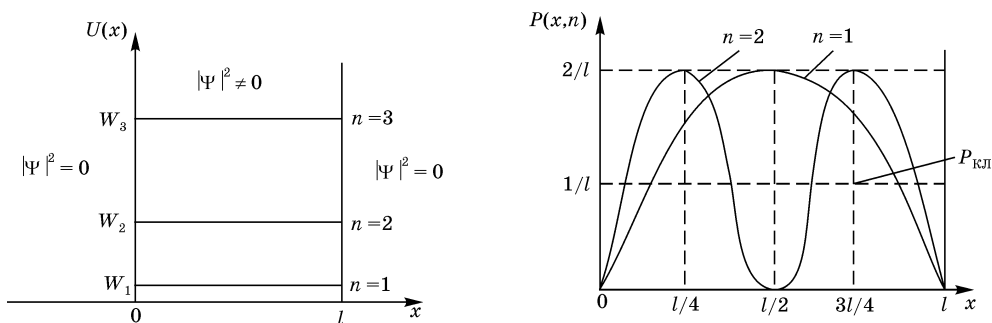


Рис. 9.7

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** Уравнение Шредингера необходимо решать в области  $0 \leq x \leq l$ , в которой  $U(x) = 0$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = W \psi \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}.$$

Решением этого уравнения является сумма двух плоских монохроматических волн де Бройля (бегущей и отраженной):

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Стандартные условия в этой задаче записываются следующим образом:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \psi(x) = 2Ai \sin(kx),$$

$$\psi(l) = 0 \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = \pi n \Rightarrow \psi_n(x) = 2Ai \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В формулу для волновой функции входит номер квантового состояния  $n$ , причем значение  $n = 0$  исключается, так как тогда вероятность найти частицу внутри потенциальной ямы и вне ее будет равна нулю, то есть частица не существует, а это противоречит условию задачи.

Условие нормировки позволяет найти постоянную  $A$ :

$$\int_0^l |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^l 4A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2l}}.$$

В итоге для собственных волновых функций можно записать:

$$\psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.18)$$

Для собственных значений энергии частицы получим:

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k_n = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.19)$$

### 3-й этап. Анализ полученного решения.

1. Энергетический спектр микрочастицы. В классической механике энергетический спектр частицы является непрерывным, минимальное значение энергии равно нулю, то есть частица может «находиться» на дне потенциальной ямы.

В квантовой механике из формулы (9.19) следует, что энергетический спектр частицы является дискретным и расходящимся, минимальное значение энергии отлично от нуля и равно  $W_1$  (см. рис. 9.7):

$$\Delta W_{n+1,n} = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1), \quad W_{\min} = W_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (9.20)$$

Состояние частицы при квантовом числе  $n$ , равном единице, есть основное состояние частицы, а остальные состояния называются возбужденными.

Как видно, выводы классической и квантовой механики при малых значениях квантового числа  $n$  находятся в резком несоответствии между собой.

Можно показать, что отличие минимального значения энергии частицы от нуля является следствием ее волновых свойств. Действительно, неопределенность координаты частицы в потенциальной яме равна ее ширине  $\Delta x = l$ , что позволяет из соотношения неопределенностей Гейзенберга провести оценку неопределенности задания импульса частицы  $\Delta p_x \geq \hbar/\Delta x = \hbar/l$ . Понятие импульса можно использовать в тех случаях, когда значение импульса будет не меньше погрешности его определения:  $p_x \geq \Delta p_x$ . Тогда минимальное значение импульса частицы будет равно  $p_x = \Delta p_x$ , что приводит к оценке минимального значения энергии частицы внутри потенциальной ямы:

$$W_{\min} = \frac{(p_{x \min})^2}{2m} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2}. \quad (9.21)$$

Полученное значение по порядку величины соответствует значению энергии частицы в квантовом состоянии для  $n = 1$  (формула (9.19)).

2. Вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы. В классической механике частица движется равномерно по траектории от

одной стенки до другой, и поэтому классическая плотность вероятности обнаружения частицы будет одинаковой во всех точках потенциальной ямы, так как частица одинаковое время находится вблизи любой точки. Используя условие нормировки, найдем формулу для классической плотности вероятности:

$$\int_0^l P_{\text{кл}}(x) dx = P_{\text{кл}} l = 1 \Rightarrow P_{\text{кл}} = 1/l. \quad (9.22)$$

Запишем формулу для квантовой плотности вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы

$$P_{\text{кв}}(x, n) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (9.23)$$

из которой следует, что квантовая плотность вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы зависит от координаты  $x$  и от номера квантового состояния  $n$ , что не согласуется с движением частицы по траектории. Так, например, для квантового состояния с  $n = 1$  плотность вероятности  $P_{\text{кв}}(x, 1)$  на краях потенциальной ямы будет равна нулю, а в ее середине будет максимальной. Число пиков на зависимости  $P_{\text{кв}}(x, n)$  будет равно номеру квантового состояния  $n$ , а площадь под графиками плотности вероятности будет одинаковой и равной единице (рис. 9.7).

Итак, движение частицы внутри потенциальной ямы при небольших значениях  $n$  необходимо описывать в рамках квантовой механики. Однако при больших значениях квантового числа  $n$  возможно применение классической механики при описании движения микрочастицы. Это связано с тем, что при увеличении  $n$  возрастает модуль волнового вектора  $\vec{k}$  ( $k_n = \pi n/l$ ), следовательно, уменьшается длина волны де Бройля ( $\lambda_B = 2\pi/k_n = 2l/n$ ), соответствующая движению частицы, и при некотором значении  $n$  будет выполняться условие применимости классической механики для описания движения микрочастицы:  $\lambda_B \ll l$ . Причем для больших  $n$  происходит относительное сближение энергетических уровней, энергетический спектр становится квазинепрерывным, то есть дискретным, но дискретностью можно пренебречь по сравнению со значениями энергии квантовых состояний:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\Delta W_{n+1, n}}{W_n} = \frac{2n+1}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta W_{n+1, n} \ll W_n.$$

Большое число пиков (максимумов и минимумов на графике зависимости плотности вероятности от координаты  $x$ ) приводит к тому, что усредненное значение  $\langle P_{\text{кв}}(x, n) \rangle$  квантовой плотности вероятности  $P_{\text{кв}}(x, n)$  будет совпадать с классическим значением плотности вероятности  $P_{\text{кл}} = 1/l$ .

Рассмотренный пример — это пример соответствия выводов квантовой и классической теории при больших значениях квантовых чисел — является частным случаем **принципа соответствия**, который гласит: *при больших значениях квантовых чисел выводы квантовой механики должны соответствовать выводам классической механики.*

## 9.6. ЗАДАЧА 3. МИКРОЧАСТИЦА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СТУПЕНЬКИ (НИЗКАЯ СТУПЕНЬКА)

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Частицы движутся вдоль оси  $Ox$  и налетают на прямоугольный бесконечно протяженный ( $x > 0$ ) низкий потенциальный барьер высотой  $U_0$  ( $W > U_0$ , рис. 9.8а). Необходимо ответить на вопрос: что происходит с частицами при их встрече с потенциальным барьером? Отметим, что потенциальным барьером называют ограниченную в пространстве область высокой потенциальной энергии частицы во внешнем силовом поле.

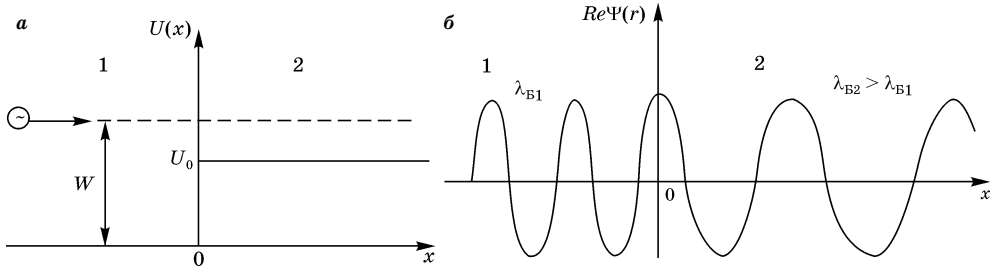


Рис. 9.8

В классической механике все частицы пролетают в область потенциального барьера, понижая при этом свою кинетическую энергию. Отражения частиц от потенциального барьера нет.

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** Так как пространство разбивается на две области (до барьера и в области барьера), необходимо решить уравнение в этих двух областях и затем наложить стандартные условия на волновые функции (наложить условия сшивания).

$$\text{Область 1} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = W \psi_1 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}};$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}.$$

$$\text{Область 2} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + U_0 \psi_2 = W \psi_2 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - k_2^2 \psi_2 = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2}},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + U_0 \psi_2 = W \psi_2 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + k_2^2 \psi_2 = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(W - U_0)}{\hbar^2}},$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} = A_2 e^{ik_2 x},$$

где учтено, что во второй области отражения нет, поэтому отраженной волны здесь не будет ( $B_2 = 0$ ).

Решения для волновой функции в двух областях необходимо сшить на границе областей, то есть наложить на волновые функции стандартные условия:



$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0).$$

Из них вытекают следующие условия на коэффициенты при волновых функциях:

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2. \quad (9.24)$$

**3-й этап. Анализ полученного решения.** Энергетический спектр частицы при ответе на вопрос задачи не нужен, поэтому он здесь и не рассматривается.

Найденные собственные волновые функции задачи позволяют выяснить, что для микрочастиц, в отличие от классических частиц, появляется новый *квантовый эффект, а именно существует не равная нулю вероятность отражения частиц от потенциального барьера.*

Вводится **коэффициент отражения  $R$**  от потенциального барьера как величина, равная отношению интенсивности волны, отраженной от барьера, к интенсивности волны, падающей на барьер:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(\sqrt{W} - \sqrt{W - U_0})^2}{(\sqrt{W} + \sqrt{W - U_0})^2}. \quad (9.25)$$

В выражении (9.25) для коэффициента отражения были записаны формулы с учетом условий сшивания (9.24), накладываемых на коэффициенты при волновых функциях.

Из формулы (9.25) следует, что вероятность отражения частиц от потенциального барьера зависит от высоты потенциального барьера и полной энергии налетающей на барьер частицы.

Итак, в квантовой механике появляется вероятность отражения частиц от границы потенциального барьера.

На рис. 9.8б приведен график зависимости вещественной части волновой функции от координаты ( $\text{Re}\psi_1(x) = (A_1 + B_1)\cos k_1 x = A_2 \cos k_1 x$ ,  $\text{Re}\psi_2(x) = A_2 \cos k_2 x$ ). Видно, что решение носит волновой характер как в области до барьера, так и в области барьера. При переходе через границу барьера происходит увеличение длины волны де Бройля, соответствующей движущейся микрочастице.

## 9.7.

### ЗАДАЧА 4. МИКРОЧАСТИЦА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СТУПЕНЬКИ (ВЫСОКАЯ СТУПЕНЬКА)

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Частицы движутся вдоль оси  $Ox$  и налетают на прямоугольный бесконечно протяженный ( $x > 0$ ) высокий потенциальной барьер высотой  $U_0$  ( $W < U_0$ , рис. 9.9а). Необходимо ответить на вопрос: что происходит с частицами при их встрече с потенциальным барьером?

В классической механике все частицы отражаются от потенциального барьера и летят обратно. Проникновения частиц в область барьера нет.

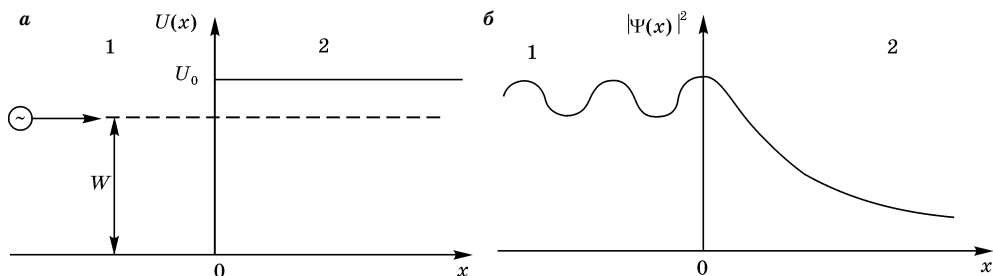


Рис. 9.9

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** В квантовой механике для ответа на этот вопрос необходимо решить уравнение Шредингера в двух областях — до барьера и в области барьера:

$$\text{Область 1} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = W \psi_1 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}},$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{i k_1 x} + B_1 e^{-i k_1 x}.$$

$$\text{Область 2} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + U_0 = W \psi_2 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - k_2^2 \psi_2 = 0, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2}}.$$

Из решения уравнения Шредингера для второй области видно, что оно не носит волнового характера (в показателе экспоненты не входит мнимая единица), то есть решение нельзя представить в виде гармонической функции синуса или косинуса. Это означает, что частица не может находиться в этой области сколь угодно долго, по истечении определенного промежутка времени она должна покинуть эту область пространства.

Из условия конечности волновой функции коэффициент  $A_2$  нужно положить равным нулю. Действительно, для значений  $x$ , стремящихся к бесконечности ( $x \rightarrow \infty$ ), первое слагаемое в волновой функции  $\psi_2(x)$  будет стремиться к бесконечности.

Решения для волновой функции в двух областях необходимо сшить на границе областей, то есть наложить на волновые функции стандартные условия,

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0).$$

Из этих условий вытекают следующие условия на коэффициенты при волновых функциях

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad i k_1 (A_1 - B_1) = k_2 A_2. \quad (9.26)$$

**3-й этап. Анализ полученного решения.** Для микрочастиц, в отличие от классических частиц, появляется **новый квантовый эффект** — *существует не равная нулю вероятность проникновения микрочастиц внутрь потенциального барьера*. Вводится **эффективная глубина  $x_{\text{эф}}$  проникновения** микрочастицы вглубь потенциального барьера — расстояние от границы барье-

ра, на котором вероятность обнаружения микрочастицы падает в  $e$  раз, где  $e$  — основание натурального логарифма. Выражение для  $x_{\text{эф}}$  можно найти из условия

$$\frac{|\psi_2(0)|^2}{|\psi_2(x_{\text{эф}})|^2} = \frac{B_2^2 e^0}{B_2^2 e^{-2k_2 x_{\text{эф}}}} = e^{-2k_2 x_{\text{эф}}} = e^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\text{эф}} = \frac{1}{2k_2} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - W)}}. \quad (9.27)$$

Откуда следует, что чем больше масса частицы и разность  $(U_0 - W)$ , тем меньше будет эффективная глубина проникновения микрочастицы вглубь барьера.

На рис. 9.9б приведен график зависимости квадрата модуля волновой функции (плотности вероятности) от координаты  $x$ . Из него видно, что вероятность обнаружения микрочастицы будет уменьшаться с увеличением расстояния от границы барьера.

Возникает вопрос: почему классическая частица не может проникать внутрь барьера, а микрочастицы имеют такую возможность? Можно дать следующее объяснение.

В классической механике в произвольный момент времени  $t$  точно известны координата  $\vec{r}$  и импульс  $\vec{p}$  частицы. Это позволяет точно выделить вклады в полную энергию частицы от ее потенциальной и кинетической энергии —  $W(\vec{r}, \vec{p}) = W_K(p) + U(\vec{r})$ . Поэтому в области потенциального барьера, где полная энергия частицы меньше ее потенциальной энергии, кинетическая энергия частицы будет меньше нуля ( $W_K = (W - U) < 0$ ). Это невозможно согласно определению кинетической энергии.

В квантовой механике в соответствии с соотношениями неопределенности Гейзенберга нельзя одновременно точно задать координаты частицы и ее импульс. Поэтому точное деление полной энергии частицы на ее кинетическую и потенциальную энергии невозможно. Это позволяет частице проникать внутрь потенциального барьера на короткое время.

Действительно, в начальные моменты времени ( $\Delta t$  мало) внутри потенциального барьера погрешность в определении энергии частицы  $\Delta W \geq (\hbar/\Delta t)$  будет достаточно большой и может превышать энергию самой частицы  $\Delta W > W$ . Это не позволяет установить точные значения кинетической и потенциальной энергии частицы.

С течением времени погрешность в определении полной энергии частицы уменьшается и, соответственно, становится возможным определить с достаточной точностью значение кинетической энергии частицы внутри потенциального барьера. В этот момент времени частица должна уйти из области потенциального барьера, что не позволяет обнаружить отрицательные значения кинетической энергии частицы.

Аналогичным образом объясняется и существование виртуальных частиц, которые переносят различные виды взаимодействия в физике элементарных частиц.

## 9.8. ЗАДАЧА 5. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Частицы движутся вдоль оси  $Ox$  и налетают на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0$  ( $W < U_0$ ), (рис. 9.10а). Необходимо ответить на вопрос: что происходит с частицами при их встрече с потенциальным барьером?

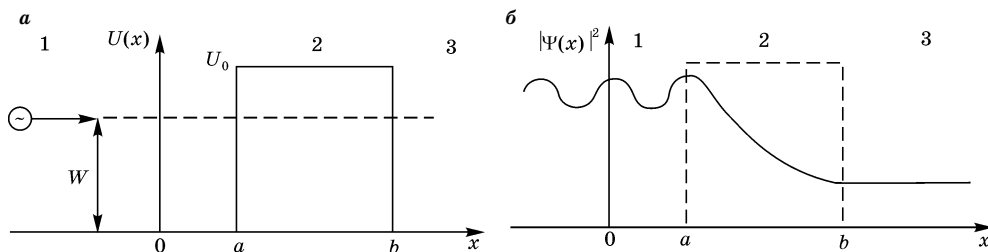


Рис. 9.10

В классической механике все частицы отражаются от потенциального барьера и летят обратно. Проникновения в области 2 и 3, то есть в область барьера и за него, нет.

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** В квантовой механике для ответа на этот вопрос необходимо решить уравнение Шредингера в трех областях:

$$\text{Область 1 } \Psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}.$$

$$\text{Область 2 } \Psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \approx B e^{-k_2 x}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2}}.$$

$$\text{Область 3 } \Psi_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} = A_3 e^{ik_3 x}, \quad k_3 = k_1.$$

На рис. 9.10 дан график зависимости квадрата модуля волновой функции от координаты  $x$  с учетом стандартных условий, накладываемых на волновые функции на границах потенциального барьера. Из графика видно, что вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциального барьера уменьшается с ростом координаты  $x$  и что вероятность найти микрочастицу в области 3, в области за барьером, будет отлична от нуля.

**3-й этап. Анализ полученного решения.** Возникает новый квантовый эффект — **туннельный** — проникновение частиц сквозь потенциальный барьер. Вводится понятие коэффициента прозрачности потенциального барьера  $D$ ; он определяет вероятность проникновения частиц сквозь потенциальный барьер и равен отношению интенсивностей волны, прошедшей потенциальный барьер, к интенсивности волны, падающей на барьер. Данное отношение интенсивностей волн можно найти с учетом условий сшивания, накладываемых на волновую функцию на границах потенциального барьера (рис. 9.10):

$$D = \frac{I_{\text{прош}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{|\Psi_2(b)|^2}{|\Psi_2(a)|^2} = \exp(-2k_2(b-a)) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}(b-a)\right). \quad (9.28)$$

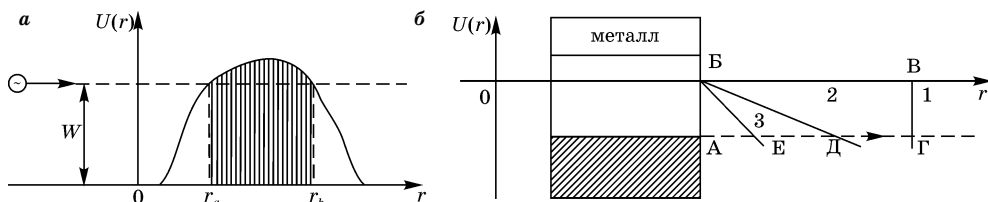


Рис. 9.11

Как видно из уравнения (9.28), вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер зависит от массы частицы, ширины потенциального барьера и соотношения между высотой потенциального барьера и полной энергией налетающей на барьер частицы.

В случае потенциального барьера  $U(r)$  произвольной формы (рис. 9.11а) для коэффициента прозрачности можно получить следующую формулу:

$$D = \prod_i D_i = \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_{r_a}^{r_b} \sqrt{2m(U(r) - W)} dr \right). \quad (9.29)$$

При выводе формулы (9.29) область потенциального барьера, в которой полная энергия частицы меньше ее потенциальной энергии ( $r_a \leq r \leq r_b$ , рис. 9.11), разбивается на совокупность прямоугольных потенциальных барьеров. Для каждого из них находится коэффициент прозрачности  $D_i$  ( $i$  — номер прямоугольного барьера), коэффициенты  $D_i$  перемножаются, а затем ширина прямоугольных потенциальных барьеров стремится к нулю, а их число  $i$  стремится к бесконечности ( $i \rightarrow \infty$ ).

Туннельный эффект объясняет многие наблюдаемые на опыте явления, здесь рассматриваются два примера проявления туннельного эффекта.

**Пример 1.** Холодная эмиссия электронов из металла. Для электронов металл представляет собой потенциальную яму с плоским дном и вертикальными стенками. Электроны вблизи абсолютного нуля температур заполняют потенциальную яму от ее дна до верхнего уровня (его называют уровнем Ферми). Вылет электронов из металла при таких температурах за счет их энергии теплового движения маловероятен. Это явление называют явлением термоэлектронной эмиссии — электроны получают энергию, превышающую высоту  $AB = U_0$  потенциального барьера  $A - B - \Gamma$  вблизи поверхности металла, и выходят из него (рис. 9.11б). В основном вылетают электроны с уровня Ферми.

Вторая возможность вылета электронов из металла связана с туннельным эффектом. Вероятность выхода электронов из металла за счет этого эффекта будет также малой из-за большой ширины и высоты потенциального барьера  $A - B - \Gamma$  на границе металла. Если включить вне металла ускоряющее электроны электрическое поле напряженности  $\vec{E}$ , то тогда потенциальный барьер вблизи поверхности металла становится треугольным  $A - B - D$  ( $U(r) = U_0 - Er$ ), где  $r$  — расстояние, отсчитываемое от точки  $B$  вдоль оси  $r$ . Чем больше напряженность электрического поля, тем меньше ширина потенциального барьера и тем больше будет вероятность выхода электронов из металла за счет туннельного эффекта.

Для такого вида потенциального барьера из формулы (9.29) можно записать следующее выражение для коэффициента прозрачности:

$$D = \exp\left(-\frac{E}{E_0}\right),$$

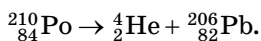
где постоянная величина  $E_0$  составляет порядка  $1 \cdot 10^8$  В/м.

Для плотности тока, создаваемого при выходе электронов из металла, можно получить формулу

$$j = j_{\text{термо}} + j_{\text{тун}} \approx j_{\text{тун}} = j_0 \exp\left(-\frac{E}{E_0}\right),$$

которая подтверждается экспериментально.

**Пример 2.** Радиоактивный распад ядер ( $\alpha$ -распад ядер). Рассмотрим для примера  $\alpha$ -распад ядра полония, при котором из ядра вылетает  $\alpha$ -частица (ядро атома гелия)



Для явления радиоактивности справедлив основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

где  $N$  — число ядер, которые не распались к моменту времени  $t$ ;  $N_0$  — первоначальное количество ядер;  $\lambda$  — постоянная распада, связанная с периодом полураспада  $T$  формулой  $\lambda = \ln 2/T$ .

Для ядер одного семейства, испытывающих  $\alpha$ -распад, энергия вылетающих  $\alpha$ -частиц изменяется незначительно относительно определенного значения  $W_0$ :  $W_\alpha = W_0 + \Delta W_\alpha$ ,  $\Delta W_\alpha \ll W_0$ . Но эти малые изменения энергии  $\alpha$ -частиц приводят к существенным изменениям периода полураспада  $T$  (на несколько порядков).

Указанные закономерности  $\alpha$ -распада ядер можно объяснить на основе туннельного эффекта. В этом случае можно считать, что для  $\alpha$ -частицы ядро представляет собой прямоугольную потенциальную яму с вертикальными стенками и плоским дном (рис. 9.12). Двигаясь с постоянной скоростью от одной стенки этой ямы до другой,  $\alpha$ -частица имеет не равную нулю вероятность выйти из ядра за счет туннельного эффекта, что и приводит к распаду ядра. Потенциальный барьер, который встречает на границе ядра  $\alpha$ -частицу, обусловлен кулоновским взаимодействием ядра, образующегося при таком распаде, с  $\alpha$ -частицей, он имеет следующий вид:

$$U(r) = 2(z-2)|e|^2/(4\pi\epsilon_0 r).$$

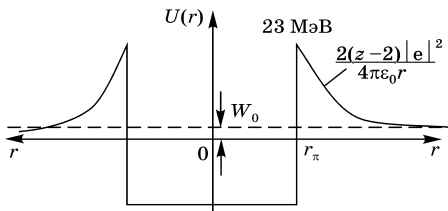


Рис. 9.12

Оценки наибольшей высоты потенциального барьера ( $z = 206, r_{\text{я}} \approx 1 \cdot 10^{-14} \text{ м}$ ) приводят к следующей величине  $U(r_{\text{я}}) \approx 23 \text{ МэВ}$ , что существенно превышает энергию ( $W_0 \approx 5 \text{ МэВ}$ ) вылетающей из ядра  $\alpha$ -частицы.

Учитывая вид потенциального барьера по формуле (9.29), можно получить следующее выражение для коэффициента прозрачности:

$$D = \exp(-\text{const} / \sqrt{W_{\alpha}}).$$

Из этой формулы следует, что небольшие изменения энергии  $\alpha$ -частицы, то есть небольшие изменения показателя экспоненты приводят к существенным изменениям коэффициента прозрачности, а следовательно, и периода полураспада  $T$ .

## 9.9. ЗАДАЧА 6. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

**1-й этап. Постановка задачи.** Задача одномерная. Потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле параболического вида (рис. 9.13) определяется формулой

$$U(x) = kx^2 / 2 = m\omega_0^2 x^2 / 2. \quad (9.30)$$

Как известно из теории колебаний, частица в таком поле будет совершать гармонические колебания — она называется линейным гармоническим осциллятором. В формуле (9.30)  $\omega_0$  означает циклическую частоту собственных колебаний осциллятора, а  $k$  — коэффициент жесткости системы.

Полная энергия частицы  $W$  определяет область пространства, в которой она совершает колебания:  $-A \leq x \leq A$ . Точки  $x_1 = -A$  и  $x_2 = A$  являются точками поворота в движении частицы, в этих точках полная энергия частицы равна ее потенциальной энергии.

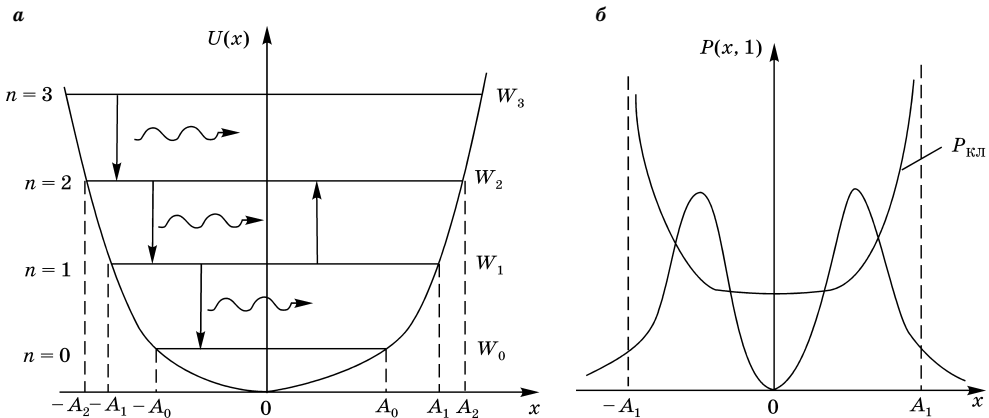


Рис. 9.13

**2-й этап. Решение уравнения Шредингера.** Уравнение Шредингера для данной задачи имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{kx^2}{2} \psi = W\psi.$$

Из теории дифференциальных уравнений для собственных волновых функций и собственных значений энергии можно записать:

$$W_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.31 \text{ а})$$

$$\psi_n(x) = C_n \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi), \quad \xi = x\sqrt{m\omega_0/\hbar}, \quad C_n = (m\omega_0\hbar)^{1/4} (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2}, \quad (9.31 \text{ б})$$

где  $C_n$  — нормировочные коэффициенты, а  $H_n(\xi)$  представляет собой полином Эрмита

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - (2\xi)^{n-2} n(n-1)/1! + (2\xi)^{n-4} n(n-1)(n-2)(n-3)/2! - \dots$$

### 3-й этап. Анализ полученного решения.

1. Энергетический спектр гармонического осциллятора. В классической механике энергетический спектр является непрерывным, минимальная энергия осциллятора равна нулю, она соответствует гармоническому осциллятору в положении равновесия.

В квантовой механике, как показывают расчеты, энергетический спектр является дискретным и эквидистантным, то есть расстояния между соседними уровнями энергии одинаковые:  $\Delta W_{n+1,n} = \hbar\omega_0$ . Минимальное значение энергии отлично от нуля и равно  $W_{\min} = W_0 = \hbar\omega/2$ . Оно получило название **энергии нулевых колебаний**.

Кроме того, оказывается, что разрешены (возможны) переходы только между соседними уровнями энергии:  $\Delta n = n_2 - n_1 = \pm 1$ . При таких переходах происходит поглощение или излучение квантов энергии, равных  $W_{\text{кванта}} = \hbar\omega_0$ . Условие на возможные значения  $\Delta n$  получило название **правила отбора**.

Из сказанного выше следует, что при малых значениях квантового числа  $n$  выводы квантовой и классической механики находятся в резком несоответствии друг с другом.

Подтверждением правильности решения в квантовой механике задачи на гармонический осциллятор являются следующие опытные факты.

**А.** Рассеяние света на тепловых колебаниях атомов в узлах кристаллической решетки. При понижении температуры интенсивность рассеянного кристаллами света убывает, так как при этом уменьшается амплитуда тепловых колебаний атомов. При низких температурах, близких к абсолютному нулю, интенсивность рассеянного света должна убывать до нуля из-за исчезновения тепловых колебаний атомов. Однако на опыте этого не происходит, интенсивность рассеянного света стремится к постоянному значению, отличному от нуля. Это можно объяснить тем, что из-за наличия квантовых нулевых колебаний атомов они не прекращаются и при абсолютном нуле температур;



Б. Жидкий гелий при обычных давлениях нельзя превратить в кристалл вплоть до абсолютного нуля температур. Это связано с тем, что амплитуда нулевых колебаний в жидком гелии будет достаточно большой, и это не позволяет образоваться кристаллической решетке.

2. Вероятность обнаружения частицы в разных точках пространства. Движение гармонического осциллятора в классической механике ограничено областью пространства  $-A_1 \leq x \leq A_1$  (точки  $x_1 = -A_1$  и  $x_2 = A_1$  являются точками поворота для гармонического осциллятора в состоянии  $n = 1$ , в этих точках полная энергия частицы  $W_1$  равна ее потенциальной энергии:  $W_1 = W_{p1}$ ). Это следует из графика для классической плотности вероятности  $P_{\text{кл}}(x)$ , приведенного на рис. 9.13б.

Для квантового гармонического осциллятора существует не равная нулю вероятность проникновения через границу потенциального барьера, то есть возможность выйти за пределы ограниченной области пространства за счет туннельного эффекта. Это наглядно видно из графика плотности вероятности  $P_{\text{пл}}(x, n=1) = |\psi_1(x)|^2$  для состояния с квантовым числом  $n = 1$ , приведенного на рис. 9.13б.

Отметим, что решение данной задачи используется при описании тепловых свойств твердых тел.

# АТОМ ВОДОРОДА. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ

## 10.1. АТОМ ВОДОРОДА

### 10.1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В поле ядра находится один электрон (рис. 10.1), его потенциальная энергия определяется следующей формулой:

$$U(r) = -\frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (10.1)$$

где  $z$  — зарядовое число ядра;  $r$  — расстояние от электрона до ядра.

Такая задача применима к атому водорода и к водородоподобным ионам, у которых в поле ядра движется один электрон. К ним можно отнести такие ионы, как  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ ,  $\text{Be}^{+++}$  и т. д. Из рис. 10.1 и формулы (10.1) следует, что задача сводится к задаче о движении электрона в бесконечно глубокой потенциальной яме с гиперболическими стенками.

### 10.1.2. ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА, ПО БОРУ

Рассмотрим сначала решение этой задачи, которое было сделано Н. Бором в 1913 г. За основу решения задачи Бор взял планетарную модель атома Резерфорда, согласно которой в центре атома находится ядро, вокруг которого по круговым орбитам вращаются электроны (рис. 10.2). В ядре, размеры которого примерно в 1000 раз меньше размеров атома, сосредоточены весь положительный заряд и практически вся масса атома. Электроны, двигаясь по орбите радиуса  $r$ , обладают моментом импульса (механическим орбитальным моментом)  $\vec{L}$  и магнитным моментом  $\vec{p}_m$  (электрон при своем движении создает кольцевой ток, магнитный момент которого можно найти по формуле, приведенной в п.4.1.8):

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad L = rp = m_e v \cdot r = m_e \omega r^2, \\ p_m = IS = \frac{|e|\hbar}{T} \pi r^2 = \frac{|e|\hbar}{2\pi} \omega \pi r^2 = \frac{1}{2} |e|\hbar \omega r^2.$$

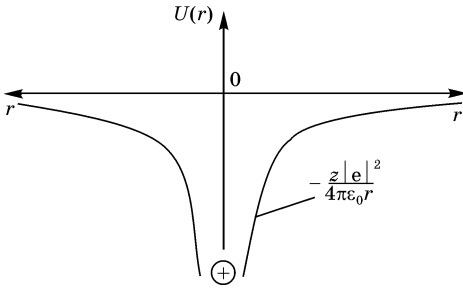


Рис. 10.1

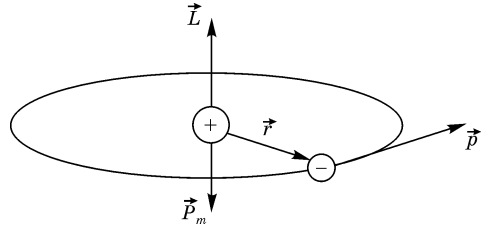


Рис. 10.2

Направление векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{p}_m$  указано на рис. 10.2. Видно, что они направлены перпендикулярно плоскости орбиты в противоположные стороны. Отношение модулей этих моментов называют **гиромагнитным отношением**:

$$\frac{|\vec{p}_m|}{|\vec{L}|} = \frac{|e|\omega r^2}{2m_e \omega r^2} = \frac{|e|}{2m_e}. \quad (10.2)$$

Однако планетарная модель атома Резерфорда обладает двумя недостатками. Во-первых, она приводит к неустойчивости атома. Действительно, ускоренно движущиеся по круговым орбитам электроны (для них центростремительное ускорение не равно нулю) излучают электромагнитные волны, теряют энергию и падают на ядро, то есть атом является неустойчивым. Во-вторых, теряя энергию, электрон излучает электромагнитные волны всех частот (сплошной характер излучения), тогда как на опыте наблюдаются линейчатые спектры излучения. Для того чтобы убрать эти недостатки модели, Н. Бор ввел два постулата (недоказуемые утверждения). Приведем их формулировку.

**1-й постулат.** *Существуют стационарные состояния, находясь в которых атом не излучает электромагнитные волны.* Эти состояния выбираются из условия, при котором модуль орбитального механического  $L$  момента кратен постоянной Планка  $\hbar$ :

$$L = m_e v r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.3)$$

В формуле (10.3) величину  $n$  называют главным квантовым числом, оно определяет номер стационарного состояния.

Как видно, модули орбитального механического  $\vec{L}$  и магнитного  $\vec{p}_m$  моментов принимают дискретный набор значений, то есть квантуются. Их квантование определяется главным квантовым числом  $n$ . В этом случае на длине стационарной орбиты укладывается целое число волн де Бройля

$$m_e v = \frac{n\hbar}{r_n} \Rightarrow \lambda_B = \frac{h}{m_e v} = \frac{2\pi r_n}{n} \Rightarrow 2\pi r_n = n\lambda_B.$$

Найдем радиусы стационарных орбит  $r_n$ . Для этого запишем II закон Ньютона для электрона, движущегося по стационарной орбите:

$$\vec{F} = m_e \vec{a} \Rightarrow m_e \frac{v^2}{r_n} = \frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (10.4)$$

Объединяя уравнения (10.3) и (10.4), можно записать

$$v = \frac{n\hbar}{m_e r_n} \Rightarrow \frac{m_e}{r_n} \left( \frac{n\hbar}{m_e r_n} \right)^2 = \frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e z|e|^2} n^2 = r_1 \cdot n^2, \quad (10.5)$$

где радиус первой орбиты для атома водорода ( $z = 1$ ), называемый **первым боровским радиусом**:

$$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (10.6)$$

Найдем энергию атома в стационарном состоянии, она будет складываться из кинетической энергии электрона и его энергии взаимодействия с ядром атома:

$$W_n = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{z|e|^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{z^2 A}{n^2} \quad n=1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (10.7)$$

где

$$A = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e |e|^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}. \quad (10.8)$$

Из формулы (10.7) следует, что энергетический спектр электрона в атоме водорода ( $z = 1$ ) является дискретным и сходящимся (рис. 10.3а). Минимальное значение энергии электрона в атоме отлично от нуля и равно  $W_1 = -13,6$  эВ. Энергия электрона на стационарном уровне со значением главного квантового числа  $n$ , равного  $n = \infty$ , равна нулю ( $W_\infty = 0$ ). Электрон, находясь на этом уровне энергии, может покинуть атом, происходит ионизация атома. Минимальная энергия, необходимая для удаления из атома электрона, находящегося в основном состоянии, называется энергией ионизации:  $W_{\text{иониз}} = (W_\infty - W_1) = 13,6$  эВ.

Для положительных значений энергии энергетический спектр электрона будет непрерывным, он соответствует свободному электрону, не связанному с атомом.

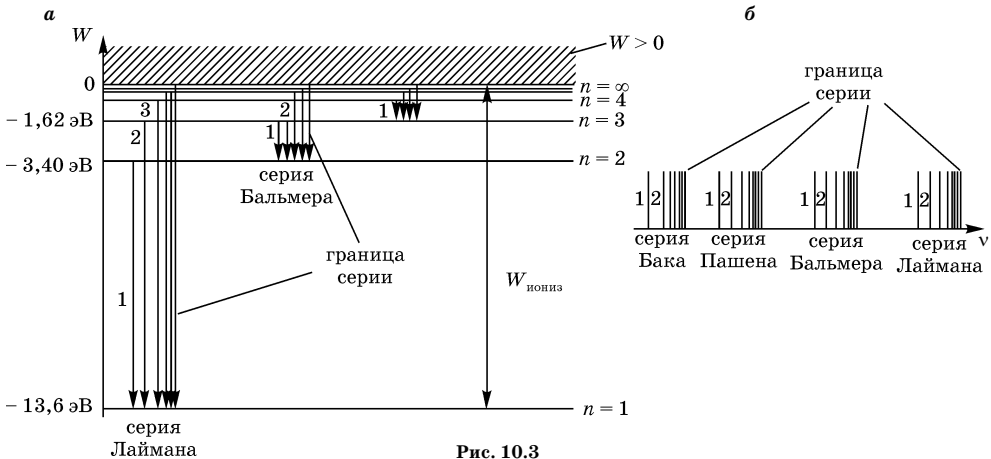


Рис. 10.3

**2-й постулат.** Поглощение или излучение квантов света (фотонов) происходит при переходах электрона из одного стационарного состояния в другое. Энергия излучаемого или поглощаемого фотона равна разности энергий стационарных состояний:

$$W_{\Phi} = W_{n_1} - W_{n_2}. \quad (10.9)$$

В формуле (10.9) электрон переходит со стационарного состояния с номером  $n_1$  на стационарное состояние с номером  $n_2$ .

Подставляя в формулу (10.9) выражение (10.7), можно получить формулы, описывающие все длины волн или частоты спектральных линий, излучаемых атомом водорода:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} &= -\frac{z^2 A}{n_1^2} - \left( -\frac{z^2 A}{n_2^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} &= R \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = R' \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Входящие в формулы (10.10) постоянные Ридберга имеют следующие значения:

$$R = \frac{A}{hc} = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}, \quad R' = \frac{A}{h} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}. \quad (10.11)$$

Как показывает опыт, формулы (10.10) описывают весь спектр излучения атомарного водорода. Все линии излучения группируются в серии линий (рис. 10.3б). В каждой серии линий выделяют головную линию (она изображается на рис. 10.3б под № 1), вторую линию (№ 2) и т. д. Расстояние по частотам для соседних линий с увеличением их номера уменьшается, и серия линий имеет четкую границу — границу серии.

Обычно выделяют серии Лаймана (она находится в ультрафиолетовой области) и Бальмера (видимая часть спектра ЭМВ), затем следуют серии Пашена, Бака, Пфунда и т. д.

Серия Лаймана образуется при переходах электрона с верхних уровней энергии на уровень с главным квантовым числом  $n_2$ , равным единице ( $n_2 = 1$ , а  $n_1 = 2, 3, 4, \dots$ , рис. 10.3б), для серии Бальмера  $n_2 = 2$ ,  $n_1 = 3, 4, 5, \dots$ , и т. д. При этом происходит излучение спектральных линий с длинами волн:

$$\begin{aligned} \text{серия Лаймана: } \frac{1}{\lambda} &= R \cdot \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \\ \text{серия Бальмера: } \frac{1}{\lambda} &= R \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что теория Бора имела внутренние противоречия, так как ее автор внес в классическую теорию несвойственные ей постулаты. Поэтому теория Бора не смогла объяснить спектры испускания следующего, второго в таблице Менделеева атома — гелия, не говоря уже об остальных атомах. К тому же в теории Бора ничего не говорится об интенсивности излучаемых спектральных линий.

### 10.1.3. ОПЫТ ФРАНКА И ГЕРЦА

Итак, согласно постулатам Бора *атом может принимать только определенные порции энергии*, которые соответствуют разности энергий между его стационарными состояниями. При переходе из возбужденного состояния в основное происходит излучение кванта энергии.

Наглядным подтверждением правильности постулатов Бора явились результаты опыта Франка и Герца (1913).

Схема опыта заключалась в следующем. В стеклянной трубке создавался вакуум, затем она заполнялась парами ртути под низким давлением (порядка 130 Па). В трубке находились катод  $K$ , анод  $A$ , а между ними располагалась сетка  $C$  (рис. 10.4а). Катод  $K$  подогревался и за счет явления термоэлектронной эмиссии испускал электроны, которые летели к сетке  $C$ . Между катодом и сеткой прикладывалось ускоряющее напряжение  $U$ , пройдя которое электроны приобретали кинетическую энергию, равную  $mv^2/2 = |e|U$ .

Между сеткой и анодом создавалась задерживающая разность потенциалов, равная  $U_1 = -0,5$  В (тормозящее электрическое поле уменьшало скорость электронов). Измеряя силу тока, текущего между анодом и катодом, снимали вольт-амперную характеристику (ВАХ,  $I = I(U)$ , рис. 10.4б). На начальном участке характеристики при  $U$  меньше 4,9 В сила тока возрастает, так как при повышении напряжения все большая часть электронов, вылетающих из катода, достигает анода (рис. 10.4б).

В обычных условиях при упругих столкновениях между электронами и атомами ртути напряжение  $U_1$  не сказывается на виде ВАХ. Действительно, упругое столкновение электрона с атомом ртути аналогично упругому взаимодействию молекулы со стенкой, при котором практически не происходит изменения по модулю скорости молекулы из-за большого различия в ее массе и массе стенки. Поэтому электроны, подлетая к сетке, приобретают кинетическую энергию, достаточную для преодоления тормозящего электрического поля и попадания на анод.

Ситуация резко изменяется, если происходят **неупругие столкновения** электронов с атомами ртути, тогда электрон полностью отдает приобретенную им кинетическую энергию атому, скорость электрона резко уменьшается, и он не сможет преодолеть задерживающую разность потенциалов  $U_1$ . Это должно приводить к падению силы тока, протекающего по цепи. Погло-

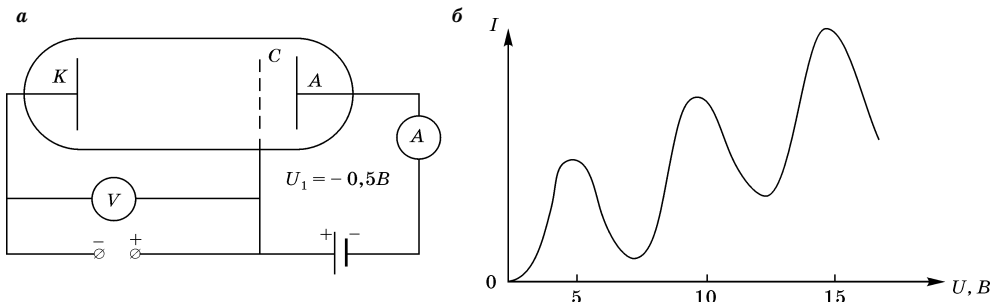


Рис. 10.4

щение атомом энергии от электрона означает, что атом переходит в возбужденное состояние.

Результаты опыта оказались следующими. До  $U = 4,9$  В наблюдается монотонное увеличение силы тока с повышением напряжения (это объясняется тем, что наблюдаются только упругие столкновения электронов с атомами ртути), затем при напряжении  $U = 4,9$  В происходит резкое падение силы тока (электроны испытывают неупругие столкновения с атомами ртути, отдают им полностью свою кинетическую энергию и не могут преодолеть задерживающую разность потенциалов  $U_1$ ). При дальнейшем повышении напряжения ток начинает снова возрастать (электроны, испытавшие неупругое столкновение с атомами ртути, получают в пространстве между катодом и сеткой достаточную кинетическую энергию от ускоряющего электрического поля для преодоления  $U_1$  и достигают анода). При напряжении  $U = 9,8$  В  $= 2 \cdot 4,9$  В электроны испытывают два неупругих столкновения с атомами ртути, теряют полностью свою кинетическую энергию, что сопровождается вторым резким падением силы тока в цепи. Такое поведение наблюдается также при напряжениях, кратных значению  $4,9$  В, то есть  $14,7$  В и т. д. (рис. 10.4б).

Следовательно, полученная ВАХ свидетельствует о том, что энергия атома в стационарных состояниях принимает только определенные значения. Этот факт подтверждает первый постулат Бора. Наименьшая порция энергии  $\Delta W$ , которую может поглотить атом, соответствует переходу электрона из основного состояния ( $W_1$ ) на первое возбужденное ( $W_2$ ), для атомов ртути  $\Delta W = W_2 - W_1 = |e|U = 4,9$  эВ. При обратных переходах (с первого возбужденного стационарного состояния в основное стационарное состояние) должны излучаться кванты энергии (фотоны), соответствующие излучению с длиной волны  $\lambda = 2\pi c / (W_2 - W_1) = 254$  нм, что соответствует ультрафиолетовому излучению. Этот факт был также подтвержден экспериментом.

Подводя итог, можно сделать вывод о том, что результаты опыта Франка и Герца полностью подтвердили постулаты Бора о существовании стационарных состояний атома и механизме излучения атома. Теория Бора сыграла большое значение в развитии науки в начале XX века, так как систематизировала имеющиеся в большом количестве опытные данные по излучению атомов.

#### 10.1.4. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА, ЕГО РЕШЕНИЕ. ГЛАВНОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО. ОРБИТАЛЬНОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО

В квантовой механике при рассмотрении задачи о поведении электрона в атоме водорода необходимо решить уравнение Шредингера следующего вида:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{z|e|^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = W\psi. \quad (10.12)$$

Удобно решать такое уравнение в сферической системе координат (см. рис. 10.5а), так как потенциальное поле, в котором движется электрон, является сферически симметричным ( $U(r, \theta, \varphi) = U(r)$ ).

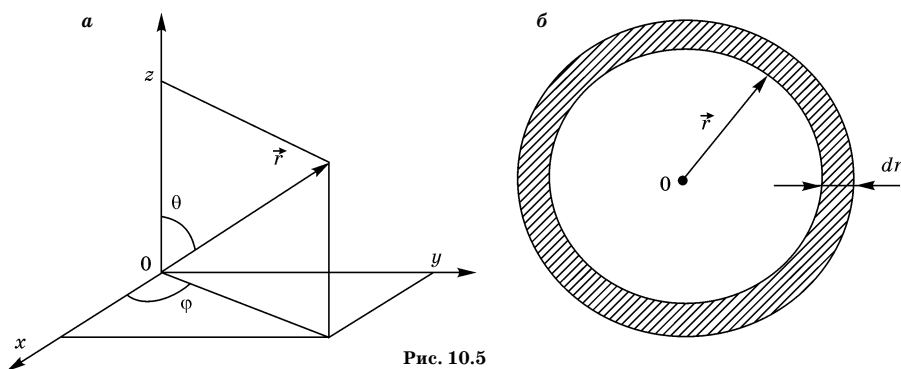


Рис. 10.5

Решение уравнения Шредингера является достаточно сложным и здесь не приводится. Из него следует, что собственные волновые функции этой задачи  $\psi(r, \theta, \varphi) = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$  нумеруются набором трех квантовых чисел  $n$ ,  $l$  и  $m$ , которые называются главным квантовым числом  $n$ , орбитальным (азимутальным) квантовым числом  $l$  и магнитным квантовым числом  $m$ .

Рассмотрим каждое квантовое число подробнее.

Энергетический спектр электрона в атоме водорода и в водородоподобных ионах полностью определяется главным квантовым числом  $n$ , энергетический спектр является дискретным и сходящимся.

Все выводы теории Бора относительно энергетического спектра и спектров излучения (п. 10.1.2) справедливы и здесь. Приведем формулы для энергетического спектра электронов, для длин волн и частот спектральных линий, справедливые как для атома водорода, так и для водородоподобных ионов:

$$W_n = -\frac{z^2 A}{n^2} \quad n=1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (10.13)$$

$$\frac{1}{\lambda} = z^2 R \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = z^2 R' \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (10.14)$$

где  $z$  — заряд иона.

В квантовой механике понятие траектории для электрона отсутствует, то есть электроны не совершают движение по орбитам. Но, как показывает решение уравнения Шредингера, понятия орбитального механического и магнитного момента электронов остаются, остается справедливым гиромагнитное отношение (10.2) и тот факт, что направления векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{p}_m$  будут противоположны (см. п. 10.1.2).

Новым в квантовой механике является тот факт, что для квантования модулей этих векторов вводится новое квантовое число — орбитальное квантовое число  $l$ :

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad p_{ml} = \frac{|e|}{2m} L_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (10.15)$$

где в формулу введена новая постоянная — **магнетон Бора**  $\mu_B$ , определяющий единицу квантования магнитного момента электрона

$$\mu_B = \frac{\hbar |e|}{2m_e} = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}. \quad (10.16)$$



Орбитальное квантовое число  $l$  при фиксированном значении  $n$  принимает следующие значения:

$$n = \text{const}: l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1. \quad (10.17)$$

Всего  $l$  принимает  $n$  значений.

Принято состояния с разными значениями  $l$  обозначать буквами латинского алфавита, а именно состояния с  $l = 0$  называют  $s$ -состоянием, состояния с  $l = 1, 2, 3, 4$  называют соответственно  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -,  $e$ -состояниями и т. д.

Рассмотрим распределение электронного заряда внутри атома и начнем с  $s$ -состояния. Как показывает решение уравнения Шредингера, волновые функции в  $s$ -состоянии являются сферически симметричными:  $\psi_{ns}(r, \theta, \varphi) = \psi_{ns}(r)$ . Поэтому здесь удобнее рассматривать вероятность обнаружения электрона в шаровых слоях единичной толщины (рис. 10.5б):

$$P_{\text{кв}}(r) = \frac{dP(r)}{dr} = \frac{|\psi(r)|^2 dV}{dr} = \frac{|\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr}{dr} = |\psi(r)|^2 4\pi r^2.$$

Для волновой функции в квантовом состоянии с  $n = 1$  и  $l = 0$  расчеты проводят к следующему выражению:

$$\psi_{1s} = A \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right), \quad (10.18)$$

где  $r_1$  — радиус первой боровской орбиты (формула (10.6)).

График плотности вероятности  $P_{1s}(r)$  обнаружения электрона внутри атома в  $1s$ -состоянии приведен на рис. 10.6а. Из него видно, что вероятность найти электрон внутри атома отлична от нуля на всех расстояниях от ядра. Электрон внутри атома образует шаровое облако переменной плотности — большей плотности электронного облака соответствует большая вероятность обнаружения электрона (рис. 10.6б). Такое поведение электрона не согласуется с классическим представлением о движении электрона по орбите, справедливым в теории Бора. Взаимосвязь с теорией Бора здесь заключается в том, что наибольшая вероятность обнаружения электрона внутри атома приходится на расстояние, соответствующее радиусу первой боровской орбиты (рис. 10.6а).

Для электрона в  $2s$ -состоянии электронное облако также будет шаровым, но здесь наблюдаются два расстояния, на которых плотность электронного

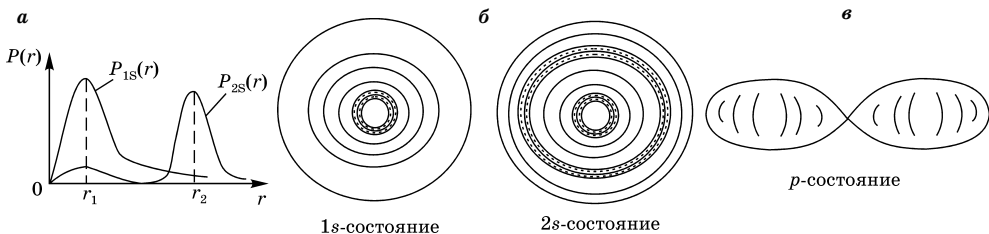


Рис. 10.6

облака является максимальной, они соответствуют радиусам первой и второй стационарных орбит электрона в теории Бора (см. рис. 10.6б).

Для электрона в состояниях с  $l > 0$  волновые функции будут зависеть от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , то есть плотность электронного облака будет иметь определенную направленность в пространстве. В этих случаях удобнее рассматривать вероятность попадания электрона в объем  $dV = dx dy dz$ . Так, например, для  $p$ -состояния ( $l = 1$ ) плотность вероятности обнаружения электрона, или плотность электронного облака, представляет собой пространственную восьмерку (рис. 10.6в). Для остальных состояний с  $l > 1$  электронные облака принимают более сложный вид.

Отметим, что вид электронного облака в атоме определяется в основном главным и орбитальным квантовыми числами.

### 10.1.5. МАГНИТНОЕ ОРБИТАЛЬНОЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ КВАНТОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ ЭЛЕКТРОНА

В квантовой механике, в отличие от классической механики, проекции орбитального механического момента  $\vec{L}_l$  и магнитного момента  $\vec{p}_m$  электрона на направление внешнего магнитного поля (это направление обычно выбирают вдоль оси  $Oz$ ) квантуются, то есть принимают дискретный набор значений. Это явление называют **пространственным квантованием**. Пространственное квантование магнитных моментов атомов было подтверждено в опытах О. Штерна и В. Герлаха (см. п. 10.2.4).

Для описания квантования этих проекций вводят новое квантовое число — магнитное квантовое число  $m$ :

$$L_{lz} = m\hbar, \quad p_{mz} = \mu_B m. \quad (10.19)$$

Для фиксированного значения  $l$  магнитное орбитальное квантовое число  $m$  принимает  $2(l + 1)$  значение:

$$m = -l, -(l - 1), (l - 2), \dots, 0, 1, 2, (l - 1), l. \quad (10.20)$$

Оказывается, что одновременно точно известна только одна проекция векторов  $\vec{L}_l$  и  $\vec{p}_m$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , то есть проекции этих векторов ( $L_{lx}$ ,  $L_{ly}$ ,  $L_{lz}$ ), ( $p_{mx}$ ,  $p_{my}$ ,  $p_{mz}$ ) являются сопряженными величинами.

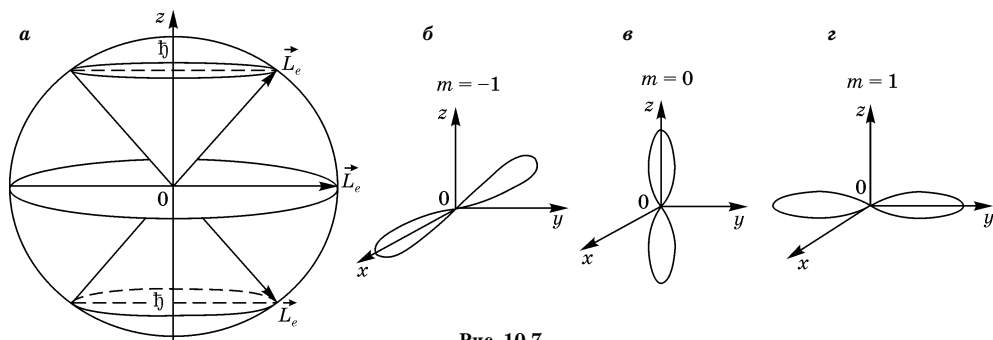


Рис. 10.7

Для того чтобы наглядно представить правила квантования проекций векторов  $\vec{L}_l$  и  $\vec{p}_m$  электрона на направление внешнего магнитного поля, используется векторная модель. В качестве примера построим ее для орбитального механического момента  $\vec{L}_l$  электрона в  $p$ -состоянии ( $l = 1, m = -1, 0, 1$ , рис. 10.7а).

Сначала рассчитываем модуль вектора  $\vec{L}_l$  и его проекции на ось  $Oz$ :  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)} = \hbar\sqrt{2}$ ,  $L_{lZ} = -\hbar, 0, \hbar$ . Затем из начала оси  $Oz$  проводим векторы  $\vec{L}_l$  так, чтобы их концы находились на окружности радиуса, равного модулю вектора  $\vec{L}_l$ , а их проекции соответствовали значениям  $-\hbar, 0, \hbar$ . Для того чтобы точно известной была только проекция векторов  $\vec{L}_l$  на ось  $Oz$ , приводим векторы  $\vec{L}_l$  во вращение вокруг этой оси.

Отметим, что магнитное квантовое число определяет ориентацию электронного облака во внешнем магнитном поле. На рис. 10.7б приведены ориентации электронного облака для электрона, находящегося в  $p$ -состоянии.

#### 10.1.6. СПИНОВЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТЫ ЭЛЕКТРОНА. КРАТНОСТЬ ВЫРОЖДЕНИЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ. ПРАВИЛА ОТБОРА

**Спиновые механический и магнитный моменты электрона.** Оказалось, что рассмотренное выше решение задачи на атом водорода является неполным. На это указывали различные факты. К ним, например, можно отнести опыты по определению магнитных моментов атомов, проведенные Штерном и Герлахом (см. раздел 10.2.4), магнитомеханические опыты Эйнштейна и де Хааса по определению гиромангнитного отношения для металлов. Также на это указывает анализ спектроскопических данных, в частности появление дублетов желтых линий, то есть близко расположенные по длинам волн двух желтых линий в спектре излучения щелочных металлов.

Все это привело Уленбека и Гаудсмита (1925) к гипотезе существования у электрона собственного механического момента  $\vec{L}_s$ . Сначала считали, что собственный механический момент  $\vec{L}_s$  электрона  $\vec{L}_s$  связан с тем, что электрон вращается вокруг своей оси, но это предположение оказалось ошибочным, так как приводило к значениям скоростей вращения, превышающих скорость света в вакууме. Теперь считается, что собственный механический момент  $\vec{L}_s$ , его еще называют **спином** или спиновым моментом (от *англ.* spin — вращение), не связан с движением электрона как целого, а является таким же неотъемлемым свойством электрона, как его заряд, масса и т. д.

Спину  $\vec{L}_s$  электрона соответствует собственный магнитный момент  $\vec{p}_{mS}$ , и именно их существование и устраняет расхождение между теорией и экспериментом. Модули векторов  $\vec{L}_s$  и  $\vec{p}_{mS}$  для электрона квантуются, то есть принимают дискретный набор значений. Для описания квантования модулей этих моментов вводится спиновое квантовое число  $s$ :

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad p_{mS} = 2\mu_B\sqrt{s(s+1)}, \quad (10.21)$$

которое для электрона принимает только одно значение, равное  $1/2$ .

Гиромагнитное отношение для собственных  $\vec{L}_S$  и  $\vec{p}_{mS}$  моментов электрона в два раза больше гиромагнитного отношения для орбитальных моментов

$$\frac{|\vec{p}_{mS}|}{|\vec{L}_S|} = \frac{|e|}{m_e}, \quad (10.22)$$

что подтверждается магнитомеханическими экспериментами, проведенными Эйнштейном и де Хаасом.

Оказывается, что квантуются также и проекции спина  $\vec{L}_S$ , и собственного магнитного момента  $\vec{p}_{mS}$  на направление внешнего магнитного поля. Для описания квантования проекций этих векторов вводится магнитное спиновое квантовое число  $m_S$ :

$$L_{SZ} = \hbar m_S, \quad p_{mSZ} = 2\mu_B m_S. \quad (10.23)$$

Магнитное спиновое квантовое число принимает для электрона два значения:  $m_S = S = \pm 1/2$ .

Все частицы по значению их спинового квантового числа  $S$  разбиваются на два класса частиц. Оказывается, что поведение системы тождественных частиц определяется значением проекции их спина (собственного механического момента)  $L_{SZ}$  на направление внешнего магнитного поля, то есть спиновым квантовым числом  $S$ . Оно определяет полную волновую функцию системы тождественных частиц и соответственно особенности их поведения.

В современной физике  $L_{SZ}$  принято указывать в единицах  $\hbar$  ( $L_{SZ} = \pm S$ ) и называть спином. Частицы, у которых спин равен полуцелому числу, называют **фермионами**. Для них справедлив **принцип Паули**, согласно которому в системе тождественных фермионов в одном квантовом состоянии может находиться только один фермион, то есть в системе не может быть двух фермионов с одинаковым набором всех квантовых чисел. Для **бозонов**, частиц с целым спином, в одном квантовом состоянии может находиться сколь угодно много бозонов (говорят, что бозоны — «коллективисты», а фермионы — «индивидуалисты»).

**Кратность вырождения уровней энергии.** Итак, состояние электрона в атоме определяется набором четырех квантовых чисел ( $n, l, m, m_S$ ), спиновое квантовое число в этот набор не включается, так как оно принимает только одно значение.

Из решения задачи, касающейся атома водорода, следует, что энергия электрона в атоме водорода определяется только главным квантовым числом  $n$ . Поэтому на одном уровне энергии могут находиться несколько квантовых состояний электрона. *Квантовые состояния с одинаковым значением энергии называют вырожденными, а их число — кратностью вырождения уровня энергии.* Учитывая значения, которые принимают квантовые числа, можно оценить кратность вырождения уровней энергии в атоме водорода:

$$N_{\text{кр}} = 2 \sum_{l=0}^{n-1} l \cdot (l+1) = 2n^2. \quad (10.24)$$

Из формулы (10.24) следует, что все уровни энергии в атоме водорода являются вырожденными, и с увеличением  $n$  кратность вырождения нарастает.

**Правила отбора.** Оказывается, что в спектрах испускания и поглощения атомами фотонов возможны только такие переходы, которые разрешены правилами отбора. Так, для электрона, движущегося в центрально-симметричном поле ядра (случай атома водорода и водородоподобных атомов), разрешены лишь переходы между уровнями, для которых орбитальное квантовое число  $l$  может изменяться на единицу ( $\Delta l = \pm 1$ ), а магнитное квантовое число  $m$  — на величину  $\Delta m = 0, \pm 1$ .

Это приводит к тому, что в сериях линий излучения атомарного водорода возможны не все переходы. Например, для серии Лаймана переходы происходят на уровень с главным квантовым числом  $n = 1$ , где находятся только  $s$ -состояния ( $l = 0$ ). При этом возможны только переходы с верхних  $np$  уровней ( $n > 1$ ) на  $1s$ -уровень:  $np \rightarrow 1s$ . Для серии Бальмера переходы происходят на уровень с  $n = 2$ , где находятся  $s$ - и  $p$ -состояния. Поэтому правила отбора для серии Бальмера разрешают следующие переходы:  $n > 2$   $np \rightarrow 2s$   $ns \rightarrow 2p$   $nd \rightarrow 2p$ .

Невозбужденный атом водорода находится в  $1s$ -состоянии, поэтому при поглощении им фотона возможны только переходы следующего вида:  $1s \rightarrow np$ .

Количественной характеристикой разрешенных квантовых переходов является их вероятность, определяющая интенсивность спектральных линий. Квантовая теория, в отличие от теории Бора, позволяет их оценить, при этом наблюдается согласие расчетов с экспериментом.

## 10.2. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ

### 10.2.1. ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В многоэлектронном атоме в поле ядра движутся  $z$  электронов, которые взаимодействуют друг с другом и ядром. Задача становится многочастичной и поэтому точно не решается. Причем волновые функции для многоэлектронного атома имеют смысл условной вероятности и пользоваться ими достаточно трудно. Так, например, для атома гелия, в поле ядра которого движутся два электрона, квадрат модуля волновой функции  $|\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)|^2$  имеет следующий смысл. Он дает вероятность того, что один из двух электронов находится в единичном объеме около точки пространства с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  в момент времени  $t$ , при условии, что второй электрон в этот момент времени находится в единичном объеме около точки с координатами  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Для решения задачи в этом случае можно, например, использовать приближение самосогласованного поля: считается, что один электрон движется в эффективном самосогласованном поле ядра и остальных  $(z - 1)$  электронов. Тогда задача становится одночастичной, что позволяет применять для описания поведения электрона тот же набор квантовых чисел  $(n, l, m, m_s)$ , что и для атома водорода.

Эффективное поле  $U(r)$ , в котором движется электрон, называют самосогласованным, так как движение самого электрона влияет на вид этого

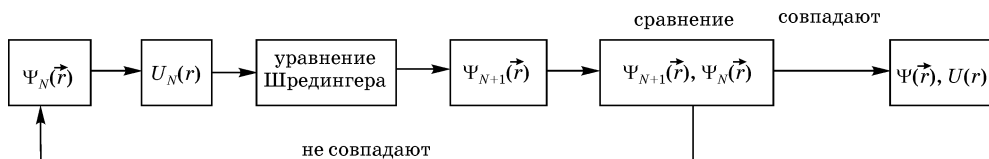


Рис. 10.8

потенциального поля. Схема расчета потенциального поля в этом случае следующая (рис. 10.8).

Задается вид волновой функции электрона, в который входят варьируемые параметры. Выбираются начальные значения для этих параметров, и по известной волновой функции  $\psi_1(\vec{r})$  рассчитывают потенциальное поле, в котором движется электрон, и решают уравнение Шредингера. Полученное решение для волновой функции  $\psi_2(\vec{r})$  сравнивают с начальной волновой функцией  $\psi_1(\vec{r})$ . Если они не совпадают, то изменяют параметры этой волновой функции и снова решают уравнение Шредингера и т. д. Процедура повторяется до тех пор, пока на определенном этапе с номером  $N$  исходная волновая функция  $\psi_N(\vec{r})$  и полученная в результате решения уравнения Шредингера волновая функция  $\psi_{N+1}(\vec{r})$  не совпадут.

Найденное таким образом сферически симметричное потенциальное поле  $U(r)$  будет иметь более сложную зависимость от  $r$ , чем используемый при решении задачи на атом водорода вид  $U(r)$  (формула (10.1)). Это приводит к тому, что снимается вырождение по орбитальному квантовому числу  $l$ , то есть энергия электрона в многоэлектронном атоме будет зависеть также и от значения  $l$ :  $W = W(n, l)$ .

Для классификации электронных состояний вводятся следующие понятия.

**Слой** — группа электронных состояний с фиксированным значением главного квантового числа  $n$ . Слои принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита:

$n = 1$ :  $K$ -слой;  $n = 2$ :  $L$ -слой;  $n = 3$ :  $M$ -слой;  $n = 4$ :  $N$ -слой и т. д.

Число электронов в слое равно кратности вырождения уровней в атоме водорода, то есть равно  $2n^2$ .

**Оболочка** — группа электронных состояний с фиксированными значениями главного  $n$  и орбитального  $l$  квантовых чисел. Для обозначения оболочки указывают главное квантовое число и в виде буквы орбитальное квантовое число. Так, например,  $1s$ -оболочка,  $2p$ -оболочка,  $3d$ -оболочка и т. д. Число электронов в оболочке равно  $2l(l + 1)$ , число оболочек в слое равно значению главного квантового числа  $n$  слоя.

Для оболочек, для которых  $l \neq 0$ , появляется дополнительное снятие вырождения, то есть внутри оболочки имеются состояния с различными значениями энергии.

Это можно объяснить спин-орбитальным взаимодействием. Действительно, можно считать, что в магнитном поле, создаваемом орбитальным магнитным моментом  $\vec{L}_l$ , находится спиновый магнитный момент  $\vec{p}_{mS}$  элек-

трона. Тогда разным проекциям спинового момента в этом магнитном поле будет соответствовать разная энергия.

Наиболее полное снятие вырождения будет происходить во внешнем магнитном поле, когда энергия электрона будет зависеть от всех квантовых чисел. Как показывают расчеты, для небольших значений главного квантового числа выполняются следующие неравенства:

$$\Delta W (\text{между слоями}) \gg \Delta W (\text{между оболочками внутри слоя}) \gg \Delta W (\text{внутри слоя}),$$

согласно которым расстояние по энергии между слоями значительно превосходит расстояние по энергии между оболочками внутри одного слоя, а оно в свою очередь будет значительно больше расстояния между состояниями внутри одной оболочки. Поэтому можно с достаточной степенью точности для энергии электрона в многоэлектронном атоме записать следующее соотношение:

$$W(n, l, m, m_s) \approx W(n) = -\frac{(z - \sigma_n)^2 A}{n^2}. \quad (10.25)$$

Входящая в формулу величина  $\sigma_n$  называется **постоянной экранирования**, она учитывает экранировку поля ядра электронами, находящимися ближе к ядру, чем рассматриваемый электрон, и влияние на движение отдельного электрона других электронов атома. Так, для электрона, находящегося в  $K$ -слое,  $\sigma_1$  равно единице, так как в  $K$ -слое находятся два электрона, и один электрон экранирует поле ядра для другого электрона. Для  $L$ -слоя  $\sigma_2 \approx 8$ , поскольку в двух слоях находится 10 электронов и примерно около восьми электронов экранируют поле ядра для электрона в  $L$ -слое.

На рис. 10.9а приведена упрощенная схема энергетических уровней многоэлектронного атома. Как видно, она напоминает схему энергетических уровней атома водорода. Если же рассмотреть уровни энергии одного слоя в

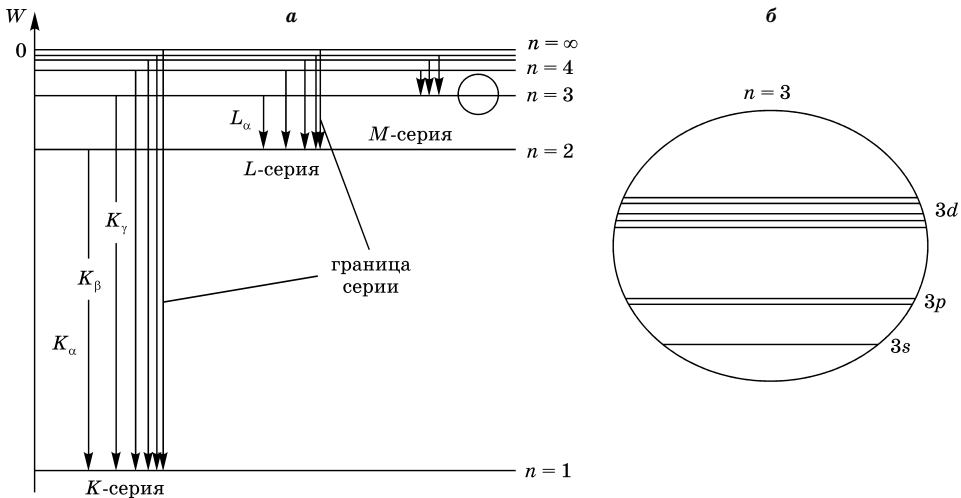


Таблица 10.1

| $n$ | Слой | $l$ | Оболочка | $m$                    | $m_s$     | Число электронных состояний в оболочке | Число электронных состояний в слое |
|-----|------|-----|----------|------------------------|-----------|----------------------------------------|------------------------------------|
| 1   | $K$  | 0   | $1s$     | 0                      | $\pm 1/2$ | 2                                      | 2                                  |
| 2   | $L$  | 0   | $2s$     | 0                      | $\pm 1/2$ | 2                                      | 8                                  |
|     |      | 1   | $2p$     | -1, 0, 1               | $\pm 1/2$ | 6                                      |                                    |
| 3   | $M$  | 0   | $3s$     | 0                      | $\pm 1/2$ | 2                                      | 18                                 |
|     |      | 1   | $3p$     | -1, 0, 1               | $\pm 1/2$ | 6                                      |                                    |
|     |      | 2   | $3d$     | -2, -1, 0, 1, 2        | $\pm 1/2$ | 10                                     |                                    |
| 4   | $N$  | 0   | $4s$     | 0                      | $\pm 1/2$ | 2                                      | 32                                 |
|     |      | 1   | $4p$     | -1, 0, 1               | $\pm 1/2$ | 6                                      |                                    |
|     |      | 2   | $4d$     | -2, -1, 0, 1, 2        | $\pm 1/2$ | 10                                     |                                    |
|     |      | 3   | $4f$     | -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 | $\pm 1/2$ | 14                                     |                                    |

увеличенном масштабе, то тогда можно увидеть внутри одного слоя состояния с разными значениями энергии (см. рис. 10.9б).

Приведем таблицу распределения электронных состояний по слоям и оболочкам для многоэлектронных атомов (табл. 10.1).

При заполнении таблицы было учтено, что квантовые числа ( $n, l, m, m_s$ ) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
 n &= 1, 2, 3, \dots; \\
 n = \text{const}: l &= 0, 1, 2, \dots, n-1; \\
 l = \text{const}: m &= -l, -(l-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (l-1), l; \\
 m_s &= \pm \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

В качестве примера рассчитаем число электронных состояний в атоме, если для них  $n = 5$ , а  $m = -2$ . С этой целью распишем все электронные состояния с фиксированными значениями  $n = 5$  и  $m = -2$ :

$$n=5 \Rightarrow l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \begin{pmatrix} 0 & m_s = \pm 1/2 \\ -1, 0, 1 & m_s = \pm 1/2 \\ -2, -1, 0, 1, 2 & m_s = \pm 1/2 \\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 & m_s = \pm 1/2 \\ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 & m_s = \pm 1/2 \end{pmatrix}.$$

Видно, что число электронных состояний со значениями  $n = 5$  и  $m = -2$  равно шести, где учтено, что магнитное спиновое квантовое число принимает два значения независимо от значений остальных квантовых чисел.

### 10.2.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ РЕНТГЕНОВСКИЕ СПЕКТРЫ

Можно провести аналогию между сериями линий излучения атомарного водорода и спектром излучения многоэлектронного атома (см. рис. 10.9). Необходимо учесть, что для многоэлектронного атома входящий в выражение для энергии электрона квадрат заряда ядра  $z^2$  принимает значения порядка  $(50)^2 = 2500$ , что приводит к смещению спектральных линий в область рент-



геновского излучения. В этом случае серии Лаймана будет соответствовать  $K$ -серия, серии Бальмера —  $L$ -серия и т. д. В каждой серии линий для многоэлектронных атомов по аналогии с атомом водорода выделяют главную линию серии ( $K_\alpha, L_\alpha, M_\alpha, \dots$ ), вторую линию серии ( $K_\beta, L_\beta, M_\beta, \dots$ ), третью линию серии ( $K_\gamma, L_\gamma, M_\gamma, \dots$ ) и т. д.

Это рентгеновское излучение называют **характеристическим рентгеновским излучением**, так как оно является специфичным для каждого химического элемента и позволяет найти его по виду этого спектра.

В подтверждение этого можно отметить закон, установленный экспериментально Мозли в 1913 г.: *корень квадратный из частоты  $\nu$  характеристического рентгеновского излучения элемента и его атомный номер  $z$  связаны линейной зависимостью*

$$\sqrt{\nu/R'} = C(z - \sigma), \quad (10.26)$$

где  $R'$  — постоянная Ридберга (см. формулу (10.11)), а  $\sigma, C$  — постоянные величины, не зависящие от порядкового номера элемента. Величина  $C$  для каждой линии принимает свое значение, а  $\sigma$  — одинаковое значение для всех линий одной серии (например для  $K$ -серии  $\sigma = 1$ , для  $L$ -серии  $\sigma = 7,5$  и т. д.).

В соответствии с законом Мозли в каждой серии линий увеличение  $z$  на единицу увеличивает  $\sqrt{\nu}$  на одну и ту же величину. Это позволяет расположить элементы в ряд в соответствии с возрастанием порядкового номера  $z$ .

На рис. 10.10 в качестве примера приведены зависимости  $\sqrt{\nu}$  для главных линий  $K_\alpha$  и  $L_\alpha$  соответственно  $K$ - и  $L$ -серий от порядкового номера  $z$ ; видно, что точки ложатся на прямые линии с разными углами наклона для каждой серии.

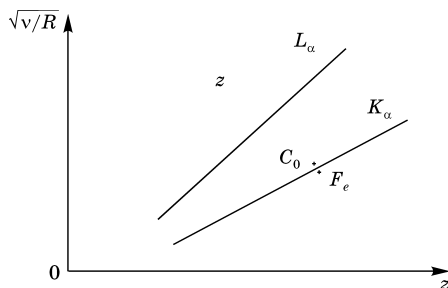


Рис. 10.10

Можно привести один факт из истории, подтверждающий закон Мозли. При построении графиков зависимости  $\sqrt{\nu}$  от  $z$  оказалось, что элементы Fe и Co не попадают на прямые линии (рис. 10.10). В соответствии с законом Мозли необходимо было переставить местами эти элементы в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева, что и было подтверждено дальнейшими исследованиями.

Можно показать, что квантовая теория многоэлектронных атомов позволяет объяснить закон Мозли.

Действительно, в соответствии с формулой (10.25) для корня квадратного из частоты  $K_\alpha$ -линии различных атомов можно записать

$$h\nu = W_2 - W_1 = -\frac{(z - \sigma_2)^2 A}{2^2} - \left( -\frac{(z - \sigma_1)^2 A}{1^2} \right) = \frac{3}{4} A(z - 1)^2, \Rightarrow \sqrt{\nu/R'} = \frac{\sqrt{3}}{2} (z - 1), \quad (10.27)$$

где принято, что  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ .

Закон Мозли достаточно точно выполняется для легких элементов, для элементов со значениями  $z \geq 50$  наблюдаются отклонения, приводящие

к смещению спектра рентгеновского излучения в сторону больших частот. Это приводит к тому, что постоянная экранирования  $\sigma$  может принимать различные значения для разных элементов ( $\sigma$  становится меньше единицы для линий  $K$ -серии, а для линий  $L$ -серии отклоняется от значения, равного 7,5).

### 10.2.3. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

Заполнение электронных состояний в атомах происходит в соответствии с принципом Паули и условием минимальности энергии. **Принцип Паули** утверждает, что в любой квантовой системе не может быть двух электронов с одинаковым набором всех квантовых чисел (п. 10.1.6). В соответствии с **условием минимальности энергии** при прочих равных условиях электрон занимает состояния с наименьшей энергией. Уменьшение числовых значений квантовых чисел  $n$  и  $l$  приводит к уменьшению энергии электрона в атоме:  $\downarrow n \Rightarrow \downarrow W$ ,  $n = \text{const} : \downarrow l \Rightarrow \downarrow W$ , поэтому электроны занимают сначала состояния с наименьшими значениями  $n$  и  $l$ .

**Электронная конфигурация** показывает распределение электронов по заполненным оболочкам атома, ее удобно применять при анализе взаимосвязи различных свойств элементов со степенью заполнения электронных оболочек атомов.

Итак, первым элементом Периодической системы является атом водорода (H, электронная конфигурация  $1s^1$ ). Для него единственный электрон занимает состояние с наименьшей энергией. Для второго элемента, гелия (He, электронная конфигурация  $1s^2$ ), происходит заполнение  $1s$ -оболочки и одновременно заполняется  $K$ -слой (табл. 10.2).

С лития (Li) начинается заполнение  $L$ -слоя. В соответствии с принципом Паули третий электрон не может находиться в  $K$ -слое, поэтому он занимает наиболее выгодное по энергии свободное состояние, то есть состояние в  $L$ -слое.

На атоме бериллия (Be, электронная конфигурация  $1s^2 2s^2$ ) заканчивается заполнение  $2s$ -оболочки  $L$ -слоя, при переходе от атома бора (B, электронная конфигурация  $1s^2 2s^2 2p^1$ ) к атому неона (Ne, электронная конфигурация  $1s^2 2s^2 2p^6$ ), происходит заполнение  $2p$ -оболочки и заполнение  $L$ -слоя (табл. 10.2).

*Итак, при переходе от одного элемента к другому происходит периодическое заполнение внешних электронных оболочек атомов. Это приводит к периодичности свойств элементов, что связано с тем, что многие их физико-химические свойства определяются, в основном, электронами внешних оболочек.*

Так, например, элементы Периодической системы, для которых внешней является  $s$ -оболочка и на ней находится только один электрон, представляют собой щелочные металлы (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr — первая группа элементов Периодической системы), они легко вступают в химические реакции, отдавая этот электрон.

**Заполнение электронных оболочек и слоев  
в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева**

| № п/п | Элемент | Слой     | Оболочка | Электронная конфигурация |        |        |        |        |           |        |
|-------|---------|----------|----------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|-----------|--------|
| 1     | H       | <i>K</i> | $1s$     | $1s^1$                   |        |        |        |        |           |        |
| 2     | He      |          |          | $1s^2$                   |        |        |        |        |           |        |
| 3     | Li      | <i>L</i> | $2s$     | $1s^2$                   | $2s^1$ |        |        |        |           |        |
| 4     | Be      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ |        |        |        |           |        |
| 5     | B       |          | $2p$     | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^1$ |        |        |           |        |
| 6     | C       |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^2$ |        |        |           |        |
| 7     | N       |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^3$ |        |        |           |        |
| 8     | O       |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^4$ |        |        |           |        |
| 9     | F       |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^5$ |        |        |           |        |
| 10    | Ne      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ |        |        |           |        |
| 11    | Na      | <i>M</i> | $3s$     | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^1$ |        |           |        |
| 12    | Mg      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ |        |           |        |
| 13    | Al      |          | $3p$     | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3p^1$ |        |           |        |
| ...   | ...     |          |          | ...                      | ...    | ...    | ...    |        |           |        |
| 18    | Ar      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ |           |        |
| 19    | K       | <i>N</i> | $4s$     | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | —         | $4s^1$ |
| 20    | Ca      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | —         | $4s^2$ |
| 21    | Sc      | <i>M</i> | $3d$     | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^1$    | $4s^2$ |
| 22    | Ti      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^2$    | $4s^2$ |
| 23    | V       |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^3$    | $4s^2$ |
| 24    | Cr      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^5$    | $4s^1$ |
| 25    | Mn      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^5$    | $4s^2$ |
| 26    | Fe      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^6$    | $4s^2$ |
| 27    | Co      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^7$    | $4s^2$ |
| 28    | Ni      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^8$    | $4s^2$ |
| 29    | Cu      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^{10}$ | $4s^1$ |
| 30    | Zn      |          |          | $1s^2$                   | $2s^2$ | $2p^6$ | $3s^2$ | $3p^6$ | $3d^{10}$ | $4s^2$ |

Если же на внешней  $s$ -оболочке элементов находятся два электрона, то такие элементы также являются металлами (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra, их называют щелочно-земельными металлами, они находятся во второй группе Периодической системы). Они также легко вступают в химические реакции.

Другим наглядным примером периодичности свойств могут служить элементы, у которых две электронные  $s$ - и  $p$ -оболочки внешнего слоя являются полностью заполненными. Это могут быть оболочки  $L$ -слоя (Ne,  $2s^22p^6$ ),  $M$ -слоя (Ar,  $3s^23p^6$ ),  $N$ -слоя (Kr  $4s^24p^6$ ),  $O$ -слоя (Xe,  $5s^25p^6$ ) и  $P$ -слоя (Rn,  $6s^26p^6$ ). Исключением в этой группе элементов является гелий (He), так как у него отсутствует заполненная  $p$ -оболочка.

Такая электронная конфигурация приводит к увеличенной энергии связи внешних электронов с ядром, к большей устойчивости атома и к малой его активности при вступлении в химические реакции. Поэтому все эти элементы в природе встречаются в виде инертных газов.

Можно также привести и другие примеры, которые показывают, что *периодичность свойств элементов заложена в самой структуре атома*.

Периодичность заполнения внешних электронных оболочек нарушается у элементов переходных рядов — сначала происходит заполнение внутренних электронных оболочек. Это обусловлено тем, что для элементов с большими номерами различия энергий электронов на внешних оболочках будут малыми, и здесь большую роль начинают играть спин-орбитальные взаимодействия; они и приводят к нарушению периодичности заполнения электронных оболочек.

Различают следующие переходные ряды:

|        |            |         |                         |        |
|--------|------------|---------|-------------------------|--------|
| 3d-ряд | $3d^k4s^2$ | Sc → Zn | заполняется 3d-оболочка | M-слоя |
| 4d-ряд | $4d^k5s^2$ | Y → Cd  | заполняется 4d-оболочка | N-слоя |
| 5d-ряд | $5d^k6s^2$ | La → Hg | заполняется 5d-оболочка | O-слоя |
| 6d-ряд | $6d^k7s^2$ | Ac → Lr | заполняется 6d-оболочка | P-слоя |
| 4f-ряд | $4f^k5s^2$ | La → Lu | заполняется 4f-оболочка | N-слоя |
| 5f-ряд | $5f^k6s^2$ | Ac → Lr | заполняется 5f-оболочка | O-слоя |

Число элементов в *d*-ряду равно числу состояний в *d*-оболочке, то есть равно 10, а в *f*-ряду — 14. Элементы 4*f*-ряда получили название **лантаниды** (по первому элементу этого ряда), а элементы 5*f*-ряда называют **актиниды**.

Пример заполнения 3*d*-оболочки приведен в табл. 10.2. Как следует из таблицы, не у всех *d*-элементов внешняя 3*s*-оболочка будет заполнена полностью. Так, для хрома и меди энергетически более выгодным будет электронная конфигурация, для которой в 3*s*-оболочке будет находиться один электрон. Для атома меди это связано с тем, что в этом случае 3*d*-оболочка будет полностью заполненной.

Для элементов 4*f*-ряда заполнение внутренней *f*-оболочки происходит в условиях, когда уже полностью заполнены три внешние 5*p*-, 5*s*- и 6*s*-оболочки. Поэтому заполнение *f*-оболочки мало сказывается на свойствах этих элементов, они близки по своим химическим свойствам. Это также справедливо и для актинидов.

В настоящее время проводятся исследования, направленные на получение новых элементов Периодической системы Д. И. Менделеева. За последнее время открыты элементы с номерами от 104 до 109. Трудности исследования связаны с тем, что они получаются в очень малом количестве при столкновении частиц высокой энергии в ускорителях.

#### 10.2.4.

#### ОПЫТ ШТЕРНА И ГЕРЛАХА. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

Немецкие ученые О. Штерн и В. Герлах в 1922 г. провели ряд опытов по измерению магнитных моментов различных атомов. Полученные при этом выводы оказали существенное влияние на развитие квантовой физики того времени. Схема одного из них приведена на рис. 10.11а. Полученный за счет

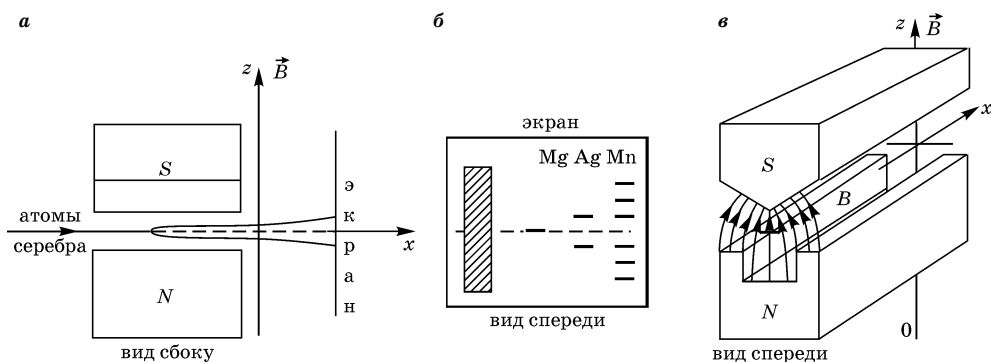


Рис. 10.11

испарения с поверхности нагретого металла поток атомов формировался в вакууме в узкий пучок и попадал в неоднородное магнитное поле, вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  которого был направлен по оси  $Oz$  (рис. 10.11а). Резко неоднородное поле, нарастающее вдоль оси  $Oz$ , создавалось с помощью специальной формы полюсов электромагнита (рис. 10.11в).

Следует отметить, что на атом в неоднородном магнитном поле, как и на контур с током (см. п. 4.1.8), будет действовать сила, вызывающая их поступательное движение по оси  $Oz$ . Проекция этой силы на направление магнитного поля определяется следующей формулой:

$$F_Z = -\frac{dW_p}{dz} = p_{m,AT} \frac{\partial B_Z}{\partial z} \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{p}_{AT}, \vec{B}), \quad (10.28)$$

аналогичной формуле (4.31).

Движение вдоль оси  $Oz$  зависит от знака проекции магнитного момента  $p_{mZ,AT}$  атома на направление магнитного поля. Отметим, что на атомы сила Лоренца не действует, так как их электрический заряд равен нулю.

Из результатов опытов были сделаны следующие выводы.

**1. Пространственное квантование проекций магнитных моментов атомов.** Предположим, что возможны любые ориентации векторов магнитных моментов атомов на направление магнитного поля. Тогда атомы пучка будут испытывать различные отклонения относительно первоначального направления движения в магнитном поле, и на экране будет наблюдаться сплошной след (полоса), оставленный атомами (рис. 10.11б). Причем на границу этой полосы попадают атомы, для которых векторы магнитных моментов направлены либо вдоль, либо против направления магнитного поля.

Однако опыты, проведенные для пучков из различных атомов, показали, что на экране наблюдаются четко определенные отклонения атомов в магнитном поле, и атомы попадают в строго определенные места на экране (рис. 10.11б, где приведены два следа, оставленные на экране пучком атомов серебра, и шесть следов, оставленные атомами марганца). Это доказывает тот факт, что проекции векторов магнитного момента атомов на направление внешнего магнитного поля квантуются, то есть принимают дискретный набор значений.

**2. Магнитные моменты атомов.** Их можно было оценить по результатам опытов следующим образом. Во-первых, из параметров установки определяют неоднородность  $(\partial B_z / \partial z)$  магнитного поля вдоль оси  $Oz$ . Во-вторых, измеряя расстояния следов атомов на экране от оси  $Ox$ , можно оценить из геометрических размеров установки проекцию  $F_z$  силы, действующей на атом в магнитном поле. Это позволяет в соответствии с формулой (10.28) найти проекцию  $p_{mz}$  магнитного момента атома на ось  $Oz$ . На основании правил квантования проекций (формула (10.19)) можно определить углы  $\alpha$  и тем самым найти магнитный момент атома ( $p_{m,AT} = p_{mz,AT} / \cos \alpha$ ).

**3. Собственный магнитный момент электрона.** Во время постановки опытов считалось, что у электрона в атоме существуют только орбитальный механический и магнитный моменты. Из формул (10.19) и (10.20) следует, что в этом случае должно наблюдаться нечетное число следов (магнитное орбитальное квантовое число  $m$  принимает  $(2l + 1)$  значение), один в центре экрана и четное число симметрично расположенных относительно центра экрана (относительно оси  $Ox$ ) следов.

Известно, что для электронов заполненных электронных оболочек суммарный орбитальный магнитный момент будет равен нулю. Поэтому, магнитный момент атома будет определяться только магнитными моментами электронов на внешней оболочке. Если внешней является  $s$ -оболочка, то тогда орбитальный магнитный момент электронов и соответственно магнитный момент атома будет равен нулю

$$p_{ml} = \frac{|e|}{2m} L_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)} = 0$$

и такие атомы должны будут попадать в центр экрана, не испытывая отклонения в магнитном поле. Это и наблюдается для атомов магния (электронная конфигурация  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ , рис. 10.11б).

Однако, вопреки предсказанию теории (результат опыта должен быть таким же, как и для магния), для атомов серебра, находящихся в основном состоянии (в этом случае на внешней электронной  $5s$ -оболочке находится один электрон), на экране наблюдались два четких следа, расположенные симметрично относительно центра экрана, а в центре экрана следов атомов обнаружено не было (см. рис. 10.11б). Такой результат нельзя объяснить, оставаясь в рамках теории, предполагавшей у электрона наличие только орбитальных моментов.

Существование магнитного момента у атомов серебра может быть связано только с тем, что электрон обладает собственным магнитным моментом, который и приводит к возникновению двух проекций на направление внешнего магнитного поля.

Опыты Штерна и Герлаха, а также и ряд других опытов (например магнитомеханические опыты Эйнштейна и де Хааса по определению гиромагнитного отношения для металлов), привели Уленбека и Гаудсмита (1925) к гипотезе существования собственного механического момента — спина у электрона.

**4. Эффект Зеемана.** Эффект Зеемана (1896) заключается в расщеплении уровней энергии и спектральных линий атома при помещении его в магнит-

ное поле. Это связано с тем, что проекции магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля квантуются, то есть принимают дискретный набор значений. При объяснении данного эффекта необходимо определить магнитный момент атома.

Отметим, что для большинства атомов полный магнитный момент атома  $\vec{\mu}_{m,AT}$  получается следующим образом. Сначала складывают все орбитальные магнитные моменты электронов в результирующий орбитальный магнитный момент  $\vec{M}_L$  и все спиновые магнитные моменты электронов в результирующий спиновый магнитный момент  $\vec{M}_S$ . Затем эти результирующие моменты складывают в полный магнитный момент атома  $\vec{M}_J$ , определяемый новым квантовым числом  $J$ , которому соответствует магнитное квантовое число  $m_J$ , принимающие  $(2J + 1)$  значений.

Каждой проекции магнитного момента  $\vec{\mu}_{m,AT}$  атома соответствует своя дополнительная энергия  $\Delta W = -\mu_{m,AT} B_Z \cos \alpha$ , которая определяется магнитным квантовым числом  $m_J$ . Поэтому в магнитном поле происходит дополнительное снятие вырождения по этому магнитному квантовому числу  $m_J$ . Величина добавочной энергии будет малой, что приводит к расщеплению каждой спектральной линии на несколько близко расположенных линий.

#### 10.2.5. ЛАЗЕРЫ

Под лазером (оптический квантовый генератор) понимают устройство, генерирующее когерентные электромагнитные волны за счет вынужденного испускания или вынужденного рассеяния света активной средой, находящейся в оптическом резонаторе (для ультракоротких волн такой генератор называют мазером).

Слово «лазер» является аббревиатурой (Light Emplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление света вынужденным излучением). Существующие лазеры охватывают широкий диапазон длин волн от ультрафиолетового излучения до субмиллиметрового излучения.

**Когерентность и направленность** — основные характеристики излучения лазера, **вынужденное излучение и обратная связь** — главные процессы, приводящие к генерации.

Как отмечалось ранее (см. п. 7.2.5), в лазерах используется вынужденное излучение атомов и поэтому излучение лазера представляет собой поток тождественных фотонов, что и определяет свойства лазерного излучения.

Рассмотрим подробнее работу лазера.

Каждый лазер содержит три основных компонента: активную среду; систему накачки, с помощью которой создается активная среда; оптический резонатор.

**Активная среда** — это среда, в которой интенсивность проходящего света усиливается. В обычной среде такое явление невозможно, так как количество атомов, находящихся в основном состоянии, превосходит количество атомов в возбужденном состоянии. Поэтому число фотонов, поглощенных и испущенных за счет самопроизвольных процессов, будет преобладать над числом фотонов, испущенных при вынужденных переходах.

Ситуация изменяется в случае инверсной заселенности уровней энергии атомов. Тогда число атомов на верхнем уровне будет больше, чем на нижнем. Такая среда и называется активной средой.

**Система накачки.** Создание активной среды возможно с помощью системы накачки. Она может быть импульсной (для лазера на рубине накачка происходит за счет мощной импульсной лампы, она создает широкий спектр излучения) или непрерывной — для гелий-неонового лазера накачка производится непрерывно за счет электрического разряда, применяются также газодинамические процессы, возбуждение электронным пучком и т. д.

Рассмотрим процесс создания активной среды в лазере на рубине (рубин представляет собой вещество в виде кристалла корунда  $\text{Al}_2\text{O}_3$  с примесью атомов хрома). Импульсная накачка происходит за счет мощной газоразрядной лампы, излучающей в широком диапазоне частот. Ее излучение переводит атомы хрома в возбужденное состояние, представляющее собой широкую полосу поглощения (рис. 10.12а). С этой полосы идут переходы снова на основной уровень 1 и безызлучательные переходы на уровень 3. Этот уровень является метастабильным, то есть время жизни атома на нем существенно превышает обычное время жизни атома в возбужденном состоянии (порядка в  $10^5$  раз). Это приводит к накоплению атомов на этом уровне и созданию инверсной населенности уровней 1 и 3. Излучение лазера соответствует переходам атомов с уровня 3 на уровень 1.

Другой способ — способ непрерывной накачки за счет электрического разряда осуществляется в четырехуровневой системе гелий-неонового лазера (рис. 10.12б).

Отметим, что под электрическим разрядом в газах понимают протекание электрического тока в газах, сопровождающееся изменением состояния газа, — газ ионизируется, становится способным проводить электрический ток. Возникающие при этом электроны, ускоренные электрическим полем, способны при столкновениях передавать энергию атомам и приводить к их возбуждению.

В электрическом разряде часть атомов неона Ne переходит на возбужденные уровни энергии 3 и 2 атома неона. Затем они возвращаются, при этом инверсной населенности в верхних уровнях энергии не возникает.

Наличие атомов гелия He кардинально меняет ситуацию. Это связано с тем, что первый возбужденный уровень атома гелия He (уровень 4, рис. 10.12б) совпадает по энергии с третьим уровнем атома неона. Поэтому за счет столк-

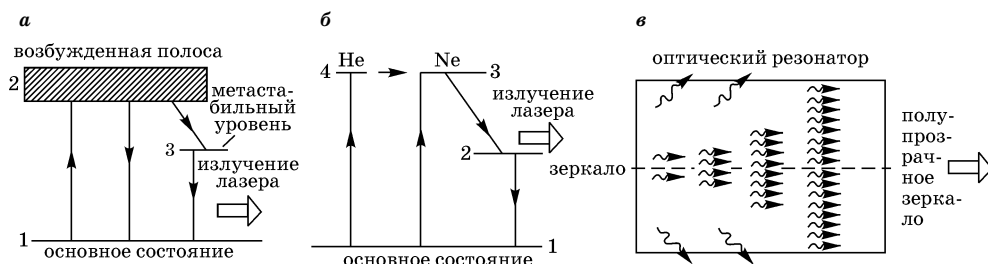


Рис. 10.12



новений с возбужденными атомами гелия количество атомов неона на уровне 3 возрастает — при таких столкновениях энергия атомов гелия передается атомам неона. При этом достигается инверсная населенность уровней 2 и 3 (число атомов неона на уровне 3 будет превышать число атомов неона на уровне 2). Этот переход 2–3 и используется для лазерного излучения.

**Оптический резонатор.** Фотоны, полученные за счет вынужденных переходов, могут иметь различные направления движения, в связи с чем не удастся получить определенную направленность излучения в пространстве. Для того чтобы создать условия для усиления света, необходимо выделить определенное направление распространения излучения и заставить излучение проходить активную среду в этом направлении большое количество раз. Только тогда можно сформировать излучение лазера.

Все это можно сделать с помощью оптического резонатора — устройства, в котором возбуждаются стоячие или бегущие электромагнитные волны оптического диапазона. Оптический резонатор, например, может представлять собой два плоских параллельных зеркала, одно из которых полностью отражает падающее на него излучение, а другое является полупрозрачным (рис. 10.12в).

Фотоны, направление движения которых не совпадает с осью резонатора (она перпендикулярна плоскости зеркал, рис. 10.12в), выходят через боковую поверхность резонатора и вклада в излучение лазера не дают. Напротив, фотоны, направление распространения которых совпадает с направлением оси за счет многократного отражения от зеркал, проходят активную среду многократно, увеличивая интенсивность лазерного излучения. При достижении определенной интенсивности излучение выходит из резонатора.

**Применение лазеров.** С их открытием в науке появились новые разделы, такие как нелинейная оптика, голография, лазерная химия, лазерное разделение изотопов, лазерная спектроскопия, лазерный термоядерный синтез, лазерные технологии и т. д. Сверхстабильные лазеры являются основой оптических стандартов частоты, лазерных сейсмографов и других точных физических приборов. Лазеры с перестраиваемой частотой существенно повысили разрешающую способность и чувствительность спектроскопических методов вплоть до наблюдения спектров отдельных атомов. Высокая концентрация энергии позволяет нагреть малые количества вещества до высоких температур и решить проблему управляемого термоядерного синтеза. Газовые лазеры используются для сварки, резки и плавления металлов.

ЧАСТЬ 11

## ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В изучении физики ядра и элементарных частиц выделяют два этапа. На первом проводились интенсивные исследования строения и свойств атомных ядер (1932–1954). Вторым этапом (с 1955 г., начало исследований структуры нуклона) характеризуется масштабными исследованиями в физике элементарных частиц, развитием теорий, непосредственно затрагивающих строение материи и развитие Вселенной. За этот период (он продолжается до сих пор) было открыто много новых частиц, подтвердивших кварковую модель строения адронов и единую теорию электрослабого взаимодействия. Экспериментально было доказано, что в слабых взаимодействиях нарушается ряд законов (несохранение четности, комбинированной четности и т. д.), созданы теории, позволяющие объяснить поведение Вселенной на ранних стадиях ее развития.

Вот некоторые факты из большого числа открытий, сделанных в физике ядра и элементарных частиц за это время. В 1932 г. Дж. Чедвик открыл нейтрон, Г. Юри — дейтерий, К. Андерсон — позитрон. Также в этом году были осуществлены первые ядерные реакции под действием нейтронов (Н. Фезер, Л. Мейтнер, У. Харкинс), а Д. Д. Иваненко выдвинул гипотезу о нейтронно-протонном строении ядер. Эта модель устранила трудности старой протонно-электронной модели ядра и явилась основой современного понимания строения атомных ядер. В 1933 г. Э. Ферми разработал теорию бета-распада, в которой ввел новый тип взаимодействия — слабое взаимодействие, а П. Дирак выдвинул гипотезу существования антивещества. В 1934 г. Ф. и И. Жолио-Кюри открыли искусственную радиоактивность. В 1935 г. Юкава развил полевую теорию парных ядерных сил, постулировал существование мезона — частицы, осуществляющей взаимодействие между нуклонами. Предсказанные Юкавой мезоны (пи-мезоны) были открыты спустя 12 лет. В 1936 г. была создана капельная модель ядра (Н. Бор, Я. И. Френкель), открыто явление деления ядра урана (О. Ганн, Ф. Штрассман). В 1949 г. работы

М. Гепперт-Майер привели к созданию оболочечной модели ядра. В 1956 г. Т. Ли и Ч. Янг высказали предположение о несохранении четности в слабых взаимодействиях, что было экспериментально подтверждено год спустя. В 1957 г. Ю. Швингер выдвинул идею объединения слабых и электромагнитных взаимодействий (в 1958 г. ее также предложили Ш. Глешоу, А. Салам и Дж. Уорд). В 1964 г. экспериментально обнаружено несохранение комбинированной четности (нарушение СР-инвариантности) в распаде  $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  (Дж. Кристенсон, Дж. Кронин, В. Фитч, Р. Тарлей). В 1983 г. К. Руббиа открыл промежуточный W-бозон.

## 11.1. ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В настоящее время известно около 450 элементарных частиц, то есть тех, которые согласно современным представлениям нельзя разложить на составные части. Большинство из них имеют внутреннее строение (все адроны состоят из кварков), но так как в свободном состоянии кварки в природе не встречаются, то и эти частицы можно считать элементарными.

Иное дело — ядра атомов и сами атомы. Частицы, входящие в их состав, встречаются в свободном состоянии, и поэтому ядра атомов и сами атомы не относятся к классу элементарных частиц.

Под истинно элементарными частицами понимают частицы, претендующие на роль первичных элементов материи, истинно элементарные частицы не имеют внутренней структуры. К ним относят лептоны, кварки и частицы-переносчики взаимодействий (фотон, промежуточные векторные бозоны, глюоны и не открытый пока еще гравитон).

*Можно сказать, что все многообразие существующих в настоящее время элементарных частиц построено из лептонов (их число, включая антилептоны, равно 12) и кварков (их число, включая антикварки, равно 12), которые взаимодействуют посредством частиц-переносчиков взаимодействий (их число равно 4).*

Для элементарных частиц вводятся такие общие характеристики, как масса, время жизни в вакууме, электрический заряд, магнитный момент и спин частицы. Напомним, что под спином  $J$  понимают проекцию спинового момента  $L_{sz}$  частицы на направление внешнего магнитного поля, выраженную в единицах  $\hbar$  (см. п. 10.1.6); спин определяет принадлежность частицы к классу бозонов или фермионов. Например, спин электрона равен  $J = 1/2$ .

При протекании реакций между элементарными частицами для всех видов взаимодействия выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда.

Для описания взаимодействий между элементарными частицами вводятся новые квантовые числа (их называют внутренними квантовыми числами). К ним относятся лептонный заряд, барионный заряд, изоспин, проекция изоспина, четность, странность, очарование, красота, истина и т. д. (см. ниже). Этим квантовым числам соответствуют законы сохранения лептонного заряда, барионного заряда, изоспина, проекции изоспина, четности, странности  $S$ , очарования  $C$ , красоты  $b$  и истинности  $t$ . Они также выполняются

при протекании реакций между элементарными частицами. Некоторые из этих законов нарушаются в тех или иных видах взаимодействий (см. ниже).

По времени жизни разделяют частицы на стабильные (электрон, протон, фотон и нейтрино), нейтрон (в свободном состоянии он распадается за счет слабого взаимодействия за время порядка 15 мин), квазистабильные и короткоживущие (к ним относят резонансы). Квазистабильные частицы распадаются за счет электромагнитного и слабого взаимодействий, их время жизни составляет  $\Delta t_{\text{ж}} \geq 10^{-20}$  с. Время жизни большинства элементарных частиц, распадающихся за счет слабого взаимодействия, лежит в диапазоне  $(10^{-6} - 10^{-14})$  с.

Короткоживущие частицы называют резонансами, они распадаются за счет сильного взаимодействия, их время жизни  $\Delta t_{\text{ж}} - (10^{-22} \div 10^{-24})$  с.

Отметим, что в ядерной физике принято измерять массу частиц в атомных единицах массы (а. е. м.) или в энергетических единицах (в соответствии с формулой  $W = mc^2$ , МэВ), причем

$$1 \text{ а. е. м.} = 931,50 \text{ МэВ} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (11.1)$$

Для того чтобы провести подробную классификацию всех элементарных частиц, необходимо, прежде всего рассмотреть характеристику видов взаимодействий, в которые вступают эти частицы.

### 11.1.1. ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Наиболее важным свойством всех элементарных частиц является их способность рождаться и уничтожаться (испускаться и поглощаться) при взаимодействии с другими частицами. Различные процессы с элементарными частицами при изученных энергиях ( $\sim 1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$ ) заметно отличаются по интенсивности протекания. В соответствии с этим взаимодействия элементарных частиц делят на четыре типа (класса): сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

Каждое из них можно охарактеризовать приведенными ниже параметрами.

*Константа взаимодействия  $\alpha$*  характеризует максимальное значение силы взаимодействия или энергии взаимодействия, она является безразмерной величиной, ее принято оценивать по формуле:  $\alpha = (\text{заряд})^2 / (\hbar c)$ . Подставляя для электромагнитного взаимодействия заряд протона (выбор протона связан с тем, что он вступает во все виды взаимодействий), получим:  $\alpha_E = (\text{заряд})^2 / (\hbar c) = 1/137$ . Константу гравитационного взаимодействия  $\alpha_G$  можно оценить из сравнения сил гравитационного и электромагнитного взаимодействия для двух протонов

$$\alpha_G / \alpha_E = F_G / F_E = (Gm_p^2 / r^2) / (|e|^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)) = Gm_p^2 4\pi\epsilon_0 / |e|^2 \approx 10^{-36},$$

что дает следующее значение:  $\alpha_G \approx 10^{-36} \alpha_E \approx 10^{-38}$ .

Для сильного и слабого взаимодействий константы  $\alpha_S$  и  $\alpha_W$  оценивают из большой совокупности экспериментальных данных о реакциях взаимодействия элементарных частиц.

*Радиус взаимодействия  $r$*  — расстояние, на котором эти взаимодействия являются наиболее интенсивными.

*Длительность протекания процессов взаимодействия частиц  $\Delta t_{\text{вз}}$*  за счет данного вида взаимодействия.

*Частицы-переносчики взаимодействия являются квантами соответствующих полей, посредством которых осуществляется взаимодействие между частицами.* Известно, что электромагнитное взаимодействие между электрически заряженными частицами переносится с помощью электромагнитного поля. Так как электромагнитную волну можно представить потоком фотонов, квантов электромагнитного поля, то говорят, что такое взаимодействие между частицами переносится с помощью фотонов. Это понимание механизма взаимодействий переносится и на другие его виды.

**1. Сильное взаимодействие:**  $\alpha_S \approx 1$ ,  $r \approx 10^{-15}$  м,  $\Delta t_{\text{вз}} \approx 10^{-23}$  с осуществляется посредством  $\pi$ -мезонов, они переносят взаимодействие между нуклонами в ядре. Существует три вида пи-мезонов: это  $\pi^+$ -,  $\pi^-$ - и  $\pi^0$ -мезоны (массы  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов равны  $140 \text{ МэВ} = 273 m_{\text{эл}}$ , а  $\pi^0$ -мезона  $135 \text{ МэВ} = 264 m_{\text{эл}}$ ), они являются бозонами, для них спин равен нулю.  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезоны имеют электрический заряд, равный по модулю заряду электрона, а  $\pi^0$ -мезон электрического заряда не имеет.

В настоящее время существует новый уровень понимания сильного взаимодействия, согласно которому **сильное взаимодействие между кварками переносят глюоны.**

**2. Электромагнитное взаимодействие:**  $\alpha_E \approx 1 \cdot 10^{-2}$ ,  $r = \infty$ ,  $\Delta t_{\text{вз}} \approx 10^{-20}$  с, его переносчиком является фотон, его масса покоя равна нулю, а спин равен единице, то есть это бозон. Фотоны электрического заряда не имеют, они переносят взаимодействие между электрически заряженными частицами.

**3. Слабое взаимодействие:**  $\alpha_W \approx 1 \cdot 10^{-10}$ ,  $r \approx 10^{-18}$  м,  $\Delta t_{\text{вз}} \approx 10^{-9}$  с; его переносчики — промежуточные векторные бозоны:  $W^+$ -,  $W^-$ - и  $Z^0$ -бозоны, это самые тяжелые (для  $W^+$ -,  $W^-$ -бозонов  $80 \text{ ГэВ}$ , а для  $Z^0$ -бозона  $91,6 \text{ ГэВ}$ ) и нестабильные (время жизни составляет всего  $3 \cdot 10^{-25}$  с) частицы из всех известных элементарных частиц. Два из них ( $W^+$ -,  $W^-$ ) имеют электрический заряд, равный по модулю заряду электрона, а  $Z^0$ -бозон — электрически нейтральная частица. Как следует из их названия, они являются бозонами, для них спин равен единице. Слабое взаимодействие обуславливает все виды  $\beta$ -распада и отвечает за взаимодействие нейтрино с веществом.

**4. Гравитационное взаимодействие:**  $\alpha_G \approx 1 \cdot 10^{-38}$ ,  $r = \infty$ ,  $\Delta t_{\text{вз}} = ?$ . Его переносчиком предположительно являются гравитоны (масса покоя равна нулю, это бозоны, спин для них равен двум). Экспериментально гравитоны не обнаружены. Интенсивность гравитационного взаимодействия очень мала, и поэтому в процессах взаимодействия, протекающих в микромире, гравитационное взаимодействие себя никак не проявляет. Это замечание справедливо для расстояний между частицами, превышающих значения  $r \geq 10^{-35}$  м.

Из рассмотренных выше видов взаимодействий следует, что наиболее быстро протекают процессы с участием сильного взаимодействия, для них отмечена наибольшая интенсивность и соответственно наименьшее время протекания процессов распада.

### 11.1.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

**Космические лучи.** Основные результаты в начальной стадии развития физики элементарных частиц были достигнуты при исследовании космического излучения. Под ним понимают поток элементарных частиц высоких энергий, преимущественно протонов, приходящих на Землю со всех направлений из космического пространства, а также вторичное излучение, рожденное в атмосфере Земли в результате взаимодействия этого потока с атомными ядрами молекул воздуха. Оказывается, что во вторичном излучении встречаются практически все известные элементарные частицы.

Космические лучи разделяются на высокоэнергетические галактические космические лучи с энергиями, достигающими  $10^{21}$  эВ, и солнечные космические лучи умеренных энергий  $\leq 10^{10}$  эВ. Первые из них приходят на Землю от источников, находящихся вне Солнечной системы, а вторые связаны с активностью Солнца.

Детальное изучение зарядов и масс частиц вторичных космических лучей привело к открытию таких элементарных частиц, как позитрон (Андерсон, 1932), мюоны (Андерсон и Неддермейер, 1936),  $\pi$ -мезоны и К-мезоны,  $\Lambda$ -гиперон и т. д. В настоящее время космические лучи остаются и еще долго будут оставаться уникальным источником частиц сверхвысоких энергий, поскольку даже в самых больших современных ускорителях максимально достижимая энергия частиц на сегодняшний день составляет порядка  $\sim 10^{14}$  эВ.

Однако использование космических лучей для изучения реакций между элементарными частицами вызывает большие затруднения, связанные с непредсказуемостью эксперимента и необходимостью доставки приборов на сравнительно большие высоты ( $\sim 50$  км).

**Ускорители элементарных частиц.** В настоящее время основные результаты в физике элементарных частиц получают на кольцевых ускорителях — коллайдерах. На них проводят столкновение ускоренных электрическим полем встречных пучков протонов с антипротонами, протонов — с протонами, электронов — с позитронами, электронов — с протонами и т. д.

Появление более мощных ускорителей позволяет увеличить энергию сталкивающихся между собой частиц и тем самым сблизить их на меньшие расстояния друг к другу, а на этих меньших расстояниях и происходит видоизменение физической картины мира.

Отметим, что увеличение энергии сталкивающихся частиц уменьшает соответствующую им длину волны де Бройля и тем самым позволяет исследовать внутреннее строение различных частиц, линейные размеры которых  $l$  превышают  $\lambda_B$ :

$$\lambda_B = h/p = h/(W/c) = hc/W \leq l \Rightarrow \uparrow W \Rightarrow \downarrow \lambda_B.$$

Итак, новые этапы в исследовании физики элементарных частиц связаны с появлением новых более мощных ускорителей.

### 11.1.3. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

**Обменный характер сильного взаимодействия.** Обсудим, как изменялись взгляды на сильное взаимодействие. Прежде всего, рассмотрим, как осуществляется сильное взаимодействие между частицами. Примером сильного взаимодействия является взаимодействие между нуклонами в ядре. Говорят, что каждый отдельный нуклон окружен облаком из виртуальных  $\pi$ -мезонов (рис. 11.1а). Поясним эту фразу. Протон (или нейтрон) может испускать  $\pi$ -мезоны, которые затем снова поглощаются протоном. Процессы испускания и поглощения  $\pi$ -мезонов приводят к тому, что около протона постоянно находится облако из виртуальных  $\pi$ -мезонов.

*Виртуальная частица — это частица, которую нельзя обнаружить за время ее существования.* Почему возможно существование таких частиц? Рассмотрим для примера процесс испускания протоном  $\pi^0$ -мезона. При этом должна протекать следующая реакция:  $p \rightarrow p + \pi^0$ , которая запрещена законом сохранения энергии:  $m_p c^2 \neq m_p c^2 + m_\pi c^2$ . Однако можно не заметить нарушение этого закона сохранения энергии. Такую возможность дает соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени ( $\Delta W \Delta t \geq \hbar$ ). Если время существования  $\pi^0$ -мезона (время между его испусканием и поглощением протоном)  $\Delta t$ , а соответственно и время измерения  $\Delta t_{\text{изм}}$  энергии такой реакции будет меньше величины  $\hbar/(m_\pi c^2)$  ( $\Delta t_{\text{изм}} \leq \Delta t \leq \hbar/\Delta W = \hbar/(m_\pi c^2)$ ), то в этом случае нельзя обнаружить нарушение закона сохранения энергии. Указанное время измерения не дает возможности оценить с достаточной точностью энергию реакции на опыте (погрешность определения энергии реакции будет превышать энергию покоя  $\pi$ -мезона:  $\Delta W > m_\pi c^2$ ), и поэтому заметить нарушение закона сохранения не удастся — за это время испущенный  $\pi$ -мезон будет снова поглощен протоном.

Данный подход к описанию сильного взаимодействия позволяет найти радиус облака из виртуальных  $\pi$ -мезонов и соответственно расстояние, на котором будет эффективно такое взаимодействие. Радиус взаимодействия приблизительно будет равен расстоянию, на которое может отойти виртуальный  $\pi$ -мезон за время его существования от нуклона:

$$r \approx c \Delta t = \hbar/(m_\pi c) = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad (11.2)$$

что согласуется с радиусом сильного взаимодействия.

Итак, каждый нуклон окружен облаком, состоящим из виртуальных  $\pi$ -мезонов. Когда два нуклона подходят на расстояние, при котором происходит перекрывание их облаков из виртуальных  $\pi$ -мезонов (рис. 11.1б), происходит обмен этими частицами, в результате которого и устанавливается сильное взаимодействие:

$$p + n \rightarrow (p + \pi^0) + n \rightarrow p + (\pi^0 + n) \rightarrow p + n. \quad (11.3 \text{ а})$$

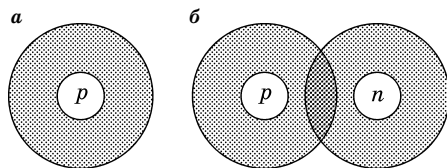


Рис. 11.1

Как видно из реакции, никаких изменений в итоге не произошло, но обмен виртуальными частицами привел к возникновению сильного взаимодействия.

Кроме реакции (11.3 а), могут также протекать следующие реакции обмена виртуальными  $\pi$ -мезонами:

$$p + n \leftrightarrow (n + \pi^+) + n \leftrightarrow n + (\pi^+ + n) \leftrightarrow n + p, \quad (11.3 \text{ б})$$

$$n + p \leftrightarrow (p + \pi^-) + p \leftrightarrow p + (\pi^- + p) \leftrightarrow p + n. \quad (11.3 \text{ в})$$

**Новые открытия в физике элементарных частиц.** Обсудим, что нового появилось в физике элементарных частиц за последние десятилетия. Так, при достижении энергии сталкивающихся частиц порядка 1 ГэВ ( $\approx 10^9$  эВ) расстояние между частицами составило порядка  $10^{-16}$  м, и это позволило установить, что нуклоны и  $\pi$ -мезоны состоят из кварков. Поэтому в настоящее время имеется иное объяснение сильного взаимодействия — *оно осуществляется между кварками с помощью глюонов; каждый кварк окружен облаком виртуальных глюонов.*

Далее, когда на ускорителях были достигнуты энергии сталкивающихся частиц порядка 100 ГэВ, что соответствует расстояниям между частицами порядка  $\sim 10^{-18}$  м, были экспериментально обнаружены *переносчики слабого взаимодействия — промежуточные векторные бозоны ( $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z^0$ -бозоны).* Это открытие было сделано в 1983 г. на кольцевом ускорителе, где проводили столкновение встречных пучков ускоренных электрическим полем протонов и антипротонов.

Нужно отметить, что промежуточные векторные бозоны были предсказаны еще в 60-е гг. XX века физиками-теоретиками Глэшоу, Саламом и Вайнбергом, создавшими единую теорию электрослабого взаимодействия. Согласно этой теории на расстояниях  $r \leq 10^{-18}$  м электромагнитное и слабое взаимодействия сливаются в одно электрослабое взаимодействие, которое переносится четырьмя безмассовыми частицами. С обнаружением опытным путем промежуточных векторных бозонов эта теория получила экспериментальное подтверждение.

Поясним, почему возможно объединение электрического и слабого взаимодействий при расстояниях  $r \leq 1 \cdot 10^{-18}$  м. При увеличении энергии сталкивающихся частиц они сближаются между собой настолько близко, что происходит уменьшение влияния на их взаимодействие облака виртуальных частиц — переносчиков взаимодействий, и чем больше энергия столкновения частиц, тем меньше будет влияние этого облака. В этом случае интенсивность электромагнитного взаимодействия уменьшается, а слабого — возрастает, и на расстояниях  $r \leq 1 \cdot 10^{-18}$  м они сливаются в единое электрослабое взаимодействие.

#### 11.1.4. ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

В 1928 г. Дирак записал уравнение Шредингера, которое было справедливо для скоростей частиц, близких к скорости света (релятивистское уравнение Шредингера). Из его решения следовало, что возможно существование частицы, которая отличается от электрона  $e^-$  знаком электрического



заряда. Она была названа позитроном  $e^+$ . В 1932 г. эта частица была обнаружена Андерсоном по характерному треку в камере Вильсона, напоминающему след, оставленный электроном, но закрученный в противоположную сторону.

По общепринятым в настоящее время представлениям позитрон — античастица электрона. У частиц и античастиц совпадают их масса и спин, модуль магнитного момента, а также время жизни в вакууме. Одинаковыми для них по величине и противоположными по знаку должны быть электрические заряды, магнитные моменты и все остальные квантовые числа, которые приписывают частицам для описания их взаимодействий. Способ распада частицы также не меняется, происходит лишь замена частиц распада на античастицы.

При встрече частицы и античастицы между ними протекает **реакция аннигиляции**, при которой они превращаются в другие частицы. Так, при встрече электрона и позитрона образуются два  $\gamma$ -кванта:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma. \quad (11.4)$$

Существуют истинно нейтральные частицы, для них все квантовые числа, отличающие частицу от античастицы, равны нулю, и поэтому античастицы совпадают с самой частицей. Примерами таких истинно нейтральных частиц являются фотон,  $\pi^0$ -мезон,  $\eta^0$ -мезон и т. д.

Существование антивещества и антимира теоретически не отрицается. Антиатомы этого антивещества содержат позитронные оболочки и антиядра, состоящие из антипротонов и антинейтронов (антипротоны  $\bar{p}$  и антинейтроны  $\bar{n}$  были экспериментально получены в 1955 и 1956 гг.). В вакууме антиатом также стабилен, как и обычный атом.

В настоящее время во Вселенной антимир не обнаружены. Если бы они существовали, то на границе вещества и антивещества протекали бы процессы аннигиляции, сопровождающиеся излучением  $\gamma$ -квантов, чего не наблюдается в рамках эксперимента.

### 11.1.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Все частицы можно разделить на следующие группы.

**Фундаментальные бозоны** — частицы, которые являются переносчиками взаимодействий. Сюда включают фотон, глюон, промежуточные векторные бозоны и пока еще не открытый гравитон.

**Лептоны** — частицы, которые участвуют в слабых взаимодействиях и, если у них имеется электрический заряд, то и в электромагнитных взаимодействиях. В переводе с греческого языка *leptos* означает «тонкий, легкий». Это название осталось за лептонами и после открытия тау-лептона, который по своей массе никак не может быть отнесен к легким частицам.

Лептонами являются электрон ( $e^-$ ), мюон ( $\mu^-$ ), тау-лептон ( $\tau^-$ ) и соответствующие им три нейтральных частицы: электронное ( $\nu_e$ ), мюонное ( $\nu_\mu$ ) и тау-нейтрино ( $\nu_\tau$ ). Электрические заряды мюона и тау-лептона равны по модулю электрическому заряду электрона и являются отрицательными. Массы этих

частиц составляют  $m_{эл} = 0,511 \text{ МэВ}$ ,  $m_{\mu} = 106 \text{ МэВ}$ ,  $m_{\tau} = 1784 \text{ МэВ}$ . Все эти частицы являются фермионами со спином  $1/2$ .

Нужно отметить, что все лептоны подразделяются на лептоны первого ( $e^{-}, \nu_e$ ), второго ( $\mu^{-}, \nu_{\mu}$ ) и третьего ( $\tau^{-}, \nu_{\tau}$ ) поколений.

Для лептонов вводится квантовое число — **лептонный заряд**  $L$ . Существует три вида лептонного заряда ( $L_e, L_{\mu}$  и  $L_{\tau}$ ), они соответствуют лептонам первого, второго и третьего поколений. Для них и соответствующих им антилептонам лептонные заряды принимают следующие значения:

| Лептоны                                                                       | Антилептоны                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Первое поколение: $(e^{-}, \nu_e) - L_e = +1, L_{\mu} = L_{\tau} = 0$         | $(e^{+}, \bar{\nu}_e) - L_e = -1, L_{\mu} = L_{\tau} = 0$         |
| Второе поколение: $(\mu^{-}, \nu_{\mu}) - L_{\mu} = +1, L_e = L_{\tau} = 0$   | $(\mu^{+}, \bar{\nu}_{\mu}) - L_{\mu} = -1, L_e = L_{\tau} = 0$   |
| Третье поколение: $(\tau^{-}, \nu_{\tau}) - L_{\tau} = +1, L_e = L_{\mu} = 0$ | $(\tau^{+}, \bar{\nu}_{\tau}) - L_{\tau} = -1, L_e = L_{\mu} = 0$ |

Для всех остальных частиц лептонный заряд  $L$  принимает значение, равное нулю ( $L = 0$ ).

Частицы нейтрино принимают участие только в слабых взаимодействиях, поэтому они обладают большой проникающей способностью, слабо взаимодействуют с веществом. Так, расстояния, которые они могут пройти в веществе, не испытав ни одного столкновения, составляют порядка  $\approx 10^{15} \text{ км}$ , то есть они могут, например, пролететь сквозь Солнце или Землю, ни разу не столкнувшись.

В настоящее время сведения о нейтрино являются неполными. Так, в частности, неясным остается вопрос о массе покоя нейтрино — равна она нулю или нет. В настоящее время известны лишь оценки верхнего предела для масс  $m_{\nu}$  электронного  $\nu_e$  ( $\leq 3 \text{ эВ}$ ), мюонного  $\nu_{\mu}$  ( $\leq 0,19 \text{ МэВ}$ ) и тау-нейтрино  $\nu_{\tau}$  ( $\leq 18,2 \text{ МэВ}$ ).

Отличие от нуля массы покоя электронного нейтрино имеет существенное значение для дальнейшего развития Вселенной. Нейтрино во всех ее разновидностях настолько много во Вселенной, что учет массы покоя (если она существует) всех нейтрино приведет к тому, что средняя плотность вещества Вселенной  $\rho$  может превысить критическое значение  $\rho_K$ , входящее в уравнения общей теории относительности. Тогда, согласно решению этих уравнений, расширение Вселенной со временем сменится ее сжатием. Если же масса покоя нейтрино равна нулю, то тогда  $\rho < \rho_K$  и будет происходить бесконечное во времени расширение Вселенной.

**Адроны** (от греч. hadros — сильный, массивный, крупный) — это частицы, принимающие участие в сильных взаимодействиях. Помимо этого, они могут участвовать и в других видах взаимодействия. Так, например, протон участвует во всех видах взаимодействия, чего нельзя сказать об электро-не.

Адроны составляют подавляющую часть всего многообразия элементарных частиц (кроме них еще остаются шесть лептонов, шесть кварков и четыре бозона — переносчика взаимодействия).

Адроны подразделяются на две большие группы — **мезоны** (порядка 80 частиц), они являются бозонами, их спин — целое число, и **барионы** (порядка 140 частиц), которые относятся к фермионам, спин — полуцелое число.



Рис. 11.2

Среди адронов по времени жизни выделяют стабильную частицу — протон, квазистабильные частицы ( $\Delta t_{\text{ж}} \geq 10^{-20}$  с) и короткоживущие частицы, их называют **резонансами** ( $\Delta t_{\text{ж}} = (10^{-22} \div 10^{-24})$  с), они являются возбужденными состояниями адронов.

Барионам приписывают новое квантовое число — барионный заряд  $B$ , равный единице, для антибарионов  $B = -1$ , для всех остальных частиц  $B = 0$ .

По мере открытия все новых и новых адронов для описания взаимодействий между ними приходилось вводить новые квантовые числа — странность  $S$ , очарование  $C$ , красоту  $b$  и истинность  $t$ . Это привело к тому, что среди адронов выделяют также такие группы частиц, как 1) обычные (протон, нейтрон и  $\pi$ -мезоны); 2) странные (гипероны); 3) очарованные; 4) красивые и 5) истинные (правдивые) частицы. Причем в эти группы частиц входят как мезоны, так и барионы (рис. 11.2).

Открытие большого количества адронов привело к необходимости поиска закономерностей, которые могли бы составить основу их классификации. Выделение изотопических мультиплетов было первым шагом на этом пути.

#### 11.1.6. ИЗОТОПИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ. СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ

Как оказалось, адроны можно разбить на группы «похожих» частиц, в каждую из которых входят частицы с примерно равными массами и одинаковыми внутренними характеристиками, но с разным электрическим зарядом. Такие группы называют **изотопическими мультиплетами**. Сильное взаимодействие для всех частиц, входящих в изотопический мультиплет, одинаково, то есть не зависит от электрического заряда; в этом и состоит одно из проявлений симметрии сильного взаимодействия, называемое **изотопической инвариантностью**.

Простейший пример частиц, которые можно объединить в один изотопический мультиплет (дублет), — это протон и нейтрон. Опыт показывает, что сильное взаимодействие протона с протоном, нейтрона с нейтроном и протона с нейтроном одинаково, это и послужило исходным пунктом для установления изотопической инвариантности и возможности рассматривать протон и нейтрон как два разных зарядовых состояния одной частицы — нуклона.

Другие примеры изотопических мультиплетов: 1)  $\pi$ -мезоны ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ), сигма минус гипероны ( $\Sigma$ -гипероны:  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ), образующие изотопические триплеты; 2)  $K$ -мезоны ( $K^+$ ,  $K^0$ ) и анти  $K$ -мезоны ( $K^-$ ,  $\bar{K}^0$ ), образующие два изотопических дублета.

Частицам, входящим в изотопический мультиплет, приписывается квантовое число — **изотопический спин**  $I$  (его еще называют **изоспином**), он определяет число частиц или число зарядовых состояний адрона в изотопическом мультиплете. Изотопический спин (изоспин) — одна из внутренних характеристик (квантовых чисел) адронов.

Частицы в мультиплете отличаются друг от друга значением проекции изотопического спина  $I_3$ , соответствующие значения их электрических зарядов определяются формулой Гелл-Мана–Нишиджимы

$$Q/|e| = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (11.5)$$

где  $Y$  — так называемый гиперзаряд адрона.

По мере открытия новых адронов, обладающих новыми квантовыми числами (странность  $S$ , очарование  $C$ , красота  $b$  и истинность  $t$ ), формула для гиперзаряда изменялась. Так, для обычных адронов (протон, нейтрон, пи-мезоны) гиперзаряд равен  $Y = B$ , для странных частиц (гиперонов)  $Y = B + S$ , а с учетом квантовых чисел  $C$ ,  $b$  и  $t$ :

$$Y = B + S + C + b + t. \quad (11.6)$$

В формуле (11.5)  $I_3$  пробегает с интервалом в единицу все значения от некоторого максимального значения, равного изотопическому спину  $I$  (целого или полуцелого), до минимального, равного  $(-I)$ . Общее число значений, которое может принимать  $I_3$  (и  $Q$ ) для данного изотопического мультиплета, и, следовательно, число частиц в изотопическом мультиплете  $n = 2I + 1$ . **Величину  $I_3$  называют проекцией изотопического спина.**<sup>1</sup>

Проверим формулу (11.5) для нескольких изотопических мультиплетов.

1. Изотопический дублет нуклонов ( $p, n$ ):  $I = 1/2$ , проекция изоспина принимает два значения  $I_3 = (1/2, -1/2)$ , гиперзаряд равен единице:  $Y = B = 1$  и соответственно  $Q/|e| = 1, 0$ , то есть здесь имеется два зарядовых состояния — положительно заряженный протон и незаряженный нейтрон.

2. Изотопический триплет пионов ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ):  $I = 1, I_3 = (1; 0, -1)$ ,  $Y = B = 0$ , что дает три зарядовых состояния  $Q/|e| = (1, 0, -1)$ .

3. Изотопический синглет, состоящий из  $\Lambda$ -гиперона:  $I = 0, I_3 = 0, B = 1, S = -1, Y = B + S = 1 - 1 = 0, Q/|e| = 0$ , то есть заряд частицы равен нулю.

4. Изотопический синглет, состоящий из  $\Omega^-$ -гиперона:  $I = 0, I_3 = 0, B = 1, S = -3, Y = B + S = 1 - 3 = -2, Q/|e| = -1$ , то есть  $\Omega^-$ -гиперон имеет электрический заряд, равный заряду электрона.

Переход от одной частицы к другой из одного и того же изотопического мультиплета, без изменения величины изотопического спина меняет его проекцию, поэтому такой переход можно формально представить как поворот в условном изотопическом (зарядовом) пространстве. Тот факт, что сильное взаимодействие частиц, входящих в определенный изотопический мультиплет, не зависит от проекции изотопического спина, можно интерпретировать как независимость (инвариантность) сильного взаимодействия относи-

<sup>1</sup> Названия изоспин, проекция изоспина связаны с формальной математической аналогией этих понятий с обычным спином частиц и его проекциями на ось  $Oz$  (см. п. 10.1.5).

тельно вращений в изотопическом пространстве. Это условие является общей формулировкой изотопической инвариантности, и из него следует закон сохранения изотопического спина в сильном взаимодействии.

На основании изотопической инвариантности удастся предсказать существование, массу и заряды новых частиц, если были известны их изотопические партнеры. Так, было предсказано существование частиц  $\pi^0$  (пи ноль мезона),  $\Sigma^0$  (сигма ноль гиперона),  $\Xi^0$  (кси ноль гиперона) в изотопических триплетах по уже известным частицам ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ), ( $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ) и ( $\Xi^+$ ,  $\Xi^-$ ).

Дальнейшее изучение закономерностей в физике элементарных частиц позволило сделать вывод о том, что странные и обычные адроны в совокупности образуют более широкие объединения частиц с близкими свойствами, чем изотопические мультиплеты. Эти объединения называются **супермультиплетами**. Согласно правилу Накано, Нишиджима и Гелл-Мана (1953 г.) частицы такого супермультиплета имеют одинаковые спин ( $J$ ) и внутреннюю четность  $P$  (см. п. 11.1.7), но различаются не только значениями электрического заряда, но и странности. Эти супермультиплеты символически обозначают  $J^P$ . Числа входящих в них частиц равны 8, 9 и 10. Приведем пример супермультиплета для мезонов (включая антимезоны  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $\bar{K}^0$ , всего 9 частиц):

$$J^P = 0^- : \pi^+, \pi^0, \pi^-, \eta, \eta', K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0, \quad (11.7 \text{ а})$$

и барионов (8 частиц):

$$J^P = 1/2^+ : \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda, p, n, \Xi^-, \Xi^0. \quad (11.7 \text{ б})$$

Возникновение супермультиплетов истолковывается как проявление существования для адронов более широкой группы симметрии, получившей название **унитарной симметрии**. Унитарная симметрия является менее точной, чем изотопическая, это приводит к довольно значительному различию в массах частиц в пределах одного супермультиплета.

Дальнейшие открытия очарованных, красивых и правдивых адронов привели к необходимости построения **сверхмультиплетов** и к существованию еще более общей симметрии.

#### 11.1.7. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ СТРОЕНИЯ АДРОНОВ

Экспериментальные данные при столкновениях частиц с энергией 1 ГэВ позволили выявить внутреннее строение адронов. Обнаружение для адронов свойств симметрии, связанных с унитарными группами, и закономерностей разбиения их на мультиплеты и супермультиплеты явилось основой для вывода о существовании особых структурных единиц, из которых построены адроны, то есть к открытию кварков.

Кварковая модель строения адронов была разработана в 1964 г. Гелл-Маном и Цвейгом. Согласно этой модели все адроны состоят из кварков, причем барионы состоят из трех кварков  $B = (qqq)$ , а мезоны — из кварка и антикварка  $M = (q\bar{q})$ . Существует шесть видов кварков (шесть ароматов). Они получили название от первых букв английских слов:  $u$ -кварк (up — вверх),  $d$ -кварк (down — вниз),  $s$ -кварк (strange — странный),  $c$ -кварк (charm —

Таблица 11.1

| Квантовые числа              | $u$   | $d$   | $s$   | $c$  | $b$  | $t$ |
|------------------------------|-------|-------|-------|------|------|-----|
| Спин                         | 1/2   | 1/2   | 1/2   | 1/2  | 1/2  | 1/2 |
| Электрический заряд, $Q/ e $ | 2/3   | -1/3  | -1/3  | 2/3  | -1/3 | 2/3 |
| Барионный заряд, $B$         | 1/3   | 1/3   | 1/3   | 1/3  | 1/3  | 1/3 |
| Изоспин                      | 1/2   | 1/2   | 0     | 0    | 0    | 0   |
| Проекция изоспина            | -1/2  | 1/2   | 0     | 0    | 0    | 0   |
| Странность, $S$              | 0     | 0     | -1    | 0    | 0    | 0   |
| Очарование, $C$              | 0     | 0     | 0     | 1    | 0    | 0   |
| Красота, $b$                 | 0     | 0     | 0     | 0    | 1    | 0   |
| Истина, $t$                  | 0     | 0     | 0     | 0    | 0    | 1   |
| Масса, ГэВ                   | 0,318 | 0,322 | 0,512 | ~1,3 | ~4,7 | 174 |

очарованный),  $b$ -кварк (beauty — красивый) и  $t$ -кварк (truthful — истинный, правдивый).

Кварки участвуют во всех видах взаимодействий, существующих между элементарными частицами. При этом кваркам приписывают квантовые числа, приведенные в табл. 11.1.

На основании таблицы можно сделать два важных вывода:

1) для кварков наблюдаются дробные значения электрического и барионного зарядов, такие значения зарядов не встречаются в природе ни у одной из наблюдавшихся частиц;

2) квантовые числа, вводимые для описания сильного взаимодействия, привязаны к конкретным кваркам. Так, изоспином обладают кварки  $u$  и  $d$ , по названию кварка можно судить о том, как направлен вектор изоспина. Странностью  $S$  обладает только  $s$ -кварк, очарованием  $c$ -кварк, красотой  $b$ -кварк и истинностью —  $t$ -кварк.

Поэтому по кварковому составу частицы можно судить о наличии у нее различных квантовых чисел. Так, например, все странные частицы содержат  $s$ -кварк, очарованные —  $c$ -кварк, красивые —  $b$ -кварк и истинные (правдивые) —  $t$ -кварк.

Отметим, что кварки в свободном состоянии в природе не встречаются. Это связано с тем, что силы взаимодействия между кварками возрастают при увеличении расстояния между ними и поэтому для их создания в одиночном состоянии требуется очень большая энергия. Это явление, при котором кварк не может вылететь из элементарной частицы, называют конфайнмент (confinement — удержание, пленение).

Принцип Паули (см. п. 10.1.6) запрещает существование бариона, в состав которого входят два или три одинаковых по аромату кварков, находящихся в одинаковых квантовых состояниях. Однако такие частицы существуют. Примерами таких частиц являются омега минус гиперон  $\Omega^- = (sss)$  и резонансы  $\Delta^{++} = (uuu)$  и  $\Delta^- = (ddd)$  со спином  $3/2$ .

Для снятия этого запрета для кварков вводится новое квантовое число — цвет (или цветовой заряд). Оно принимает три значения (цвета) —

красный, зеленый и синий. Эти цвета при своем смешении дают белый или бесцветную комбинацию.

Введение цвета приводит к снятию ограничения, накладываемого принципом Паули, то есть возможно существование барионов, состоящих из трех кварков одного аромата, но разного цвета. Считается, что мезоны и барионы являются бесцветными частицами, их цвет является внутренним свойством этих частиц, присущим только сильному взаимодействию.

Бесцветной частице будут соответствовать такие комбинации цветов, как поровну красный, зеленый, синий ( $\bar{K}\bar{Z}\bar{C}$ , соответствует барионам) или поровну антикрасный, антизеленый, антисиний ( $\bar{K}\bar{Z}\bar{C}$ , соответствует антибарионам). Приведенные ниже комбинации (они несут в себе скрытый цвет) соответствуют мезонам или антимезонам — красный, антикрасный ( $\bar{K}\bar{K}$ ), зеленый, антизеленый ( $\bar{Z}\bar{Z}$ ), синий, антисиний ( $\bar{C}\bar{C}$ ).

Поэтому с учетом нового квантового числа (цвет) строение барионов и мезонов будет выглядеть таким образом:  $B = (qKqZqC)$ ,  $M = (q_K \bar{q}_K)$ .

Сильное взаимодействие между кварками переносят восемь безмассовых частиц, их называют **глюонами** (от *англ.* glue — клей). Глюоны  $g$  являются бозонами, их спин равен единице. Это цветные частицы, они обладают двумя цветовыми характеристиками — цветом и антицветом. Из трех цветов ( $K, Z, C$ ) и трех антицветов ( $\bar{K}, \bar{Z}, \bar{C}$ ) можно составить девять цветовых комбинаций ( $\bar{K}\bar{Z}, \bar{K}\bar{C}, \bar{Z}\bar{K}, \bar{Z}\bar{C}, \bar{C}\bar{K}, \bar{C}\bar{Z}$  и т. д.), одна из которых является абсолютно бесцветной ( $\bar{K}\bar{K} + \bar{Z}\bar{Z} + \bar{C}\bar{C}$ ) и поэтому отбрасывается, что и приводит к числу глюонов, равному восьми.

Механизм установления сильного взаимодействия между кварками аналогичен механизму взаимодействия нуклонов в ядре (формула (11.3)). Приведем в качестве примера реакцию обмена глюонами между кварками, она приводит к установлению между ними сильного взаимодействия. Учтем, что при поглощении и испускании кварками глюонов выполняется закон сохранения цвета. Рассмотрим реакцию взаимодействия  $d$ -кварка (зеленый цветовой заряд) с  $u$ -кварком (синий цветовой заряд) с изменением их цвета:

$$d_3 + u_C \leftrightarrow (d_C + g_{\bar{3}\bar{C}}) + u_C \leftrightarrow d_C + (g_{\bar{3}\bar{C}} + u_C) \leftrightarrow d_C + u_3. \quad (11.8)$$

Аналогично можно записать и другие реакции обмена глюонами, в которых цвет участвующих в ней кварков или изменяется, или не изменяется.

Кварковая модель объясняет наличие большого числа адронов и преобладание среди них резонансов. Многочисленность адронов — отражение их сложного строения и возможности существования различных возбужденных состояний кварковых систем.

#### 11.1.8. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ АДРОНОВ ИЗ КВАРКОВ

**Нуклоны** (протон и нейтрон) — это барионы ( $B = 1$ ), масса частиц составляет  $m_p = 938,27$  МэВ,  $m_n = 939,57$  МэВ. Протон является стабильной частицей, а свободный нейтрон испытывает  $\beta^-$ -распад (бета-минус распад) за счет слабого взаимодействия за время, равное приблизительно 15 мин. Нуклоны построены из  $d$ -кварка и  $u$ -кварка:  $p = (uud)$ ,  $n = (udd)$ .

**Гипероны** (от *греч.* hyper — сверх, выше) — это нестабильные частицы с массой больше массы нуклонов, они имеют большое (по ядерным масштабам) время жизни. Гипероны обладают особым квантовым числом — странностью  $S$  — и вместе с  $K$ -мезонами (их еще называют каонами) и некоторыми резонансами образуют группу странных частиц. Первый гиперон был открыт в космических лучах в 1947 г. К гиперонам относятся такие частицы, как лямбда-гиперон ( $\Lambda = (uds)$ ,  $m = 1116$  МэВ), сигма-плюс, сигма-ноль и сигма-минус гипероны ( $\Sigma^+ = (uus)$ ,  $\Sigma^0 = (uds)$ ,  $\Sigma^- = (dds)$ ,  $m = 1190$  МэВ), кси-минус и кси-ноль гипероны ( $\Xi^- = (dss)$ ,  $\Xi^0 = (uus)$ ,  $m = 1320$  МэВ), омега-минус гиперон ( $\Omega^- = (sss)$ ,  $m = 1670$  МэВ),  $K^+$ -мезон ( $(u\bar{s})$ ,  $m = 494$  МэВ) и  $K^0$ -мезон ( $(d\bar{s})$ ,  $m = 498$  МэВ).

**$\pi$ -мезоны (пионы):**  $\pi^+ = (u\bar{d})$ ,  $\pi^- = (d\bar{u})$ ,  $\pi^0 = (u\bar{u})$ ,  $d\bar{d}$  относятся к классу адронов и являются среди них наиболее легкими. Масса пионов — промежуточная между массами протона и электрона, в связи с этим они и были названы мезонами (от *греч.* mesos — средний, промежуточный):

$$m_{\pi^\pm} \approx 140 \text{ МэВ}, m_{\pi^0} \approx 135 \text{ МэВ}.$$

Пионы участвуют во всех фундаментальных взаимодействиях. Слабое взаимодействие ответственно, в частности, за нестабильность заряженных пионов, которые распадаются в основном (на 99,97%) по схеме:  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \tilde{\nu}_\mu (\nu_\mu)$  за время, равное  $2,6 \cdot 10^{-8}$  с. Нейтральные пионы распадаются в результате электромагнитного взаимодействия преимущественно на два  $\gamma$ -кванта:  $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$  (98,85%) и имеют время жизни  $0,83 \cdot 10^{-16}$  с. Наиболее характерно участие пионов в процессах сильного взаимодействия.

Существование пионов было постулировано японским физиком Х. Юкавой в 1935 г. для объяснения короткодействующего характера и большой величины ядерных сил. Экспериментально пионы были открыты в 1947 г. в результате их распада  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \tilde{\nu}_\mu (\nu_\mu)$ , зарегистрированного в ядерных фотоэмульсиях, облученных космическими лучами. Существование нейтральных пионов следовало из обнаруженной на опыте зарядовой независимости ядерных сил. Экспериментально  $\pi^0$ -мезоны были обнаружены в 1950 г. по  $\gamma$ -квантам от их распада  $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ;  $\pi^0$ -мезоны рождались в столкновениях фотонов и протонов высокой энергии ( $\sim 300$  МэВ) с ядрами.

**Резонансы (резонансные частицы)** — короткоживущие возбужденные состояния адронов. В отличие от других нестабильных элементарных частиц резонансы распадаются в основном за счет сильного взаимодействия. Поэтому их время жизни лежит в интервале  $10^{-22} \div 10^{-24}$  с, что по порядку величины близко к характерному ядерному времени жизни ( $\sim 10^{-23}$  с).

Первый резонанс был открыт в 1951 г. итальянским физиком Ферми с сотрудниками при изучении рассеяния  $\pi^+$ -мезона на протонах:

$$\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ + p; \quad (11.9 \text{ а})$$

$$(u\bar{d}) + (uud) \rightarrow (uuu) \rightarrow (u\bar{d}) + (uud). \quad (11.9 \text{ б})$$

Как следует из данной реакции, протон присоединяет  $\pi^+$ -мезон и переходит в возбужденное состояние с положительным зарядом  $2|e|$ , которое сразу распадается за счет сильного взаимодействия на первоначальные частицы.



В современных обозначениях это резонанс  $\Delta_1^{++} = (uuu)$  или  $\Delta_{33}(1232)$ , где цифры индекса обозначают удвоенный изотопический спин (первое число) и удвоенный спин (второе число), а в скобках указана масса резонанса в МэВ. Основная часть резонансов была обнаружена в 1960-х гг. в экспериментах на протонных ускорителях.

Резонансы делятся на барионные, обладающие барионным зарядом ( $B = 1$ ) и распадающиеся на мезоны и один стабильный барион, и мезонные ( $B = 0$ ), распадающиеся на мезоны.

К 1981 г. открыто более 300 резонансов, которые группируются примерно в 40 барионных и 30 мезонных изотопических мультиплетов (см. 11.1.5).

**Очарованные, красивые и истинные частицы.** В последнее время были обнаружены частицы, в состав которых входят тяжелые  $c$ -,  $b$ -кварки. В группе очарованных частиц — это джи-пси мезоны  $J/\Psi = (c\bar{c})$ , мезоны  $D^+ = (c\bar{d})$ ,  $D^0 = (c\bar{u})$ ,  $F^+ = (c\bar{s})$ . К группе красивых частиц относятся ипсилон-мезоны  $\Upsilon = (b\bar{b})$ , а также мезоны  $B^+ = (u\bar{b})$  и  $B^0 = (d\bar{b})$ .

Самый тяжелый  $t$ -кварк был открыт в 1995 г. на ускорителе, где сталкивались пучки протонов и антипротонов. Из-за малого времени жизни этого кварка он не успевает войти в состав мезона или бариона, то есть образовать связанную систему кварков. Поэтому адронов с квантовым числом  $t$  (истина) не существует.

#### 11.1.9. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В настоящее время существуют универсальные законы сохранения, которые выполняются для всех видов взаимодействий. Они связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени, с наличием определенной симметрии. Причем симметрия понимается как инвариантность физических законов, уравнений движения относительно некоторой группы преобразований. Так, например, закон сохранения энергии  $W$  связан с однородностью времени, то есть с инвариантностью физических законов относительно изменения начала отсчета времени, закон сохранения импульса  $\vec{p}$  — с однородностью пространства (инвариантность относительно пространственных сдвигов) и момента импульса  $\vec{L}$  с изотропностью пространства (инвариантность относительно вращений пространства).

В теории элементарных частиц в настоящее время возникло много специфических законов сохранения. Некоторые из них являются универсальными — законы сохранения электрического  $Q$ , барионного  $B$  и лептонного  $L_e, L_\mu, L_\tau$  зарядов; они выполняются для всех взаимодействий между элементарными частицами, а другие, приближенные законы сохранения, выполняются для одних типов взаимодействий и нарушаются для других. Например, только в сильном взаимодействии выполняется закон сохранения изоспина  $I$ . В сильном и электромагнитном взаимодействии выполняются законы сохранения проекции изоспина, странности ( $S$ ), очарования ( $C$ ), красоты ( $b$ ) и истины ( $t$ ). Слабое взаимодействие нарушает многие законы сохранения, которые выполняются в сильном и электромагнитном взаимодействии. Так,

в слабом взаимодействии нарушаются законы сохранения изоспина, четности, странности, очарования, красоты, истины.

Известно, что каждому виду симметрии физической системы соответствует свой закон сохранения, своя сохраняющаяся физическая величина. В теории элементарных частиц не ясно, с какими видами симметрии связаны те или иные законы сохранения квантовых чисел —  $B, L_e, L_\mu, L_\tau, S, C, b, t$ . Только для электрического заряда  $Q$  и для изоспина  $I$  можно утвердительно ответить на этот вопрос. Закон сохранения электрического заряда связан с тем, что смещение (изменение) потенциала на любое значение не изменяет уравнений движения заряда в электрическом поле. Закон сохранения изоспина связан с инвариантностью сильного взаимодействия относительно поворотов в специальном изотопическом пространстве.

Законы сохранения запрещают протекание процессов, происходящих с их нарушением; они играют роль правил отбора.

#### 11.1.10. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ И НАРУШЕНИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ПРОТЕКАНИИ РЕАКЦИЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

**Реакция  $\beta^-$ -распада нейтрона** происходит за счет слабого взаимодействия по схеме

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u \\ d \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} u \rightarrow u \\ d \rightarrow d \\ d \rightarrow u + W^- \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} u \rightarrow u \\ d \rightarrow d \\ d \rightarrow u + e^- + \tilde{\nu}_e \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} u \\ d \end{matrix} \right\} + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (11.10 \text{ а})$$

и представляет собой распад  $d$ -кварка за счет слабого взаимодействия с участием промежуточного векторного бозона  $W^-$ :

$$d \rightarrow u + W^- \rightarrow u + e^- + \tilde{\nu}_e. \quad (11.10 \text{ б})$$

Как видно, процесс протекает в два этапа — сначала рождается  $W^-$ -бозон, а затем он распадается на электрон и электронное антинейтрино:  $W^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e$ .

В реакции (11.10 а) сохраняется: 1) электрический заряд (электрический заряд частиц до и после реакции равен нулю); 2) лептонный заряд (для нейтрона лептонный заряд равен нулю), для продуктов реакции также лептонный заряд в сумме равен нулю ( $L_e = +1$  для электрона и  $L_e = -1$  для электронного антинейтрино); 3) барионный заряд (барионный заряд частиц до и после реакции равен единице: для нейтрона и протона  $B = 1$ ).

Проекция изоспина не сохраняется: для протона  $I_3 = 1/2$ , для нейтрона  $I_3 = -1/2$ . Квантовые числа — странность ( $S$ ), очарование ( $C$ ), красота ( $b$ ) и истина ( $t$ ) для исходных частиц и продуктов реакции равны нулю.

**Реакции рождения и распада гиперонов** — гипероны рождаются парами, а распадаются поодиночке. Для того чтобы описать такое поведение гиперонов, для них было введено новое квантовое число — странность  $S$ . Приведем в качестве примера две реакции с участием гиперонов:

$$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-; \quad (11.11 \text{ а})$$

$$\Lambda \rightarrow \pi^- + p. \quad (11.11 \text{ б})$$

Реакция образования гиперонов (11.11 а) протекает за счет сильного взаимодействия. Поэтому в ней наряду с выполнением закона сохранения электрического заряда выполняется и закон сохранения странности (для  $K^+$ -мезона  $S = 1$ , для сигма-минус гиперона  $\Sigma^- S = -1$ , для  $\pi^-$  и  $p$  странность  $S = 0$ ). Реакция (11.11б) протекает с участием слабого взаимодействия, и для нее нарушается закон сохранения странности (для лямбда ( $\Lambda$ ) гиперона —  $S = -1$ ).

**Закон сохранения лептонного заряда** запрещает протекание реакции следующего вида:  $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$ . В этой реакции для исходных частиц  $L_\mu = 1$ ,  $L_e = L_\tau = 0$ , а для продуктов реакции  $L_e = 1$ ,  $L_\mu = L_\tau = 0$ . Следовательно, не выполняются законы сохранения для лептонных зарядов  $L_\mu$  и  $L_e$ .

**Неоднозначность протекания реакций между элементарными частицами.** В физике элементарных частиц при одинаковом составе исходных частиц реакция их взаимодействия может протекать по различным схемам с различной вероятностью. Так, в качестве первого примера можно привести реакцию распада  $K^0$ -мезона за счет слабого взаимодействия. Имеется несколько схем его распада — короткоживущий канал (время распада порядка  $10^{-10}$  с):

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad (11.12 \text{ а})$$

и долгоживущий канал (время распада порядка  $5 \cdot 10^{-8}$  с):

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0; \quad (11.12 \text{ б})$$

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e, K_L^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \quad (11.12 \text{ в})$$

Во втором примере рассмотрим реакцию взаимодействия  $\pi^-$ -мезона и протона  $p$ . К реакции, записанной в формуле (11.11 а), можно добавить еще одну:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (11.13)$$

#### 11.1.11. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЧЕТНОСТИ. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ (С), СР-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (КОМБИНИРОВАННАЯ ИНВЕРСИЯ), ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ (Т-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ), СРТ-ТЕОРЕМА

**Закон сохранения четности.** Исследования в физике элементарных частиц наглядно показывают необходимость экспериментальной проверки существующих законов сохранения. Это связано с тем, что появляющиеся новые экспериментальные данные могут привести к изменению области их применимости.

Приведем ряд примеров, показывающих, как изменялись взгляды на инвариантность (неизменность) физических законов (уравнений движения) при таких преобразованиях, как пространственная инверсия, зарядовое сопряжение и обращение времени.

Под четностью частицы понимают характеристику ее состояния, отображающую свойства симметрии ее волновой функции  $\psi(\vec{r})$  относительно пространственной инверсии, когда происходит замена знаков координат частицы  $(x, y, z)$  на противоположные координаты  $(-x, -y, -z)$ , при этом радиус-вектор  $\vec{r}$  частицы заменяется на противоположный радиус-вектор:  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ .

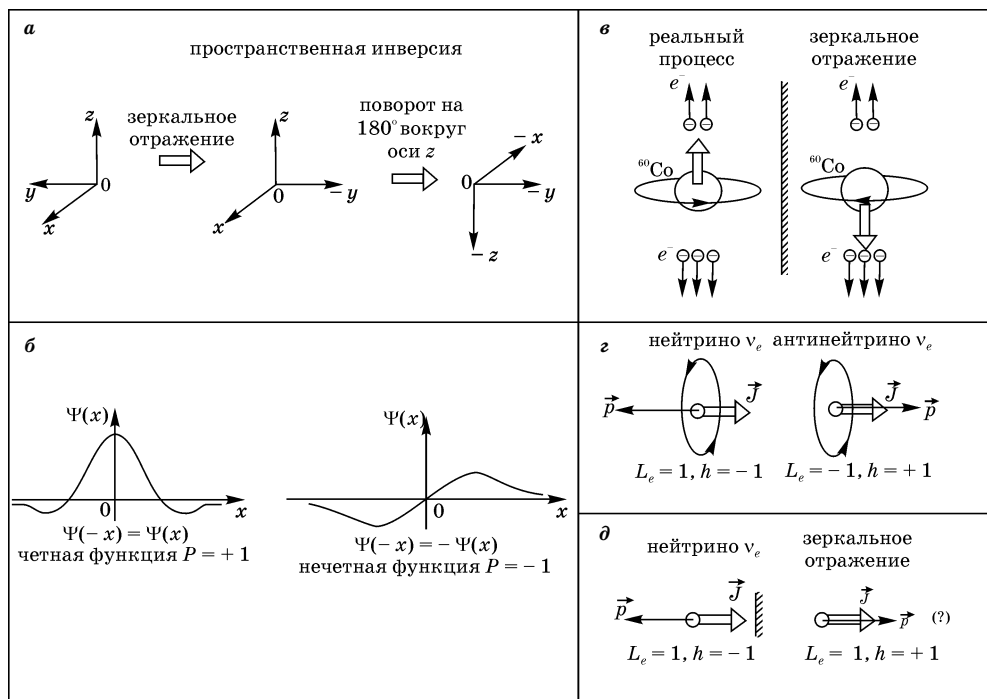


Рис. 11.3

Такую операцию можно осуществить за счет отражения в зеркале, расположенном в плоскости  $zOx$  ( $y \rightarrow -y$ ), и затем поворота осей координат вокруг оси  $O(-y)$  на  $180^\circ$  ( $x \rightarrow -x$ ,  $z \rightarrow -z$ , рис. 11.3а). Операция зеркального отражения переводит правовинтовую систему координат в левовинтовую систему координат.

Вводится квантовое число **четность**  $P$ , оно определяется внутренними свойствами частицы. Если волновая функция частицы при пространственной инверсии является четной  $\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$ , то тогда  $P = +1$ , если нечетной  $\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$ , то  $P = -1$  (рис. 11.3б). Так, например, для протона, нейтрона и электрона четность  $P = +1$ , а для фотона  $P = -1$ .

Долгое время считалось, что пространство-время обладает зеркальной симметрией (симметрией, связанной с заменой правого на левое), то есть оно инвариантно относительно пространственной инверсии. Это означает, что в природе для любого физического процесса должен существовать его зеркальный аналог. В этом случае для частиц должна сохраняться четность, поскольку она инвариантна относительно зеркального отражения.

Однако в 1957 г. в результате эксперимента было обнаружено несохранение четности в слабом взаимодействии. Оказалось, что при  $\beta$ -распаде ядер кобальта в направлении его спина вылетают примерно в 1,5 раза меньше электронов, чем в противоположном (рис. 11.3в). Зеркальное отражение этого процесса приводит к смене направления спинов атомов кобальта на противоположное (происходит замена правого вращения на левое, рис. 11.3в), и по-

этому больше электронов должно лететь в направлении, совпадающем со спином ядер кобальта, что не наблюдается на опыте. Следовательно, зеркальная симметрия в таком процессе нарушается, а именно *процесс, полученный за счет зеркального отражения, в природе не существует*. Следовательно, в слабых взаимодействиях нарушается закон сохранения четности — слабое взаимодействие приводит к изменению четности волновых функций частиц.

Вторым доказательством нарушения четности является существование *спиральности* у нейтрино. Было экспериментально доказано, что импульс  $\vec{p}$  и спин  $\vec{J}$  нейтрино всегда направлены в противоположные стороны (рис. 11.3г). Такие частицы называют левополяризованными (либо левовинтовыми или левозакрученными), так как они движутся подобно левому винту и им приписывают спиральность  $h$ , равную  $h = -1$ . Говорят, что нейтрино обладает отрицательной спиральностью.

Для антинейтрино направления импульса и спина совпадают, для нее спиральность равна  $h = +1$ , она обладает положительной спиральностью. Это правополяризованная (правовинтовая, правозакрученная) частица, она движется подобно правому винту (рис. 11.3г).

Процесс зеркального отражения нейтрино ( $L_e = 1, h = -1$ ) приводит к возникновению частицы ( $L_e = 1, h = +1$ ), которой не существует в природе (рис. 11.3д), так как для такой частицы спиральность  $h = +1$ , что не соответствует нейтрино, а для антинейтрино ( $L_e = -1, h = +1$ ) лептонный заряд будет равен  $(-1)$ .

**Зарядовое сопряжение (C), CP-преобразование (комбинированная инверсия), обращение времени (T-преобразование), CPT-теорема.** Зарядовое сопряжение — это преобразование, при котором все значения квантовых чисел (зарядов), описывающих частицу, изменяют свой знак на противоположный, а масса, импульс и спин частицы остаются неизменными. Такое преобразование должно привести к замене частицы на античастицу, оно справедливо для сильных и электромагнитных взаимодействий (уравнения Максвелла не изменяются).

Для слабого взаимодействия зарядовое сопряжение не приводит к возникновению античастицы. В результате такого преобразования из нейтрино не получается антинейтрино:  $(L_e = 1, h = -1) \Rightarrow (L_e = -1, h = -1)$ , так как спиральность при этом не изменяется. Это свидетельствует о нарушении инвариантности законов относительно зарядового сопряжения для слабых взаимодействий.

До 1964 г. считалось, что комбинированное CP-преобразование (последовательное применение пространственной инверсии и зарядового сопряжения) приводит к инвариантности физических законов для слабого взаимодействия (оно переводит нейтрино в антинейтрино и наоборот). Однако было экспериментально доказано, что распад истинно нейтральных каонов  $K_L^0$  и  $K_S^0$  происходит с нарушением CP-инвариантности. Нарушение CP-инвариантности было подтверждено в 2001–2002 гг. в процессах с участием  $B^0$  и  $\bar{B}^0$ -мезонов.

T-инвариантность означает, что физические законы и уравнения движения не изменяются при замене знака времени  $t: t \rightarrow -t$ . Это справедливо для

сильных и электромагнитных взаимодействий ( $T$ -преобразование оставляет неизменными уравнения Максвелла).

Существует ***CPT*-теорема**, которая утверждает, что последовательное применение всех трех преобразований к существующему миру не изменяет его. Учитывая *CPT*-теорему и нарушение *CP*-инвариантности в слабых взаимодействиях, можно сделать вывод о нарушении  $T$ -инвариантности в этих взаимодействиях. Этот факт требует детальной проработки вопросов, связанных с фундаментальными свойствами пространства и времени.

11.1.12.

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ

ФИЗИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ МИРА С УМЕНЬШЕНИЕМ

РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

Проблемы эволюции Вселенной тесно связаны с физикой элементарных частиц. Действительно, развитие Вселенной происходило из состояния, при котором все вещество Вселенной было нагрето до очень высокой температуры и сжато в точку, размеры которой были существенно меньше размеров элементарных частиц. Расширение Вселенной из такого состояния называют Большим взрывом (БВ). В последующие моменты времени Вселенная проходила этапы, которые пытаются изучить в настоящее время в физике элементарных частиц. Для этого увеличивают энергию столкновения частиц в ускорителях.

На рис. 11.4 приведены шкалы, на которых отмечено время  $t$  после начала Большого взрыва, линейные размеры  $l$  Вселенной и средние энергии частиц  $W$  в эти моменты времени. Отметим, что эти средние энергии можно получить в ускорителях, увеличивая энергию столкновения частиц  $W_{\text{ст}}$ , причем  $W_{\text{ст}} = W$ . Однако экспериментальные возможности ускорителей заряженных частиц накладывают существенные ограничения на перемещение по шкале энергий и соответственно по шкале времени к началу БВ (в настоящее время  $W_{\text{ст. макс.}} \approx 100$  ГэВ).

Рассмотрим основные этапы, которые проходит Вселенная при своем развитии (они отмечены цифрами 1, 2, и 3 на рис. 11.4). Прежде всего экспериментально было доказано слияние слабого и электромагнитного взаимодействий при достижении энергий столкновения частиц порядка 100 ГэВ. Это

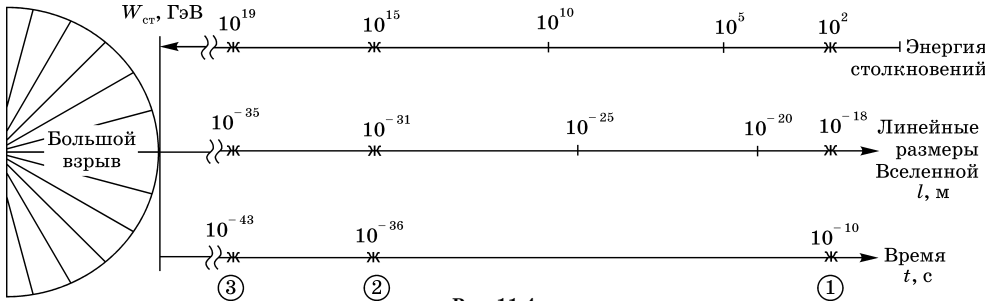


Рис. 11.4

происходит в точке 1 (рис. 11.4), при этом линейные размеры Вселенной  $l \approx 10^{-18}$  м, а время, прошедшее после начала БВ, составляло  $t \approx 10^{-10}$  с.

Затем, согласно Теории великого объединения (ТВО), при достижении средней энергии частиц порядка  $10^{15}$  ГэВ (точка 2 на рис. 11.4, для нее линейные размеры Вселенной  $l \approx 10^{-31}$  м, а время  $t$  от начала Большого взрыва составляло  $t \approx 10^{-36}$  с) должно происходить слияние трех взаимодействий в единое (к электрослабому взаимодействию присоединяется сильное взаимодействие). Такую энергию столкновения на ускорителях не удастся достичь в обозримом будущем, что предполагает поиски доказательств ТВО в окружающем мире, то есть поиски того, что осталось на данный момент времени после Большого взрыва.

Теория великого объединения предсказывает распад протона и существование магнитных зарядов (монополей Дирака). Французский ученый Дирак впервые, исходя из требования симметрии уравнений Максвелла, предсказал существование монополей — источников сферически симметричного магнитного поля. Они имеют очень большую массу ( $\approx 10^{16} \div 10^{17}$  ГэВ), и поэтому их нельзя обнаружить с помощью ускорителей.

Согласно Теории великого объединения вероятность распада протона является очень малой величиной — так, время жизни протона превышает  $> 10^{32}$  лет, что также затрудняет получение доказательств о справедливости ТВО.

На ранних этапах развития Вселенной выделяют еще одну пограничную точку — точку 3 ( $W \approx 10^{19}$  ГэВ,  $l \approx 10^{-35}$  м  $t \approx 10^{-43}$  с), в которой *происходит слияние всех четырех видов взаимодействий*. Ей соответствует энергия, называемая планковской энергией  $W_{\text{пл}}$ .

Планковская энергия — это комбинация трех фундаментальных постоянных, таких как гравитационная постоянная  $G$ , постоянная Планка  $\hbar$  и скорость света  $c$ :

$$W_{\text{пл}} = \sqrt{\hbar c^5 / G} \approx 1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ.} \quad (11.14)$$

В точке 3 должно наблюдаться много интересных явлений — например появляются кванты длины  $l_{\text{пл}}$ , времени  $t_{\text{пл}}$  и массы  $m_{\text{пл}}$ , числовые значения которых можно найти из планковской энергии  $W_{\text{пл}}$ :

$$m_{\text{пл}} = W_{\text{пл}} / c^2 = \sqrt{\hbar c / G} \approx 1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ;} \quad (11.15 \text{ а})$$

$$t_{\text{пл}} = \hbar / W_{\text{пл}} = \sqrt{\hbar G / c^5} \approx 10^{-43} \text{ с;} \quad (11.15 \text{ б})$$

$$l_{\text{пл}} = ct = \sqrt{\hbar G / c^3} \approx 10^{-35} \text{ м.} \quad (11.15 \text{ в})$$

На расстояниях  $l < l_{\text{пл}}$  происходит распад на кванты единого непрерывного пространства–времени. Это приводит к тому, что в этой области теряет смысл понятие «прошлое» и «будущее».

Появление квантов длины  $l_{\text{пл}}$ , времени  $t_{\text{пл}}$  и массы  $m_{\text{пл}}$  приводит к необходимости создания квантовой теории гравитации. При этом наиболее разработанной в данной области физики считается **теория суперструн**.

Согласно этой теории при переходе через точку 3 ( $l < l_{\text{пл}}$ ) все многообразие частиц переходит в одномерные объекты (суперструны), имеющие линейные размеры порядка планковской длины  $l_{\text{пл}}$ .

Суперструны совершают колебания с разными частотами в 26-мерном пространстве–времени. Эти колебания распространяются в пространстве, возникают волны, квантование которых и приводит к многообразию частиц для расстояний  $l \geq l_{\text{пл}}$ . Для того чтобы исключить нефизические решения, необходимо предположить наличие особой *суперсимметрии* — симметрии между бозонами и фермионами (каждому бозону соответствует свой фермион). Она позволяет снизить размерность пространства–времени до десяти. При образовании частиц шесть измерений скручиваются (компактируются) внутри частиц и получается обычное четырехмерное пространство–время.

## 11.2. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

### 11.2.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТОМНОГО ЯДРА

В опытах Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц веществом (1911) было доказано, что положительный заряд и практически вся масса атома сосредоточены в малом по размерам ядре (линейные размеры ядра составляют порядка  $10^{-14} \div 10^{-15}$  м, а размеры атома  $\sim 10^{-10}$  м).

**1. Состав ядра.** Сначала считалось, что в состав ядра входят протоны и электроны. Но вскоре такая модель ядра была отвергнута из-за того, что она противоречила многим фактам (например спинам и магнитным моментам ядер). К тому же легкие по сравнению с протоном электроны ( $m_p = 1870 m_e$ ) не могут входить в состав ядра в силу его малых размеров. Это следует из соотношений неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса. Действительно, можно оценить минимальную энергию электрона в ядре, если предположить, что неопределенность по координате электрона в ядре равна диаметру ядра. Рассчитывая энергию электрона в релятивистском случае ( $W \gg W_0$ ), получим

$$p_X \geq \Delta p_X = h / \Delta x = h / (2R), \quad W_{\text{мин}} = p_X c = (hc) / (2R) \approx 100 \text{ МэВ}. \quad (11.16)$$

Такая оценка не согласуется со значением энергии электрона, вылетающего при  $\beta$ -распаде из ядра:  $W_{\text{макс}} \approx (0,02 \div 14) \text{ МэВ}$ . Электроны с энергией 100 МэВ, согласно формуле (11.16), должны были бы находиться в ядре, размеры которого превышали бы известные из опыта размеры в 10 и более раз.

После открытия нейтрона (Чедвик, 1932) окончательно сложилась протонно-нейтронная модель атомного ядра. Массы протона и нейтрона примерно одинаковы и равны

$$m_p = 1,00759 \text{ а. е. м.} = 938,28 \text{ МэВ}, \quad m_n = 1,00898 \text{ а. е. м.} = 939,57 \text{ МэВ}.$$

Протон имеет положительный электрический заряд, равный по модулю заряду электрона ( $q_p = |e|$ ), а нейтрон электрического заряда не имеет. Собственные магнитные моменты для протона и нейтрона соответственно равны



$$\mu_p = +2,79 \mu_J, \mu_n = -1,91 \mu_J, \quad (11.17)$$

$$\mu_J = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}, \quad (11.18)$$

где  $\mu_J$  — ядерный магнетон, он является единицей квантования ядерного магнитного момента.

Необычные значения магнитных моментов протона и нейтрона можно объяснить обменным характером ядерного взаимодействия (см. п. 11.1.2, формула (11.3)). В соответствии с ним каждый нуклон испускает виртуальные частицы-переносчики взаимодействий, то есть нуклон может находиться часть времени в виртуальном состоянии:  $p \leftrightarrow n + \pi^+$ ,  $n \leftrightarrow p + \pi^-$ , обмениваясь виртуальными  $\pi$ -мезонами. Орбитальное движение  $\pi$ -мезонов и приводит к наблюдаемым значениям магнитных моментов нуклонов.

**2. Обозначение ядра.** Ядро химического элемента  $X$  принято обозначать символом  ${}_Z^AX$ . Здесь  $Z$  — **зарядовое число**, оно определяет заряд ядра ( $Z|e|$ ), или порядковый номер элемента в периодической системе элементов, или число электронов в электрически нейтральном атоме;  $A = (Z + N)$  — **массовое число**, оно дает суммарное число протонов ( $Z$ ) и нейтронов ( $N$ ) в ядре или число нуклонов в ядре.

**3. Типы ядер.** Среди ядер выделяют разные группы ядер, отметим некоторые из них:

1) *изотопы* — это ядра, у которых одинаковое число протонов ( $Z_1 = Z_2$ ), но разное число нейтронов ( $N_1 \neq N_2$ ); так, например, для водорода имеется три изотопа — протий  ${}_1^1H$ , дейтерий  ${}_1^2H$  и тритий  ${}_1^3H$ ;

2) *изобары* — ядра, у которых одинаковые массовые числа ( $A_1 = A_2$ ), но разные зарядовые числа ( $Z_1 \neq Z_2$ ), эти ядра образуются, например, при  $\beta$ -распаде ядер;

3) *изомеры* — ядра, у которых одинаковое число нейтронов ( $N_1 = N_2$ ), но разное число протонов ( $Z_1 \neq Z_2$ ).

У всех ядер существуют изотопы. Это приводит к тому, что приводимое в Периодической системе элементов Менделеева для каждого элемента массовое число не является целым, так как оно учитывает наличие разных изотопов для данного элемента и процентное содержание их в земной коре.

**4. Размеры ядер.** В предположении сферической формы ядра, для зависимости радиуса ядра от его массового числа экспериментально, с помощью различных методик была получена следующая формула:

$$R = (1,2 \div 1,5) \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ м}. \quad (11.19)$$

Из нее следует, что плотность ядерного вещества во всех ядрах примерно одинакова, то есть ядерное вещество несжимаемо:

$$\rho = m/V \approx m_p A / (4\pi R^3 / 3) \approx 10^{17} \text{ кг/м}^3, \quad (11.20)$$

и его плотность чрезвычайно велика по сравнению с плотностью обычных веществ.

**5. Магнитный и спиновый моменты ядра.** Суммарный спин ядра складывается из спинов его отдельных нуклонов (для них он равен  $1/2$ ). В зависимости

от массового числа  $A$  спин ядра может быть полуцелым (при нечетном  $A$ ) или целым, в том числе включая нулевое значение (при четном  $A$ ). Экспериментальные данные свидетельствуют, что в ядре наблюдается антипараллельная ориентация спинов отдельных нуклонов и поэтому суммарный спин ядра принимает малые значения. У ядер с четным числом протонов и нейтронов спин ядра равен нулю.

### 11.2.2. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ. СВОЙСТВА ЯДЕРНЫХ СИЛ

Между нуклонами в ядре действуют ядерные силы, возникает новый вид взаимодействия — сильное взаимодействие. Ядерные силы обладают следующими свойствами:

*По интенсивности превосходят кулоновские примерно в 100 раз* (см. п. 11.1.1). Поэтому ядерные силы удерживают в ядре положительно заряженные протоны, между которыми также действуют кулоновские силы отталкивания.

*Не зависят от электрического заряда частиц*, то есть интенсивность ядерного взаимодействия между протоном и нейтроном, нейтроном и нейтроном, протоном и протоном одинаковы, вследствие этого нейтроны также удерживаются вместе внутри ядра.

*Способствуют тому, что ядро является устойчивым образованием*, то есть при его получении выделяется энергия. Она называется **энергией связи атомного ядра** и рассчитывается по формуле

$$W_{\text{CB}} = \Delta mc^2 = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а. е. м.}} ((A - Z)m_n + Zm_p - m_{\text{я}}), \quad (11.21 \text{ а})$$

где  $\Delta m$  — разность масс — называют еще **дефектом массы**.

Энергия связи атомного ядра  $W_{\text{CB}}$  представляет собой минимальную энергию, которую нужно сообщить ядру, чтобы разделить его на отдельные нуклоны и развести их на расстояния, на которых они не взаимодействуют.

Для удобства расчетов энергии связи ее выражают в МэВ, а массы частиц — в атомных единицах массы. Кроме того, в формуле (11.21 а) вместо массы ядра и массы протона вводят массы нейтрального атома и атома водорода. Это удобный прием, так как измерить экспериментально массу ядра достаточно сложно, и если это возможно, то требуется удаление всех электронов из атома. Получаемая при этом неточность в расчетах является малой (она равна энергии взаимодействия электронов с ядром). В этом случае формула (11.21 а) примет вид:

$$W_{\text{CB}} = \Delta mc^2 = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а. е. м.}} ((A - Z)m_n + Zm_{\text{H}} - m_{\text{атома}}). \quad (11.21 \text{ б})$$

Для сравнения прочности ядер, для оценки силы взаимодействия нуклонов в ядре вводят удельную энергию связи как энергию связи, приходящейся на один нуклон:

$$W_{\text{уд}} = W_{\text{CB}}/A. \quad (11.22)$$

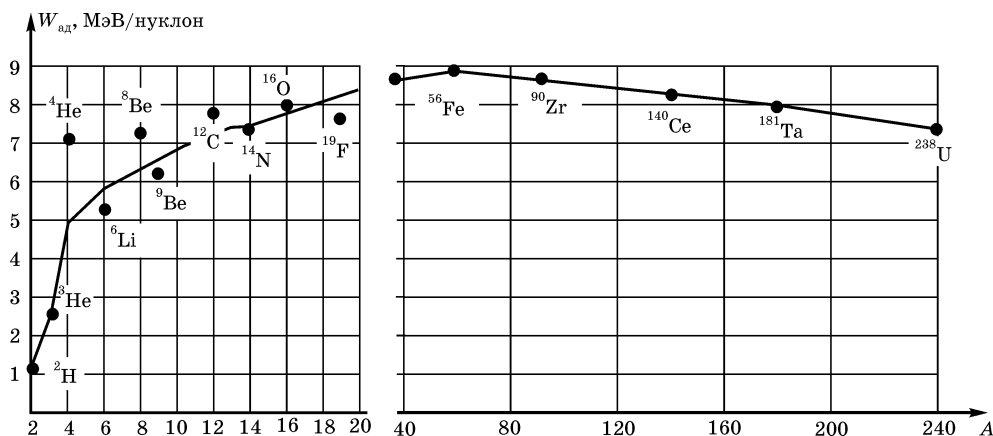


Рис. 11.5

Усредненный график зависимости удельной энергии связи от массового числа приведен на рис. 11.5. Из него следует, что наиболее прочными являются ядра элементов с массовыми числами порядка 50, то есть вблизи железа, у них наблюдаются самые большие значения  $W_{уд}$ .

Такая зависимость  $W_{уд}$  приводит к выводу о возможности выделения энергии для двух типов ядерных реакций — это реакции деления тяжелых ядер и синтеза легких ядер. В таких реакциях образуются более устойчивые ядра, то есть ядра с большей удельной энергией связи. Например, если ядро с массовым числом 200 ( $W_{уд} \approx 7,8$  МэВ) разделить на два ядра с массовыми числами 100 ( $W_{уд} = 8,6$  МэВ), то при этом будет выделяться энергия, равная  $W_{яд} \approx 200 \cdot (8,6 - 7,8) = 160$  МэВ.

*Ядерные силы зависят от ориентации спинового момента нуклонов.* Так, атом дейтерия образуется только в том случае, когда спиновые моменты протона и нейтрона направлены параллельно друг другу.

*Ядерные силы не являются центральными,* то есть их нельзя представить как силы, действующие вдоль прямой, соединяющей нуклоны. Это, в частности, проявляется в зависимости ядерных сил от спина нуклонов.

*Ядерные силы обладают свойством насыщения.* Это подтверждается тем фактом, что удельная энергия связи ядра  $W_{уд}$  слабо изменяется при переходе от одного ядра к другому (при массовых числах ядер  $A$ , больших 20). Уменьшение  $W_{уд}$  при больших массовых числах связано с тем, что при увеличении порядкового номера элемента возрастает сила кулоновского отталкивания протонов внутри ядра, следствием чего становится меньшая устойчивость ядер, их удельная энергия связи уменьшается (рис. 11.5).

*Ядерные силы являются короткодействующими.* Данный факт позволяет объяснить механизм распада тяжелых ядер. Так, при попадании нейтрона в ядро оно возбуждается и принимает различные формы, в частности форму гантели (см. рис. 11.6). В узкой области перешейка ядерные силы будут ослаблены (в них участвует малое количество ядер), поэтому за счет

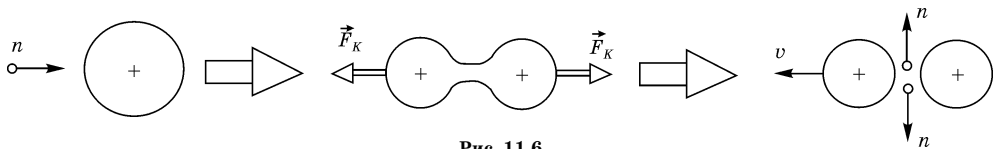


Рис. 11.6

дальнодействующих кулоновских сил (их интенсивность при этом не ослабевает) ядро распадается, образуя 2 осколка, разлетающихся с большими скоростями, и 2–3 нейтрона. Энергия при ядерной реакции выделяется, в основном, в виде кинетической энергии разлетающихся осколков.

### 11.2.3. МОДЕЛИ АТОМНОГО ЯДРА

Как было отмечено выше, ядро представляет собой систему сильно взаимодействующих частиц, причем ядерные силы не являются центральными. Это не позволяет в рамках квантовой механики точно решить задачу на движение частиц внутри ядра.

В настоящее время используют ряд моделей, которые описывают достаточно хорошо то или иное свойство ядер.

**Капельная модель ядра.** Ядро рассматривается как капля заряженной жидкости. Ядро и заряженную каплю жидкости объединяют такие свойства, как несжимаемость ядерного вещества и жидкости, а также короткодействующий характер сил, действующих между нуклонами и между молекулами жидкости.

Данная модель позволяет получить полуэмпирическую формулу для энергии связи ядра (формула Вейцзеккера):

$$W_{\text{св}} = C_{\text{об}} A - C_{\text{пов}} A^{2/3} - C_{\text{кул}} Z^2 A^{-1/3} - C_{\text{сим}} (A - 2Z)^2 A^{-1} + C_{\text{спар}} A^{-\varepsilon} \delta. \quad (11.23)$$

Выражение (11.23) содержит такие слагаемые, как объемная, поверхностная, кулоновская энергии связи (они вытекают из аналогии ядра с каплей жидкости), а также энергия симметрии и энергия спаривания. Входящие в формулу постоянные коэффициенты выбираются из наилучшего согласия теории и эксперимента.

Опытным путем установлено, что легкие ядра, у которых число протонов и нейтронов одинаково ( $Z = N$ ), имеют повышенную стабильность по сравнению с другими ядрами ( $Z \neq N$ ) того же массового числа ( $A = Z + N$ ). Отрицательная добавка в энергию связи ядра для случая ( $Z \neq N$ ) и называется энергией симметрии.

Вторая добавка в энергию связи (энергия спаривания) связана с тем, что для четно-четных ядер (у них число протонов и нейтронов является четным) энергия связи максимальна по сравнению с нечетно-нечетными ядрами. Это свидетельствует о спаривании, объединении внутри ядра одинаковых нуклонов в пары.

Параметр  $\delta$  в формуле (11.23) принимает значения ( $\delta = 1$ ) для четно-четных ядер,  $\delta = 0$  для ядер с нечетным массовым числом  $A$  и  $\delta = -1$  для нечетно-нечетных ядер.

Капельная модель также помогает объяснить механизм деления тяжелых ядер (рис. 11.6 и пояснения к нему).

**Оболочечная модель ядра.** Ядро — квантовая система, в которой в потенциальном поле ядра движутся нуклоны. Решение квантовой задачи на движение частиц в потенциальном поле приводит к возникновению дискретного набора уровней энергии отдельно для протонов и нейтронов. Заполнение уровней идет в соответствии с принципом Паули и условием минимальности энергии, то есть так же, как и заполнение электронных оболочек в многоэлектронном атоме.

Вид потенциального поля выбирается из условия наилучшего согласия расчетных данных с экспериментом, при этом решение сводится к одночастичной задаче (подобно решению задачи квантовой механики для многоэлектронных атомов, см. п. 10.2.1).

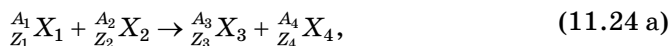
Данная модель объясняет существование наиболее устойчивых ядер (их называют магическими). Согласно этой модели они соответствуют полностью заполненным нейтронным или протонным оболочкам. К ним относятся ядра с числом протонов или нейтронов, равных 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126 и 184. А если происходит одновременное заполнение нейтронных и протонных оболочек, то такие ядра будут наиболее устойчивыми (дважды магические ядра) — это ядра гелия  ${}^4_2\text{He}$ , кислорода  ${}^{16}_8\text{O}$ , кальция  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  и  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ , свинца  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

Такая модель также объясняет магнитные моменты ядер и их спины в основном и возбужденном состояниях.

В настоящее время разрабатывается обобщенная модель ядра, которая учитывает особенности как капельной, так и оболочечной моделей ядра.

#### 11.2.4. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Под ядерной реакцией понимают процесс взаимодействия ядер или ядра и элементарной частицы, приводящий к их взаимному превращению. Общая схема ядерной реакции выглядит таким образом:



или в краткой форме



где  $X, Y$  — исходное и образующееся в результате реакции ядро;  $a, b$  — известные частицы, которые часто встречаются в различных ядерных реакциях: электрон ( $e^-$ ), позитрон ( $e^+$ ), протон ( $p$ ), нейтрон ( $n$ ),  $\alpha$ -частица ( ${}^4_2\text{He}$ ) и т. д.

При протекании ядерной реакции выполняются следующие законы сохранения:

- 1) энергии  $W$  ( $W_1 + W_2 = W_3 + W_4$ );
- 2) импульса  $\vec{p}$  ( $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$ );
- 3) момента импульса  $\vec{L}$  ( $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_3 + \vec{L}_4$ );
- 4) электрического заряда  $Z$  ( $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$ );
- 5) массового числа  $A$  (числа нуклонов,  $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ ) — это следствие закона сохранения барионного заряда (см. п. 11.1.7).

Можно также отметить выполнение законов сохранения, введенных для описания взаимодействий между элементарными частицами (см. п. 11.1.7). Речь идет о законах сохранения лептонного заряда, изоспина (только в сильном взаимодействии), четности (за исключением реакций, происходящих с участием слабого взаимодействия, это  $\beta$ -распады) и т. д.

Вводится понятие **энергии ядерной реакции**  $W_p$ , которая выделяется или поглощается при протекании ядерной реакции. По определению она равна разности энергий покоя исходных ядер (частиц) и ядер (частиц), образующихся в результате ядерной реакции:

$$W_p = (W_{01} + W_{02}) - (W_{03} + W_{04}) = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} ((m_{01} + m_{02}) - (m_{03} + m_{04})). \quad (11.25)$$

Учитывая закон сохранения энергии и разделение полной энергии на энергию покоя и кинетическую энергию ( $W = W_0 + W_K$ ), можно записать следующую формулу:

$$W_p = (W_{K3} + W_{K4}) - (W_{K1} + W_{K2}). \quad (11.26)$$

Согласно выражению (11.26) энергия при ядерной реакции выделяется ( $W_p > 0$ ) в виде кинетической энергии продуктов реакции. Если же  $W_p < 0$ , то энергия при протекании ядерной реакции поглощается.

### 11.2.5. ЯВЛЕНИЕ РАДИОАКТИВНОСТИ

Явление радиоактивности (р-а) заключается в самопроизвольном распаде ядер с испусканием элементарных частиц. Выделяют бета ( $\beta$ )- и альфа ( $\alpha$ )-распады, они сопровождаются испусканием гамма ( $\gamma$ )-лучей. Атомное ядро, испытывающее р-а распад, называют **материнским**, а образующееся при этом ядро — **дочерним**.

Различают **естественную** и **искусственную радиоактивности**, первая соответствует распадам ядер радиоактивных веществ, существующих в природе, а второй вид наблюдается для радиоактивных ядер, полученных искусственным способом за счет бомбардировки исходного ядра различными частицами.

Для того чтобы определить параметры ядра, получаемого при р-а распаде, применяют правила смещения, они позволяют правильно установить изменение таких параметров ядра, как его заряд и массовое число. Эти правила были введены задолго до открытий частиц нейтрино и антинейтрино. Однако в связи с тем, что массовое число и электрический заряд нейтрино и антинейтрино равны нулю, их присутствие в реакциях распада не сказывается на правилах смещения (см. п. 11.1.4).

Выделяют **три вида  $\beta$ -распада** — это  $\beta^-$ -распад (из ядра вылетает электрон  $e^-$ ),  $\beta^+$ -распад (из ядра вылетает позитрон  $e^+$ ) и **электронный захват (е-захват)**, ядро захватывает один электрон с  $K$ -слоя,  $L$ -слоя,  $M$ -слоя и т. д.). При  $\alpha$ -распаде из ядра вылетает  $\alpha$ -частица, представляющая собой ядро атома гелия.

Для этих видов распада правила смещения записываются следующим образом:

$$\beta^{-}\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}e; \quad (11.27 \text{ а})$$

$$\beta^{+}\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_{+1}e; \quad (11.27 \text{ б})$$

$$e\text{-захват: } {}^A_ZX + {}^0_{-1}e \rightarrow {}^A_{Z-1}Y; \quad (11.27 \text{ в})$$

$$\alpha\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\text{He}. \quad (11.27 \text{ г})$$

Из этих правил следует, что все радиоактивные ядра объединяются в  $r$ -а семейства, число которых равно четырем — это семейства (или ряды) тория  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  ( $n \leq 58$ ), нептуния  ${}^{237}_{93}\text{Np}$  ( $n \leq 59$ ), урана  ${}^{238}_{92}\text{U}$  ( $n \leq 59$ ) и актиния  ${}^{235}_{89}\text{Ac}$  ( $n \leq 58$ ). Для них массовое число определяется следующим образом:

$$A_1 = 4n, \quad A_2 = 4n + 1, \quad A_3 = 4n + 2, \quad A_4 = 4n + 3, \quad (11.28)$$

где  $n$  принимает целочисленные значения.

Ряд нептуния состоит из изотопов, которые не встречаются в природе, они получены искусственным путем. Это приводит к тому, что ряд нептуния заканчивается изотопом висмута, в отличие от других рядов — они заканчиваются стабильными изотопами свинца.

Каждый член ряда получается из предыдущего путем  $\alpha$ - или  $\beta$ -распадов. Поэтому у соседних членов ряда массовые числа или одинаковы (они являются изобарами), или отличаются на четыре.

#### 11.2.5.1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА. АКТИВНОСТЬ РАДИОАКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА

**Основной закон радиоактивного распада.** Для любого радиоактивного вещества нельзя предсказать момент времени распада того или иного ядра, известна лишь вероятность его распада. При этом на распад ядра не влияет тип вещества, его нагрев, сжатие — ядро распадается само по себе, независимо от других ядер. Все это свидетельствует о том, что все процессы  $r$ -а распада подчиняются общим законам, согласно которым вероятность распада одного ядра в единицу времени является для данного типа ядра постоянной величиной. Ее принято называть **постоянной распада**  $\lambda$ , она дает вероятность распада одного ядра за единицу времени. Если обозначить число ядер, не распавшихся в радиоактивном веществе к моменту времени  $t$ , через  $N$ , а число распавшихся за время  $(t, t + dt)$  ядер через  $dN$  ( $dN < 0$ ), то для вероятности распада ядра за единицу времени можно записать

$$dN/(Ndt) = -\lambda,$$

откуда следует **основной закон радиоактивного распада**:

$$dN/N = -\lambda dt \Rightarrow d(\ln N) = -\lambda dt \Rightarrow \int_{N_0}^N d(\ln N) = - \int_0^t \lambda dt \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (11.29)$$

где  $N_0$  — начальное число радиоактивных ядер в веществе.

**Период полураспада  $T$ . Среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра.** Для количественного описания явления р-а вводят понятия периода  $T$  полураспада и среднего времени  $\tau$  жизни ядра. **Период полураспада  $T$  — это время, за которое распадается половина первоначального количества ядер:**  $t = T \Rightarrow N = N_0/2$ . Он связан с постоянной распада  $\lambda$  формулой

$$\lambda = \ln 2/T. \quad (11.30)$$

Получим формулу для среднего времени  $\tau$  жизни ядра. За время  $(t, t + dt)$  распадается  $dN$  ядер, их время жизни можно считать одинаковым и равным  $t$ , это связано с малостью интервала  $dt$ . Суммарное время жизни этих ядер будет равно  $(-tdN)$ . Суммируя время жизни ядер по всем интервалам  $dt$  от нуля до бесконечности и деля эту сумму на первоначальное количество частиц  $N_0$ , получим:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} (-tdN) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} (\lambda t) N dt = \int_0^{\infty} (\lambda t) e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda, \\ \tau = 1/\lambda = T/\ln 2. \quad (11.31)$$

**Активность радиоактивного вещества.** Для описания интенсивности протекания процессов распада в радиоактивном веществе вводят понятие активности радиоактивного вещества. **Активность р-а вещества определяет число распадов в р-а веществе за единицу времени:**

$$A = -dN/dt = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (11.32)$$

где начальная активность  $A_0$  р-а вещества

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0. \quad (11.33)$$

Единицей измерения активности в СИ является беккерель (Бк). При активности р-а вещества в 1 Бк в веществе происходит один распад за одну секунду (1 Бк = 1 распад/с). Применяется и более крупная единица, кюри, она составляет 1 Ки =  $3,7 \cdot 10^{10}$  распад/с.

#### 11.2.5.2. БЕТА-РАСПАД ЯДЕР

Как известно, электроны и позитроны не входят в состав ядра, поэтому они образуются в момент вылета из ядра при распаде нуклонов за счет слабого взаимодействия (см. 11.10 а, б). Следовательно,  **$\beta$ -распад — это внутринуклонный процесс.** При этом протекают следующие реакции:

$$\beta^- \text{- распад: } n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e; \quad (11.34 \text{ а})$$

$$\beta^+ \text{- распад: } p \rightarrow n + e^+ + \nu_e; \quad (11.34 \text{ б})$$

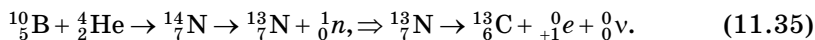
$$e\text{-захват: } p + e^- \rightarrow n + \bar{\nu}_e. \quad (11.34 \text{ в})$$

Реакция (11.34 а) протекает с выделением энергии, поэтому она может протекать и для нейтрона, находящегося в свободном состоянии. Реакция (11.34 б) происходит с поглощением энергии и поэтому протекает только внутри ядра, где протон может получить необходимую энергию от других нуклонов.



Периоды полураспада  $\beta$ -активных ядер варьируются от  $10^{-2}$  с до  $10^{18}$  лет.

Отметим, что *реакция  $\beta^+$ -распада, в отличие от  $\beta$ -распада, протекает только для радиоактивных элементов, полученных искусственным путем.* Приведем пример создания искусственно-радиоактивного ядра с последующим его  $\beta^+$ -распадом. При бомбардировке  $\alpha$ -частицами ядер бора получается искусственно-радиоактивное ядро азота  ${}^{13}_7\text{N}$ , оно затем претерпевает  $\beta^+$ -распад:



**Электронный захват сопровождается характеристическим рентгеновским излучением**, вызванным переходами электронов на освободившееся место либо в  $K$ -слое, либо в  $L$ -слое и т. д.

Нужно отметить, что исторически нейтрино (антинейтрино) были открыты в реакциях  $\beta^-$ -распада ядер. На существование этих частиц указывали сплошной спектр энергий вылетающих из атома электронов, а также нарушение законов сохранения импульса и момента импульса в этих реакциях.

Так, энергетический спектр электронов (он дает распределение числа электронов  $dN$  по кинетическим энергиям  $W_K$ ) оказался сплошным, кинетическая энергия вылетающих электронов изменялась непрерывно от нуля до максимального значения  $W_{K \text{ макс}}$  (рис. 11.7). Указанный факт можно было объяснить тем, что при такой реакции образуется еще одна частица (антинейтрино), которая и забирает у электрона часть освобождающейся при реакции энергии (такое предположение сделал Паули, а название частице было дано Ферми). Причем распределение энергии между этими частицами будет различным для отдельных актов распада. Для случая  $W_K = W_{K \text{ макс}}$  электрон забирает практически всю энергию. Отметим, что для разных ядер  $W_{K \text{ макс}}$  изменяется в пределах  $(0,018 \div 15,5)$  МэВ.

Как уже было отмечено в п. 11.1.7 (формула (11.10)), отсутствие нейтрино (антинейтрино) в реакциях (11.34 а, б) приводит к невыполнению закона сохранения лептонного заряда.

$\beta$ -частицы распространяются в среде со скоростью порядка  $(1-2,89) 10^8$  м/с, что составляет 0,29–0,99 скорости света. При прохождении  $\beta$ -излучения через вещество большая часть энергии тратится на ионизацию и возбуждение атомов и молекул среды. Присутствуют также и радиационные потери (при столкновениях изменяется скорость частицы и происходит излучение фотонов). Интенсивность пучка электронов за счет этих процессов плавно убывает до нуля.

Пробег  $\beta$ -частиц в средах различен и зависит от энергии частиц и плотности среды.  $\beta$ -частицы с энергией меньше 0,1 МэВ проходят в воздухе путь, равный 10 см, в биологических тканях 0,16 мм, а  $\beta$ -частицы с энергией больше 1 МэВ соответственно 11 и 17,5 мм.

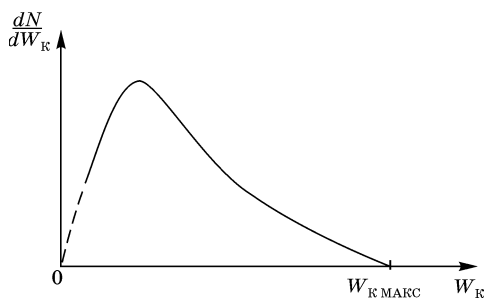


Рис. 11.7

Альфа-распад наблюдается для ядер, содержащих большое число нуклонов ( $A > 200, Z > 82$ ) — число таких ядер превышает 200, имеется также около 20  $\alpha$ -радиоактивных ядер среди лантанидов. Среднее время жизни  $\alpha$ -ядер колеблется в широких пределах от  $3 \cdot 10^{-27}$  с ( $^{212}\text{Po}$ ) до  $(2 \div 5) \cdot 10^{15}$  лет ( $^{142}\text{Ce}, ^{144}\text{Nd}$ ).

Энергия  $\alpha$ -частиц, испускаемых тяжелыми ядрами, составляет порядка  $(4 \div 9)$  МэВ, а ядрами лантанидов —  $(2 \div 4,5)$  МэВ.

Широкие пределы изменения среднего времени  $\tau$  жизни (периода полураспада  $T$ )  $\alpha$ -ядер при сравнительно малых изменениях энергии  $W_\alpha$  вылетающих  $\alpha$ -частиц находят свое отражение в экспериментально установленной формуле (Гейгер и Неттолла, 1911):

$$\ln T = b / \sqrt{W_\alpha} + c, \quad (11.36)$$

из нее, в частности, следует, что

$$T = \exp(b / \sqrt{W_\alpha} + c). \quad (11.37)$$

В формуле (11.36) постоянные величины  $b, c$  определяются опытным путем. Из выражения (11.37) видно, что малые изменения энергии  $\alpha$ -частицы (показателя экспоненты) приводят к существенному изменению периода полураспада  $T$ , то есть самой экспоненты.

Теоретическое объяснение  $\alpha$ -распад получил на основе туннельного эффекта.  $\alpha$ -частица, которая образуется в момент вылета из ядра, встречает на границе ядра высокий потенциальный барьер, который она преодолевает за счет туннельного эффекта (см. п. 9.8, пример 2). Для вероятности выхода  $\alpha$ -частицы из ядра, то есть для коэффициента прозрачности  $D$ , в п. 9.8 была записана следующая формула:

$$D = \exp(-\text{const} / \sqrt{W_\alpha}). \quad (11.38)$$

Из формулы (11.38) можно получить формулу Гейгера–Неттолла (11.36), если учесть, что коэффициент прозрачности  $D$  прямо пропорционален постоянной распада  $\lambda$ .

Отметим, что для  $\alpha$ -ядер одного семейства, испытывающих  $\alpha$ -распад, энергия вылетающих  $\alpha$ -частиц изменяется незначительно относительно определенного значения  $W_0$ :  $W_\alpha = W_0 + \Delta W_\alpha$ ,  $\Delta W_\alpha \ll W_0$ . В соответствии с формулой (11.36) малые изменения энергии  $\alpha$ -частиц должны привести к существенным изменениям периодов  $T$  полураспада (на несколько порядков), что также подтверждается экспериментом.

Энергия, выделяемая при  $\alpha$ -распаде (11.27 г), делится между  $\alpha$ -частицей и дочерним ядром обратно пропорционально их массам. Если дочернее ядро образуется в возбужденном состоянии, то кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы уменьшается на энергию возбуждения и, напротив, возрастает, если распадается возбужденное ядро.

Дискретность энергетических уровней энергии ядра приводит к тому, что возникает несколько групп  $\alpha$ -частиц, имеющих одну и ту же кинетиче-

скую энергию. Следовательно, тонкая структура спектров  $\alpha$ -частиц позволяет определить энергию возбужденных состояний ядер.

Проходя через вещество,  $\alpha$ -частицы вызывают ионизацию и возбуждение атомов и молекул, а также диссоциацию молекул. Потери энергии  $\alpha$ -частиц на образование ядер отдачи и тормозное излучение будут незначительными.

Большая начальная скорость  $\alpha$ -частиц ( $v \approx 10^7$  м/с) приводит к тому, что до остановки они успевают образовать на своем пути примерно  $10^5$  пар ионов.

Траектория движения  $\alpha$ -частиц представляет собой отрезок прямой, причем интенсивность пучка  $\alpha$ -частиц остается постоянной, если пройденный ими путь меньше длины пробега  $R$  (это расстояние, проходимое в веществе частицей до ее полной остановки, то есть до момента времени, когда она приходит в тепловое равновесие с окружающей средой). В воздухе длина пробега  $\alpha$ -частиц составляет несколько сантиметров, для плотных веществ — порядка 0,01 мм.

#### 11.2.5.4. ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ ЯДЕР

Гамма-излучение не представляет собой самостоятельный вид радиоактивного распада. Оно сопровождает  $\alpha$ - и  $\beta$ -распады, а также любые взаимные превращения ядер, при которых происходит переход ядра из возбужденных состояний в основное.

Оказывается, что уровни энергии ядра, так же как и уровни энергии атома, квантуются, то есть принимают дискретный набор значений, но расстояние между ядерными уровнями энергии в  $10^4$  раз превышает расстояния между электронными уровнями энергии.

При  $\alpha$ -распаде ядер обычно наблюдаются  $\gamma$ -кванты с длиной волны  $\lambda \approx (0,1 \div 0,00025)$  нм, а при ядерных реакциях встречаются  $\gamma$ -кванты с длинами волн, достигающими  $\lambda \approx 0,00006$  нм.  $\gamma$ -излучение ядер имеет линейчатый спектр, связанный с дискретными уровнями энергии возбужденных ядер.

Установлено, что  **$\gamma$ -излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром** при его переходе из возбужденного состояния в основное состояние.

Возможен также переход ядра из возбужденного состояния в основное, при котором энергия передается непосредственно электрону атома, без излучения  $\gamma$ -кванта. При этом электрон покидает атом. Это явление называется **внутренней конверсией**, а выбиваемый электрон — **конверсионным**. Внутренняя конверсия сопровождается характеристическим рентгеновским излучением за счет перехода электронов атома на образовавшееся вакантное место во внутренней оболочке атома.

$\gamma$ -кванты не имеют электрического заряда, поэтому на них не действуют кулоновские силы. Масса покоя  $\gamma$ -квантов равна нулю, поэтому они могут двигаться только со скоростью света  $c$ , то есть не могут замедляться в веществе, как  $\alpha$ -частицы и электроны.

Для зависимости интенсивности пучка  $\gamma$ -излучения от расстояния, пройденного в веществе, можно также записать формулу (7.42), которая применяется при рассмотрении рассеяния света веществом.

Параллельный пучок  $\gamma$ -квантов при прохождении через вещество рассеивается за счет таких процессов, как фотоэффект, эффект Комптона и образование электронно-позитронной пары.

При фотоэффекте электрон в атоме поглощает фотон и использует его энергию для вылета из атома; этот процесс рассеяния преобладает для энергий  $\gamma$ -квантов  $W_\gamma \leq 0,01$  МэВ и сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

При эффекте Комптона рассеяние  $\gamma$ -кванта происходит за счет его неупругого столкновения с атомом, со свободным электроном; этот процесс преобладает для энергий  $\gamma$ -квантов, принимающих значения, равные  $W_\gamma \approx 0,5$  МэВ.

Для образования электронно-позитронной пары ( $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ ) требуется энергия  $\gamma$ -кванта, равная  $W_\gamma = 1,02$  МэВ, — это минимальная энергия, необходимая для образования электронно-позитронной пары. Поэтому данный процесс наблюдается при энергиях  $W_\gamma \geq 1,02$  МэВ и является при таких энергиях практически единственным процессом поглощения  $\gamma$ -излучения в веществе.

#### 11.2.5.5. ВЛИЯНИЕ РАДИОАКТИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЧЕЛОВЕКА

Любые радиоактивные излучения оказывают вредное влияние на живую ткань, на человека. Они вызывают гибель клеток, выбивают из сложных биологических молекул атомы, приводят к ионизации атомов, к смещению их в молекуле. Все это приводит к возникновению несвойственных организму, живой ткани процессов и в итоге к возникновению различных опухолей и раковых заболеваний.

Для количественной характеристики воздействия  $\alpha$ -излучения на вещество вводится понятие **поглощенной дозы** ( $D$ ), она определяет энергию излучения, которая поглощается единицей массы вещества. Единицей поглощенной дозы является **грей** (1 Гр). Один грей — это такая доза облучения, при которой 1 кг вещества поглощает энергию излучения в 1 Дж. Широко распространена **внесистемная единица рад**: 1 рад = 0,01 Гр.

Для того чтобы оценить биологическое воздействие различных видов  $\alpha$ -излучения на живую ткань, на организм человека, вводят понятие **коэффициент качества излучения** ( $K$ ), который показывает, во сколько раз биологический эффект от данного вида излучения превышает биологический эффект от электромагнитного излучения при одной и той же поглощенной дозе.

Приведем значения  $K$  для разных видов  $\alpha$ -излучений.

1.  $\gamma$ -излучение,  $K = 1$  — обладает большой проникающей способностью, пронизывает тело человека насквозь.

2.  $\beta$ -излучение,  $K = 1$  — обладает меньшей проникающей способностью, проникает в тело человека на глубину порядка 2 см.

$\beta$ - и  $\gamma$ -излучения дают наибольший вклад во внешнее облучение человека, они вызывают ионизацию и возбуждение атомов тканей человека.

3.  $\alpha$ -излучение,  $K = 20$ , проникающая способность равна нулю, оно задерживается одеждой и кожей человека.  $\alpha$ -излучение может попасть внутрь человека вместе с пищей или через слизистые оболочки носа или глаз, либо через легкие. Это излучение дает наибольший вклад во внутреннее облуче-

ние человека. Обладая большой массой и скоростью,  $\alpha$ -частицы при своем торможении в биологической ткани приводят к ионизации и возбуждению большого количества атомов ( $\sim 10^5$  пар ионов), к выбиванию атомов из биологически сложных молекул. Это обуславливает ряд особенностей тех химических реакций, которые протекают в веществе, в частности в живой ткани (образование сильных окислителей, свободного водорода и кислорода и др.). Радиохимические реакции, протекающие в биологических тканях под воздействием  $\alpha$ -лучей, в свою очередь, вызывают особую, большую, чем у других видов ионизирующих излучений, биологическую эффективность.

4. Поток нейтронов с энергией  $W < 10$  кэВ,  $K = 3$ , а для потока нейтронов с энергией  $W > 0,5$  МэВ —  $K = 10$ .

Для описания биологического воздействия  $\gamma$ -излучения на человека, на живую ткань вводится понятие **эквивалентной дозы  $H$** , она равна произведению поглощенной дозы на коэффициент качества излучения ( $H = D \cdot K$ ) и измеряется в зивертах:  $1 \text{ Зв} = 1 \text{ Гр}$  при  $K = 1$ . Один зиверт является достаточно большой величиной, поэтому используют меньшие единицы измерения, такие как **бэр**;  $1 \text{ Бэр} = 0,01 \text{ Зв}$ .

Получение одновременно дозы излучения в 50 Бэр приводит к лучевой болезни человека. Получение за один год суммарной дозы облучения в 150 Бэр также приводит к лучевой болезни.

Вводится понятие **предельной допустимой дозы (ПДД)** — это такая доза, которая в течение всей жизни человека (около 70 лет) не вызывает генетических и соматических (телесных) изменений. Установлено, что при ПДД, равной 0,5 Бэр в год, у человека в 70 лет может возникнуть рак. Поэтому считается, что ПДД составляет около 0,5 Бэр/год.

ПДД включает в себя, в основном, три основных вклада:

Природный фон содержит естественные источники ионизирующих излучений, такие как космические лучи, естественная радиоактивность почвы, воды и воздуха. Она составляет на территории России примерно 0,04–0,2 Бэр в год.

Проживание в современных зданиях — за счет наличия  $\gamma$ -ядер в изменяемых стройматериалах может составить примерно одну треть ПДД (0,14 Бэр в год).

Медицинские обследования также дают определенный вклад в ПДД (примерно 0,14 Бэр/год). Для уменьшения этого вклада в ПДД во многих современных медицинских приборах используют  $\gamma$ -излучения малой интенсивности.

## 11.2.6. ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА

### 11.2.6.1. ЦЕПНЫЕ РЕАКЦИИ ДЕЛЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

Самым удобным видом энергии является электроэнергия, ее можно легко транспортировать, накапливать и преобразовывать в другие виды энергии. В больших количествах она вырабатывается на электростанциях.

Общая схема выработки электроэнергии на любой электростанции заключается в наведении ЭДС индукции в равномерно вращающейся в магнитном

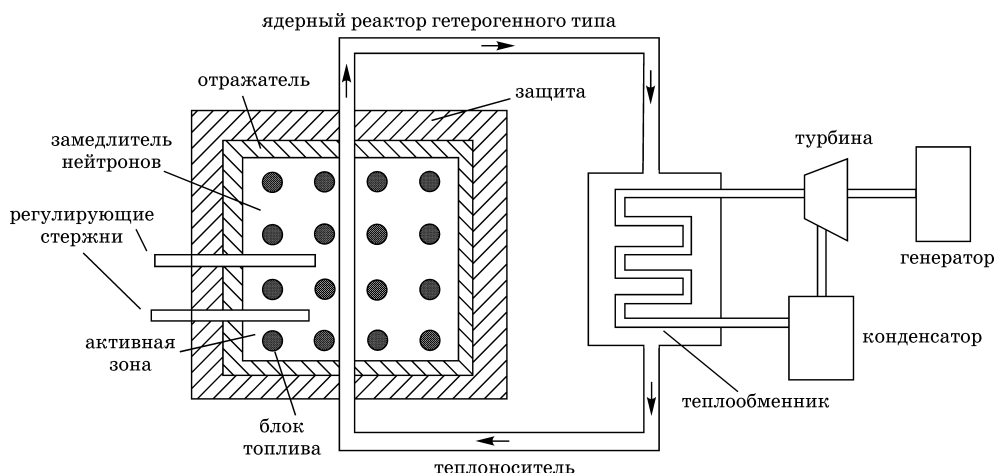


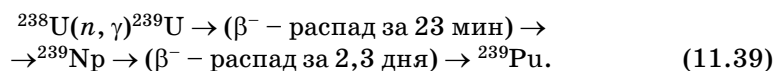
Рис. 11.8

поле проволочной рамке (на рис. 11.8 — генератор). Вращение рамки создается турбиной, на которую подается либо энергия падающей воды (гидроэлектростанция), либо энергия водяного пара, полученного сжиганием обычного топлива (газ, нефть, каменный уголь, тепловая станция) или ядерного топлива (атомная электростанция).

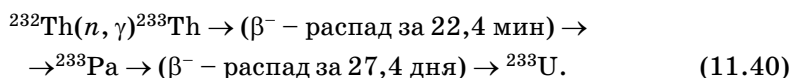
В настоящее время выработка электроэнергии на атомных станциях является наиболее перспективным направлением развития электроэнергетики. Это связано с тем, что, во-первых, при сгорании ядерного топлива не происходит в большом количестве выбросов в атмосферу вредных веществ, и, во-вторых, для получения одного и того же количества электроэнергии необходимо значительно меньше ядерного топлива (в кг), чем при использовании традиционных видов топлива, запасы которых к тому же быстро истощаются. Альтернативная энергетика типа солнечных батарей, приливных станций и ветроэнергетики дает малый вклад в суммарную потребность в энергии общества.

Рассмотрим основные схемы использования ядерного топлива и перспективы развития ядерной энергетики.

Под ядерным топливом понимают вещество, которое используется в ядерных реакторах для осуществления ядерной цепной реакции деления. Существует только одно природное ядерное топливо — это урановая руда. Она содержит делящиеся ядра  $^{235}\text{U}$ , они обеспечивают протекание цепной реакции (ядерное горючее) и так называемые сырьевые ядра  $^{238}\text{U}$ . Ядра  $^{238}\text{U}$  способны захватывать нейтроны и превращаться в новые делящиеся ядра  $^{239}\text{Pu}$ , которые представляют собой не существующее в природе вторичное горючее:



Вторичным горючим является также не встречающиеся в природе ядра  $^{233}\text{U}$ , образующиеся в результате захвата нейтронов сырьевыми ядрами  $^{232}\text{Th}$ :



Ядерное топливо размещается в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛх) ядерного реактора.

Ядерный реактор — это устройство, в котором осуществляется управляемая ядерная цепная реакция, сопровождающаяся выделением энергии. Основными частями любого ядерного реактора являются: активная зона, где находится ядерное топливо, протекает цепная реакция ядерного деления и выделяется энергия; отражатель нейтронов, окружающий активную зону; теплоноситель для отвода тепла из активной зоны; система регулирования цепной реакции, включающая в себя стержни, поглощающие нейтроны; радиационная защита (рис. 11.8).

**Цепная реакция деления тяжелых ядер** — это ядерная реакция, самопроизвольно поддерживаемая в веществе за счет вовлечения в нее все нового и нового числа делящихся ядер. Среди изотопов урана ее можно осуществить для ядра  ${}^{235}\text{U}$ . Под действием нейтрона, попадающего в ядро, оно возбуждается и делится на два радиоактивных осколка (ядра) разной массы, которые разлетаются с большими скоростями, и на два-три нейтрона (рис. 11.9).

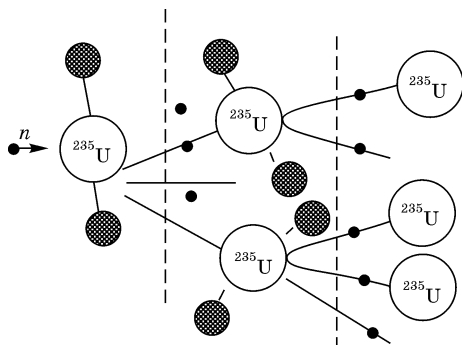
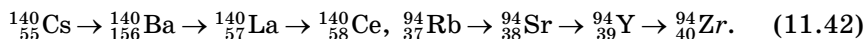
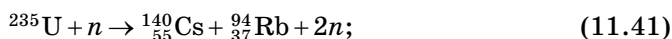


Рис. 11.9

Нейтроны, вылетающие в процессе деления из ядра, могут, в свою очередь, вызвать реакцию деления соседних ядер  ${}^{235}\text{U}$ , которые также испускают нейтроны, способные вызвать дальнейшее деление ядер. В итоге число делящихся ядер возрастает, возникает цепная реакция.

Исследования показали, что деление может происходить разными путями, наиболее вероятным является деление на осколки, массы которых относятся как 2:3. Запишем одну из возможных реакций деления  ${}^{235}\text{U}$ :



Получаемые при делении урана осколки являются радиоактивными, и после ряда превращений из них получают стабильные изотопы церия и циркония (11.42). Энергетический выход при делении ядра урана составляет примерно 1 МэВ на нуклон, причем основную часть энергии уносят осколки.

Основная характеристика ядерного реактора — его мощность. Мощность в 1 МВт соответствует цепной реакции, в которой происходит  $3 \cdot 10^{16}$  актов деления в 1 с.

Состояние реактора характеризуется коэффициентом размножения нейтронов, он дает быстроту роста числа нейтронов, вызывающих деление ядер,

и равен отношению числа нейтронов, вызвавших деление в данном поколении, к числу аналогичных нейтронов предыдущего поколения. Для цепной реакции, изображенной на рис. 11.9, коэффициент размножения нейтронов равен  $K = 3/2 = 1,5$ . Если эффективный коэффициент размножения нейтронов  $K_{эф}$  в активной зоне больше единицы ( $K_{эф} > 1$ ), то цепная реакция нарастает во времени; если  $K_{эф} < 1$ , то реакция затухает, а при  $K_{эф} = 1$  идет стационарный процесс, число делений постоянно во времени. В качестве делящегося вещества в ядерном реакторе применяют  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{233}\text{U}$ . Если активная зона, кроме ядерного топлива, содержит замедлитель нейтронов (графит, вода и другие вещества, содержащие легкие ядра), то основная часть делений происходит под действием тепловых нейтронов.

В ядерных реакторах на тепловых нейтронах используют природный уран, в котором берется повышенное содержание ядер  $^{235}\text{U}$  ((2–4)%  $^{235}\text{U}$  вместо 0,71%  $^{235}\text{U}$  в природном уране). Малое содержание ядер  $^{235}\text{U}$  можно компенсировать замедлением нейтронов до тепловых скоростей (при этом кинетическая энергия нейтрона составляет порядка 0,03 эВ). Это увеличивает в сотни раз вероятность захвата тепловых нейтронов ядрами  $^{235}\text{U}$  с последующим их делением, что и позволяет осуществить цепную реакцию деления ядер  $^{235}\text{U}$ .

Регулирование цепной реакции в ядерном реакторе на тепловых нейтронах осуществляется обычно введением в активную зону (или выведением из нее) стержней из веществ, сильно поглощающих нейтроны (бор, кадмий и др., рис. 11.8). Если стержни введены глубоко, поглощение нейтронов в них велико и цепная реакция невозможна.

Для ядерных реакторов, у которых в активной зоне отсутствует замедлитель, основная часть делений вызывается быстрыми нейтронами с энергией  $W_n > 30$  КэВ (быстрый реактор). Возможны реакторы и на промежуточных нейтронах с энергией (1–100) эВ.

По конструкции ядерные реакторы делятся на гетерогенные и гомогенные. В гетерогенных реакторах ядерное топливо распределено в активной зоне дискретно в виде блоков, между которыми находится замедлитель нейтронов (см. рис. 11.8). В гомогенных реакторах ядерное топливо и замедлитель представляют собой однородную смесь (раствор или суспензия). Наиболее распространенными являются гетерогенные ядерные реакторы, в них блоки с ядерным топливом располагаются в активной зоне в виде стержней (ТВЭЛов), образующих правильную решетку (см. рис. 11.8).

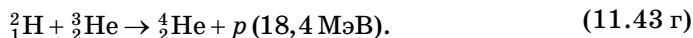
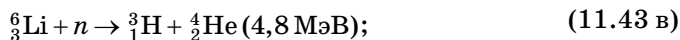
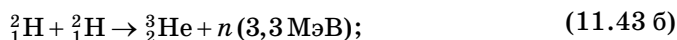
В реакторах на быстрых нейтронах, помимо выработки электроэнергии, происходит образование вторичного горючего, которое может быть использовано для производства электроэнергии. Тепловая мощность современных энергетических ядерных реакторов достигает 3–5 ГВт.

#### 11.2.6.2. ТЕРМОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Существует еще одно перспективное направление в ядерной энергетике — это управляемый термоядерный синтез (УТС). Под ним понимают процесс слияния легких атомных ядер, проходящий с выделением энергии, при высоких температурах в регулируемых управляемых условиях.



Среди реакций синтеза легких ядер для УТС представляют интерес следующие термоядерные реакции:



В скобках указана энергия, которая выделяется при протекании реакции.

Реакции синтеза легких ядер называют термоядерными, так как протекание таких реакций требует больших температур (порядка  $T \approx 10^9 \text{ K}$ ), при которых смесь веществ превращается в плазму (ионизированный газ).

Действительно, для того чтобы началась ядерная реакция, требуется сблизить ядра до расстояний, на которых вступают в игру ядерные силы (порядка  $10^{-15} \text{ м}$ ). С этой целью необходимо преодолеть кулоновское отталкивание ядер, что можно сделать, сообщая ядрам большую начальную скорость их сближения, то есть нагревая плазму до высокой температуры.

Разогрев плазмы до высоких температур является первым препятствием на пути осуществления термоядерного синтеза. Для нагрева плазмы выше температуры  $T \approx 10^8 \text{ K}$  применяют высокочастотный нагрев или ввод энергии в плазму с помощью потока быстрых нейтральных частиц.

Вторым препятствием для осуществления УТС является необходимость удержания плазмы длительное время вне контакта со стенками рабочей камеры, так как любой контакт приводит к резкому снижению температуры плазмы и прекращению термоядерных реакций.

Было установлено, что для возникновения термоядерной реакции необходимо, чтобы произведение плотности  $n$  высокотемпературной плазмы на время  $\tau$  удержания этой плотности превышало  $n\tau \geq 0,5 \cdot 10^{20} \text{ с/м}^3$  для реакции (11.35 а), протекающей при температуре  $T \approx 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ , и  $n\tau \geq 10^{21} \text{ с/м}^3$  для реакции (11.35 б), проходящей при температуре  $T \approx 10^9 \text{ K}$ . Это условие получило название **критерия Лоусона**.

Из этого критерия следует, что время удержания плазмы должно составлять порядка нескольких секунд. Трудность задачи состоит в том, что плазма является крайне неустойчивой из-за дальнедействующих между заряженными частицами кулоновских сил, в ней при любом слабом возмущении возникают коллективные движения и плазма выбрасывается на стенки камеры.

Для решения данной задачи можно использовать магнитную термоизоляцию плазмы. Известно, что заряженные частицы перемещаются вдоль линий магнитного поля, навиваясь на них, и для замкнутых линий магнитного поля возникает возможность удержания плазмы вне контакта со стенками тороидальной камеры.

Существующие в настоящее время установки с магнитным удержанием плазмы еще не достигают параметров, необходимых для проведения УТС. Параметры же строящихся в настоящее время установок должны подойти

к пороговым значениям параметра ( $n\tau$ ), и анализ их работы позволит сделать вывод о типе термоядерного реактора будущего.

Существует еще один тип установок, в котором на таблетку из смеси дейтерия и трития (либо просто из дейтерия) с разных сторон посылают мощное излучение нескольких лазеров, что приводит к быстрому нагреву таблетки до высокой температуры, причем лазерное излучение сжимает образующуюся плазму и способствует протеканию УТС.

Управляемый термоядерный синтез позволит решить энергетические проблемы человечества, поскольку дейтерий, содержащийся в морской воде, представляет собой практически неисчерпаемый источник дешевого горючего для управляемых термоядерных реакций типа (11.43 б); из 60 л воды можно извлечь 1 г дейтерия. Однако высокое энерговыделение и большая скорость реакции слияния ядер дейтерия и трития — реакция типа (11.43 а) — делают равнокомпонентную смесь дейтерия и трития наиболее перспективной для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза. Тритий радиоактивен (период его полураспада 12,5 лет) и в природе на Земле не встречается. Поэтому необходимо предусмотреть при создании установки по УТС его производство, например по реакции (11.43 в).

Представляет также интерес реакция (11.43 г), для протекания которой требуется изотоп гелия  ${}^3_2\text{He}$ . Он в достаточном количестве имеется на Луне.

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

### 12.1.

#### МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

**Молекулярная физика** — это раздел физики, в котором изучаются физические свойства тел в различных агрегатных состояниях на основе рассмотрения их микроскопического (молекулярного) строения. Круг вопросов, охватываемых разделом, очень широк. Молекулярная физика изучает строение веществ и его изменения под влиянием внешних факторов (давления, температуры, электрического и магнитного полей), явления переноса (диффузии, теплопроводности, внутреннего трения), фазовое равновесие и процессы фазовых переходов (кристаллизация и плавление, испарение и конденсация и др.), критическое состояние вещества, поверхностные явления на границе раздела различных фаз.

Интенсивное развитие молекулярной физики привело к выделению из нее самостоятельных разделов (статистическая физика, физическая кинетика, физика твердого тела, физическая химия, молекулярная биология). На основе общих теоретических представлений этого раздела науки получили развитие физика металлов, физика полимеров, физика плазмы, кристаллофизика, физикохимия дисперсных систем и поверхностных явлений, теория массо- и теплопереноса, физико-химическая механика. При всем различии объектов и методов исследования здесь сохраняется особенность молекулярной физики — описание макроскопических свойств на основе микроскопической (молекулярной) картины его строения.

Первым сформировавшимся разделом молекулярной физики была кинетическая теория газов. В процессе ее развития работами Дж. Максвелла (1858–1860), Л. Больцмана (1868) и Дж. Гиббса была создана классическая статистическая физика. В 1902 г. вышла в свет книга Дж. Гиббса «Элементарные принципы статистической механики», которая завершила построение классической статистической физики.

В 1905 г. А. Эйнштейн и М. Смолуховский дали последовательное объяснение броуновского движения на основе молекулярно-кинетической теории, развив теорию флуктуаций. Реальность

существования молекул была доказана в 1908 г. Ж. Перреном. Он осуществил эксперименты по исследованию броуновского движения, окончательно доказавшие реальность существования молекул, подтвердившие атомно-молекулярное строение вещества и кинетическую теорию теплоты. Межмолекулярные взаимодействия были учтены Я. Д. Ван-дер-Ваальсом при объяснении физических свойств реальных газов и жидкостей. Учение о межатомных взаимодействиях на основе представлений квантовой механики получило развитие в работах М. Борна, Ф. Лондона и В. Гайтлера, а также П. Дебая.

Далее рассматриваются основные элементы статистической теории для идеального газа, обсуждаются функции распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла) и по координатам (распределение Л. Больцмана), вывод формул для средних скоростей молекул и макроскопических параметров, описывающих состояние идеального газа.

#### 12.1.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этом разделе рассматриваются системы, состоящие из огромного числа частиц (атомов, молекул), находящихся в тепловом движении. Для описания таких систем вводят следующие понятия.

**Термодинамические (макроскопические) параметры** — это величины, которые описывают состояние системы, не рассматривая ее внутреннее строение. К ним относят такие параметры, как температура, давление, объем и т. д.

**Макросостояние системы** — такое состояние системы, которое определяется заданием ее термодинамических параметров.

**Микропараметры** — координаты и скорости (импульсы) частиц системы.

**Микросостояние системы** — состояние системы, определяемое заданием координат и скоростей (импульсов) всех частиц системы.

**Равновесное состояние системы** — такое состояние, при котором ее микропараметры принимают определенное значение и остаются постоянными сколь угодно долго.

Равновесным является такое состояние изолированной системы, в которое она переходит по истечении достаточно большого промежутка времени (в начальный момент времени состояние системы было неравновесным). Это время называют **временем релаксации**.

**Идеальный газ** — газ, частицы которого на расстоянии не взаимодействуют; а при столкновениях ведут себя как упругие шары; собственный объем частиц значительно меньше объема, занимаемого газом.

Для систем, состоящих из огромного числа частиц, находящихся в тепловом движении, наряду с механической формой движения материи появляется новая **тепловая форма движения**. Это можно подтвердить следующими фактами.

У системы появляются новые свойства (макропараметры, такие как давление, температура, электрическое сопротивление и т. д.), которыми не обладают отдельные частицы.

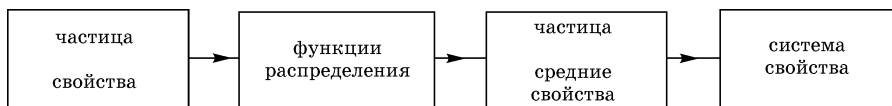


Рис. 12.1

Система забывает свои предыдущие состояния. Например, какое-либо равновесное состояние газа можно получить различными способами, и по конечному состоянию газа нельзя определить, какой из них был реализован. Этим тепловая форма движения материи существенно отличается от механической формы движения (в механике конечное состояние тела однозначно связано с его начальным состоянием).

Состояние отдельной частицы не оказывает влияния на макроскопическое состояние системы. Так, например, давление газа в равновесном состоянии остается постоянным, хотя скорость какой-либо частицы из-за теплового движения постоянно изменяется.

Все это свидетельствует о том, что для описания свойств макросистемы необходимо использовать термодинамический и статистический подходы.

Кратко изложим суть **статистического подхода**, схема реализации которого приведена на рис. 12.1.

Для системы, находящейся в равновесном состоянии, из-за хаотичности теплового движения имеется большой набор случайных значений скоростей и координат частиц. Оказывается, что на огромной совокупности случайных значений скоростей, координат, кинетических энергий, потенциальных энергий отдельных частиц (первый блок на рис. 12.1) появляются строгие статистические закономерности, которые выражаются функциями распределения частиц по их скоростям  $f(v)$ , по координатам  $f(x, y, z)$ , кинетическим  $f(\epsilon_K)$ , потенциальным энергиям  $f(\epsilon_p)$  и т. д. (второй блок на рис. 12.1). Знание этих функций распределения позволяет оценить средние свойства частиц, то есть свойства, усредненные по всей совокупности частиц (третий блок на рис. 12.1). Средние свойства частиц характеризуют всю совокупность частиц в целом. Если, например, говорят, что скорость частиц с повышением температуры возрастает, то под этим подразумевают средние скорости частиц.

Далее знание средних характеристик частиц позволяет получить макроскопические свойства системы (четвертый блок на рис. 12.1).

В **термодинамическом подходе** при описании свойств системы ее внутреннее строение не рассматривается, а все основные выводы о поведении систем делаются на основе трех начал (законов) термодинамики. Эти законы термодинамики являются постулатами (недоказуемыми утверждениями), они обобщают опытные данные. В связи с этим выводы термодинамики являются достоверными и не подвергаются сомнению.

В последующем изложении остановимся подробнее на отдельных этапах применения статистического подхода. Причем сначала будут рассматриваться системы классических частиц, то есть частиц, для которых волновые свойства не сказываются на их движении.

### 12.1.2. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Возьмем случайную величину  $X$ , которая принимает конечный дискретный набор значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, L$ ). Тогда вероятностью  $P(x_K)$  выпадения в отдельном опыте какого-либо значения  $x_K$  этой величины называется предел отношения числа опытов  $N_K$ , при которых выпадает это значение  $x_K$ , к общему числу опытов  $N$ , при стремлении общего числа опытов к бесконечности:

$$P(x_K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_K}{N}. \quad (12.1)$$

При конечном числе опытов отношение  $(N_K/N)$  будет отличаться в ту или иную сторону от значения  $P(x_K)$ , и при возрастании общего числа  $N$  опытов эти отклонения будут становиться все меньше и меньше, приближаясь к  $P(x_K)$ .

Так, например, вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна  $P(\text{«орел»}) = 0,5$ . Это означает, что при бросании монеты в 50% опытов при стремлении их общего числа к бесконечности будет выпадать «орел». При конечном числе опытов величина  $N(\text{«орел»})/N$  будет отличаться от значения 0,5 и тем существеннее, чем меньше общее число опытов  $N$ .

Рассмотрим теперь непрерывно распределенную случайную величину  $X$ , которая принимает непрерывный набор действительных чисел в диапазоне от нуля до бесконечности. В этом случае вероятность выпадения конкретного значения случайной величины будет равна нулю, так как число опытов (набор натуральных чисел) не перекрывает всего набора действительных чисел. Так, например, вероятность выпадения значения  $x = 200,00546$  будет равна нулю  $P(200,00546) = 0$ .

В связи с этим рассматриваются вероятности выпадения случайной величины при отдельном опыте в определенный интервал значений. Для этого вводится функция распределения  $f(x)$ ; она представляет собой плотность вероятности или отношение вероятности  $dP(x)$  выпадения значения случайной величины в отдельном опыте в бесконечно малый интервал значений  $(x, x + dx)$  к величине этого интервала

$$f(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (12.2)$$

С помощью этой функции можно получить вероятность  $P(x_1, x_2)$  выпадения значения случайной величины  $X$  в любой интервал значений  $(x_1, x_2)$

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (12.3 \text{ а})$$

Для малого интервала значений  $(x, x + \Delta x)$ , в пределах которого с достаточной степенью точности в условиях данной конкретной задачи можно считать, что функция распределения  $f(x)$  не изменяется по величине, формула (12.3 а) запишется таким образом:

$$P(\Delta x) = f(x) \Delta x. \quad (12.3 \text{ б})$$

Если взять интервал значений равным области существования случайной величины (например в пределах от нуля до бесконечности), то тогда ве-

роятность выпадения какого-то значения случайной величины будет равна единице ( $P(0, \infty) = 1$ ), так как это будет достоверным событием

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (12.4)$$

Выражение (12.4) получило название **условия нормировки**.

С помощью функции распределения  $f(x)$  можно рассчитать величины, которые характеризуют всю совокупность значений случайной величины  $x$ , такие, например, как среднее арифметическое значение  $\langle x \rangle$ , среднее квадратичное значение  $\langle x_{\text{кв}} \rangle$ :

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x f(x) dx, \quad \langle x_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \left( \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx \right)^{1/2}. \quad (12.5)$$

Рассмотрим конкретные примеры функций распределения.

### 12.1.3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО МОДУЛЮ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ. ГРАФИК ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО МОДУЛЮ СКОРОСТИ ДЛЯ ДВУХ ТЕМПЕРАТУР

**Функция распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул.** Пусть идеальный газ (его молекулы на расстоянии не взаимодействуют) находится в закрытом сосуде в равновесном состоянии при температуре  $T$ . Для того чтобы ввести функцию распределения молекул по модулю скорости, возьмем произвольную молекулу идеального газа и через равные промежутки времени будем измерять модуль ее скорости. Пусть из общего числа  $N$  опытов  $dN_v$  дает число опытов, в которых скорости молекул попадают в интервал скоростей  $(v, v + dv)$ . Тогда вероятность  $dP(v)$  попадания скорости молекулы в малый интервал скоростей  $(v, v + dv)$  при стремлении  $N \rightarrow \infty$

будет равна  $dP(v) = \frac{dN_v}{N}$ . Это позволяет согласно формуле (12.2) ввести функцию распределения молекул по модулю скорости

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv}. \quad (12.6)$$

Случайным в выражении (12.6) является номер выбираемой молекулы, над которой проводятся опыты, а закономерным то, что вероятность  $dP(v)$  попадания значений скоростей молекулы в интервал скоростей  $(v, v + dv)$  остается все время постоянной величиной и не зависит от номера выбираемой молекулы.

Итак, *функция  $f(x)$  является плотностью вероятности и равна отношению вероятности  $dP(v)$  попадания модуля скорости молекулы в интервал скоростей  $(v, v + dv)$  к величине этого интервала  $dv$ .*

Можно предложить другой способ определения, другой физический смысл функции распределения  $f(v)$ . Для этого зафиксируем в какой-то момент времени скорости всех молекул и нанесем их на ось скоростей (см. рис. 12.2).

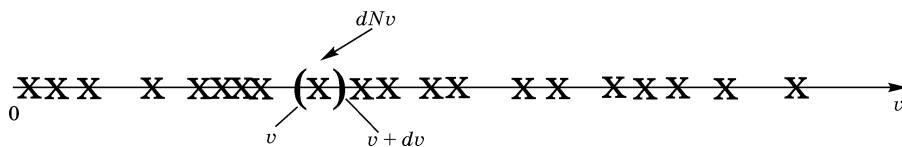


Рис. 12.2

Число молекул  $dN_v$ , попадающих в интервал скоростей  $(v, v + dv)$ , будет зависеть от общего числа молекул  $N$ , от величины интервала скоростей  $dv$  и от скорости  $v$ , вблизи которой берется этот интервал. Эту зависимость от скорости  $v$  можно описать с помощью функции  $f(v)$ . Тогда

$$dN_v = N \cdot f(v)dv \Rightarrow f(v) = \frac{dN_v}{Ndv}. \quad (12.7)$$

Итак, функция  $f(v)$  равна отношению относительного числа молекул  $(dN_v/N)$ , скорости которых попадают в бесконечно малый интервал скоростей  $(v, v + dv)$ , к величине этого интервала  $dv$ .

Входящая в формулы (12.6) и (12.7) функция  $f(v)$  получила название **функции распределения молекул по модулю скорости, или функции распределения Максвелла**. Случайными в формуле (12.7) являются номера молекул, скорости которых попадают в заданный интервал скоростей, а закономерным то, что их число остается постоянным и не зависит от номеров молекул. Формула для этой функции была получена в 1859 г. Максвеллом и она имеет вид:

$$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv} = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (12.8)$$

В формуле (12.8)  $m_0$  обозначает массу одной молекулы, а  $k$  — это постоянная Больцмана.

График функции  $f(v)$  приведен на рис. 12.3а. Из него видно, что при скорости молекулы  $v$ , равной нулю ( $v = 0$ ), функция  $f(v)$  обращается в ноль, затем функция нарастает и при скорости, называемой наиболее вероятной скоростью  $v_B$  молекул, достигает максимального значения, после этого она спадает до нуля при скоростях молекул, стремящихся к бесконечности.

Зная функцию распределения молекул идеального газа по скоростям  $f(v)$ , можно найти относительное число молекул  $\frac{N(v_1, v_2)}{N}$ , скорости которых

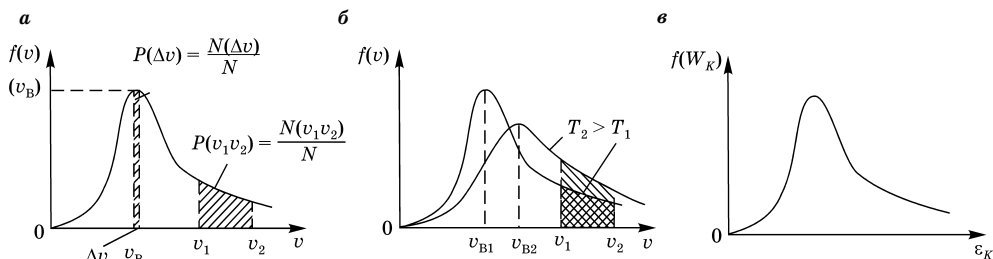


Рис. 12.3



попадают в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ , или вероятность попадания  $P(v_1, v_2)$  скорости одной молекулы в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ :

$$\frac{N(v_1, v_2)}{N} = P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv. \quad (12.9)$$

Графически эта величина  $dN(v_1, v_2)/N$  (или  $dP(v_1, v_2)$ ) представляет собой площадь под графиком функции  $f(x)$  в пределах интервала скоростей от  $v_1$  до  $v_2$  (рис. 12.3а). В случае малого интервала скоростей  $\Delta v$  (в его пределах функция распределения  $f(x)$  остается примерно постоянной величиной) можно с достаточной степенью точности рассчитать относительное число  $(N(\Delta v))$  молекул или вероятность  $P(\Delta v)$  по упрощенной формуле:

$$\frac{N(\Delta v)}{N} = P(\Delta v) = f(v) \Delta v. \quad (12.10)$$

Тогда площадь под графиком функции будет представлять собой площадь прямоугольной полоски (рис. 12.3а).

Можно дать пояснение названию наиболее вероятной скорости молекул  $v_B$  — если выбирать одинаковый интервал скоростей  $\Delta v$  около различных значений скорости  $v$ , то вблизи скорости  $v_B$  в малый интервал скоростей  $\Delta v$  попадет наибольшее число молекул (площадь прямоугольной полоски шириной  $\Delta v$  будет наибольшей).

Площадь под всем графиком функции распределения  $f(v)$  составит

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1, \quad (12.11)$$

это выражение называют **условием нормировки**. Интеграл в формуле (12.11) представляет собой вероятность того, что скорость отдельной молекулы попадает в область всех возможных значений скоростей, а это является достоверным событием, вероятность которого равна единице.

По другой трактовке функции распределения этот интеграл представляет собой относительное число молекул, скорости которых попадают в область всевозможных значений скоростей, что приводит также к единице в формуле (12.11).

**График функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости для двух температур.** Для того чтобы качественно пояснить изменение графика функции распределения  $f(v)$  при повышении температуры идеального газа, необходимо выяснить, как изменяется максимум функции  $f(v)$ . Для этого необходимо взять производную по модулю скорости от функции  $f(v)$  и приравнять ее нулю при значениях скорости  $v = v_B$ . Это позволяет получить следующие формулы:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}; \quad (12.12)$$

$$f(v_B) = \frac{2}{e} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \sim \sqrt{\frac{m_0}{T}}. \quad (12.13)$$

В формулу (12.12) входит универсальная газовая постоянная ( $R = kN_A$ ) и молярная масса ( $M = m_0 N_A$ ) газа.

Как видно из формул (12.12) и (12.13), при повышении температуры максимум функции  $f(v)$  становится меньше и смещается в сторону больших скоростей.

На рис. 12.3б приведены графики функции  $f(v)$  для двух температур —  $T_2 > T_1$ . При построении графиков было также учтено, что площадь под графиком функции согласно формуле (12.11) при повышении температуры не изменяется и остается равной единице. Как следует из этих графиков, *увеличение температуры идеального газа приводит к возрастанию числа молекул с повышенными скоростями*. Так, повышение температуры приводит к возрастанию числа молекул, попадающих в приведенный на рис. 12.3б интервал скоростей ( $v_1, v_2$ ).

#### 12.1.4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО КИНЕТИЧЕСКИМ ЭНЕРГИЯМ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ

Функция распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям  $W_K$  вводится аналогично функции распределения по модулю скорости  $f(v)$ :

$$f(W_K) = \frac{dN_{W_K}}{NdW_K} = \frac{dP(W_K)}{dW_K}, \quad (12.14)$$

где  $dN_{W_K}$  — число молекул, кинетические энергии которых попадают в бесконечно малый интервал ( $W_K, W_K + dW_K$ ), а  $dP(W_K)$  — вероятность того, что кинетическая энергия молекулы в отдельном опыте попадает в бесконечно малый интервал ( $W_K, W_K + dW_K$ ).

Формулу для функции  $f(W_K)$  можно получить из того условия, что число молекул, кинетические энергии которых попадают в интервал кинетических энергий ( $W_K, W_K + dW_K$ ), равно числу молекул, скорости которых попадают в интервал скоростей ( $v, v + dv$ ). Это является следствием формулы для кинетической энергии молекулы  $W_K = m_0 v^2 / 2$ . Итак,

$$dN_{W_K} = dN_v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \cdot f(W_K) dW_K = N \cdot f(v) dv \Rightarrow f(W_K) = f(v) \frac{dv}{dW_K} = f(v) \frac{1}{(dW_K / dv)} = \frac{1}{m_0 v} f(v).$$

Заменяя в полученном выражении скорость  $v$  через кинетическую энергию молекулы ( $v = \sqrt{2W_K / m_0}$ ), для функции распределения молекул по их кинетическим энергиям получим

$$f(W_K) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot (kT)^{3/2}} \sqrt{W_K} \cdot e^{-W_K / kT}. \quad (12.15)$$

Из рис. 12.3в следует, что поведение зависимостей  $f(W_K)$  от  $W_K$  и  $f(v)$  от  $v$  в общих чертах одинаковы.

Таким же способом можно получить функцию распределения молекул по относительным скоростям ( $u = v/v_A$ ):

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}. \quad (12.16)$$

Эта функция удобна тем, что параметры конкретного идеального газа ( $m_0, T$ ) входят в формулу (12.16) через наиболее вероятную скорость молекул.

### 12.1.5. СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЛЕКУЛ

Функции распределения позволяют рассчитать средние свойства молекул, характеризующие всю совокупность молекул в целом. Оценим среднюю арифметическую скорость молекул  $\langle v \rangle$ , которая согласно ее определению равна сумме модулей всех скоростей молекул, взятых в какой-то момент времени, деленной на их число:

$$\langle v \rangle = \sum_{i=1}^N v_i / N. \quad (12.17)$$

Сумма модулей скоростей всех молекул рассчитывается следующим образом. Сначала оценивается сумма модулей скоростей всех молекул в бесконечно малом интервале скоростей ( $v, v + dv$ ), она будет равна произведению числа молекул  $dN_v$  на их скорость  $v$ :  $dN_v v$ . Проводя суммирование по всем интервалам ( $v, v + dv$ ) в пределах значений от нуля ( $v = 0$ ) до бесконечности ( $v = \infty$ ), получим

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN_v = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v N \cdot f(v) dv = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (12.18)$$

Аналогично можно оценить среднюю квадратичную скорость молекул

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i^2} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (12.19)$$

и среднюю кинетическую энергию их поступательного движения

$$\langle W_{\text{К пост}} \rangle = \int W_K f(W_K) dW_K = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (12.20)$$

Помимо скоростей  $\langle v \rangle$  и  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ , всю совокупность молекул также описывает наиболее вероятная скорость  $v_B$  молекул (12.12).

### 12.1.6. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ

Средние характеристики молекул позволяют рассчитать термодинамические параметры системы. Рассмотрим вывод уравнения для давления идеального газа, находящегося в объеме  $V$  при температуре  $T$ .

Как известно, давление газа на стенки сосуда обусловлено ударами молекул о стенки сосуда. Предположим, что все молекулы движутся с одинаковой

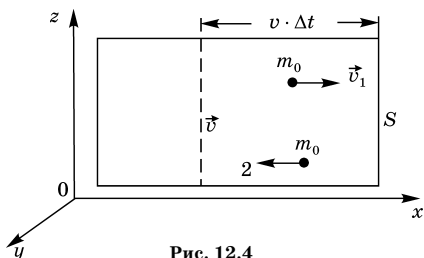


Рис. 12.4

по модулю скоростью  $v$  вдоль трех взаимно перпендикулярных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Оценим импульс  $\Delta p_{\text{ст}}$ , передаваемый молекулой при одном ударе о стенку. Из рис. 12.4 следует, что  $\Delta p_{\text{ст}} = 2m_0v$ . За время  $\Delta t$  со стенкой сосуда столкнется  $1/6$  часть всех молекул, находящихся в объеме цилиндра, площадью основания  $S$  и высотой  $v \cdot \Delta t$ . Это связано с хаосом в

движении молекул — вдоль любой из осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  движется одинаковое число молекул  $1/3N$ , а в положительном направлении оси  $Ox$  — половина от  $1/3N$ , то есть  $1/6N$  всех молекул. За время  $\Delta t$  все молекулы проходят расстояние  $v \cdot \Delta t$ , что и определяет высоту цилиндра.

Поэтому за время  $\Delta t$  стенка получит от молекул импульс

$$\Delta p'_{\text{ст}} = 2m_0v \left( \frac{1}{6} N \right) = 2m_0v \left( \frac{1}{6} nv\Delta t S \right) = \frac{1}{3} m_0 nv^2 \Delta t S,$$

где  $n = N/V$  — концентрация молекул.

Давление газа на стенки сосуда равно отношению средней силы давления на стенку сосуда к площади этой стенки, а средняя сила давления выражается через средний импульс, переданный стенке за время  $\Delta t$ :

$$p = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle \Delta p'_{\text{ст}} \rangle}{\Delta t S} = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle.$$

Итак, для давления идеального газа на стенки сосуда можно записать:

$$p = \frac{1}{3} nm_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} nm_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (12.21 \text{ а})$$

В формуле среднее значение от квадрата скорости молекул  $\langle v^2 \rangle$  учитывает тот факт, что молекулы имеют разные скорости, то есть снимается ограничение, которое было сделано в начале вывода.

Как показывают расчеты, учет движения молекул по всем направлениям в пространстве (не только вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) приводит также к записанной выше формуле для давления идеального газа.

Выразим давление идеального газа через среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул (12.20)

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_{\text{К пост}} \rangle. \quad (12.21 \text{ б})$$

Полученные формулы (12.21) решают задачу расчета макропараметров системы на основе знания свойств отдельной молекулы — в них отражена схема решения задачи, приведенная на рис. 12.1.

Действительно, перепишем формулы (12.20) и (12.21):

$$p = \frac{1}{3} nm_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} nm_0 \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv; \quad (12.22 \text{ а})$$

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_{K \text{ пост}} \rangle = \frac{2}{3} m \int_0^{\infty} W_K (W_K) dW_K; \quad (12.22 \text{ б})$$

$$T = \frac{2}{3K} \int_0^{\infty} W_K f(W_K) dW_K. \quad (12.22 \text{ в})$$

Видно, что в формулы входят: 1) характеристики отдельной молекулы — скорость и кинетическая энергия, которые непрерывно изменяются; 2) функции распределения молекул по модулю их скорости и по их кинетическим энергиям; 3) средние характеристики молекул (усреднение в формулах присутствует в виде интеграла); 4) термодинамические параметры системы.

### 12.1.7. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕМПЕРАТУРЫ

Можно вводить разные определения температуры, показывая каждый раз ее новые свойства. Так, например, температура определяет степень нагретости тел: чем более нагрето тело, тем выше будет его температура.

Другое определение связано с тем, что единственным термодинамическим параметром состояния, одинаковым для всех тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, будет температура. Это является следствием **нулевого начала термодинамики**, согласно которому *в изолированной системе, находящейся в неравновесном состоянии, протекают процессы перехода в равновесное состояние, в котором температура во всех частях системы будет одинаковой*. Так, например, если принести мяч с улицы в комнату, то с течением времени температуры мяча и воздуха в комнате станут одинаковыми, хотя остальные термодинамические параметры — давление воздуха в комнате и внутри мяча и объем мяча и комнаты останутся разными.

Из опыта известно, что для разреженных газов (они подчиняются законам идеальных газов), находящихся в состоянии теплового равновесия, величина  $pV/N$  принимает одинаковое значение, то есть эта величина является температурой. Для того чтобы измерять температуру тел в градусах, вводят коэффициент  $k$ , называемый **постоянной Больцмана**

$$pV/N = kT. \quad (12.23)$$

В соответствии с формулой (12.23) вводится абсолютная шкала температур — шкала температур Кельвина. В этой шкале температура принимает положительные значения —  $T \geq 0 \text{ К}$ .

Выражение (12.22 в) позволяет выяснить молекулярно-кинетический смысл температуры

$$T = \frac{2}{3K} \langle W_{K \text{ пост}} \rangle, \quad (12.24)$$

а именно: *температура системы является мерой интенсивности теплового движения молекул*. С понижением температуры интенсивность теплового движения молекул уменьшается, и при температуре абсолютного нуля температур  $T = 0 \text{ К}$  оно будет отсутствовать.

**12.1.8.**  
**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА.**  
**БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА**

Пусть идеальный газ находится во внешнем поле, в котором потенциальная энергия молекулы равна  $W_p(x, y, z)$ . Температура газа во всех точках занимаемого газом пространства, объемом  $V$ , одинакова и равна  $T$ . В этом случае равновесное распределение частиц в пространстве устанавливается за счет двух факторов — теплового движения, которое стремится разбросать частицы идеального газа равномерно по всему пространству (энергия теплового движения определяется энергией  $kT$ ), и сил потенциального поля, которые стремятся расположить частицы в тех точках пространства, где их потенциальная энергия минимальна. Больцман показал, что в этом случае функция распределения частиц идеального газа по координатам запишется следующим образом:

$$f(x, y, z) = \frac{dP(x, y, z)}{dV} = \frac{dN(x, y, z)}{NdV} = \frac{n(x, y, z)}{N} = \frac{n_0}{N} e^{-\frac{W_p(x, y, z)}{kT}}. \quad (12.25)$$

Функция распределения Больцмана  $f(x, y, z)$  является плотностью вероятности, она равна отношению вероятности  $dP(x, y, z)$  найти частицу в бесконечно малом объеме  $dV$  около точки с координатами  $(x, y, z)$  к величине объема  $dV$ , или отношению относительного числа частиц  $dN(x, y, z)/N$ , попадающих в бесконечно малый объем  $dV$  около точки пространства с координатами  $(x, y, z)$ , к величине объема  $dV$ .

В формуле (12.25) величина  $n(x, y, z)$  определяет концентрацию молекул в точке пространства с координатами  $(x, y, z)$ , ( $n(x, y, z) = dN(x, y, z)/dV$ ), а постоянная  $n_0$  дает концентрацию молекул в тех точках пространства, в которых потенциальная энергия частиц равна нулю.

Функция распределения Больцмана  $f(x, y, z)$  позволяет найти вероятность  $P(V_1)$  попадания молекулы в произвольный объем  $V_1$  пространства или относительное число молекул  $N(V_1)/N$ , попадающих в этот объем  $V_1$  около точки с координатами  $(x, y, z)$

$$P(V_1) = \frac{N(V_1)}{N} = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \quad (12.26)$$

где интеграл берется по объему пространства  $V_1$ .

Входящая в формулу (12.25) концентрация  $n_0$  находится из условия нормировки

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 1. \quad (12.27)$$

В формуле (12.27) интеграл берется по всему объему  $V$ , занимаемому газом.

Выражение (12.26) можно упростить, если объем  $V_1$  будет малым (в пределах объема  $V_1 = \Delta V$  функция распределения остается неизменной):

$$P(\Delta V) = \frac{N(\Delta V)}{N} = f(x, y, z) \Delta V. \quad (12.28)$$

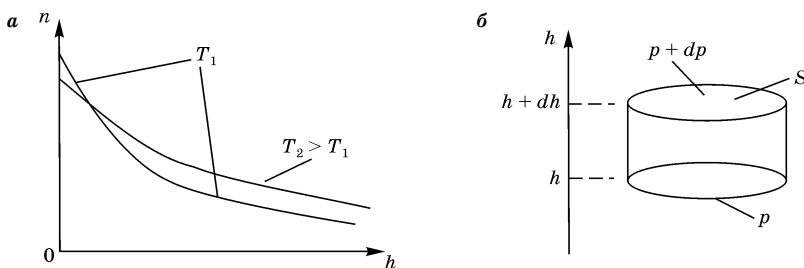


Рис. 12.5

**Барометрическая формула.** Применим распределение Больцмана для идеального газа, находящегося в потенциальном поле тяготения Земли. Учитывая, что  $W_p(x, y, z) = m_0gh$ ,  $n(x, y, z) = n(h)$ , формулу (12.25) можно переписать следующим образом:

$$f(x, y, z) = \frac{n(h)}{N} = \frac{n_0}{N} e^{-\frac{m_0gh}{kT}} = \frac{n_0}{N} e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (12.29)$$

где  $n_0$  — концентрация газа на поверхности Земли.

На рис. 12.5а приведены графики зависимости концентрации  $n$  газа от высоты  $h$  при различных температурах  $T$ . Видно, что с повышением температуры зависимости  $n(h)$  становятся более пологими, при этом изменяется концентрация  $n_0$  газа на поверхности Земли (она уменьшается).

Запишем барометрическую формулу, определяющую зависимость давления воздуха от высоты над поверхностью Земли. Для этого, учитывая постоянство температуры во всем объеме идеального газа, выразим концентрацию молекул идеального газа через его давление:  $n = p/(kT)$ ,  $n_0 = p_0/(kT)$ . Тогда

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (12.30)$$

где  $M$  — молярная масса газа,  $p_0$  — давление газа на поверхности Земли.

Применение полученной формулы для оценки давления воздуха возможно только для малых перепадов высот. Это связано с тем, что температура воздуха с увеличением высоты понижается, и к тому же происходит перемешивание воздушных слоев, что приводит к незначительному снижению давления воздуха до высот порядка нескольких километров.

Можно также отметить, что согласно формуле (12.30) состав воздуха (он представляет собой смесь таких газов, как азот, кислород, углекислый газ, гелий и т. д.) будет с высотой изменяться — с повышением высоты будет повышаться концентрация газов с меньшей молярной массой.

При работе некоторых приборов для измерения давления при малых перепадах высот  $\Delta h$  применяется формула (12.30). Так, например, для измерения высоты полета применяют прибор, получивший название **альтиметра**. При полете к аэропорту проводится градуировка прибора в соответствии с давлением воздуха на поверхности Земли. Тогда показания прибора в соответствии с барометрической формулой (12.30) дают высоту полета над данным аэропортом.

В заключение приведем вывод барометрической формулы, что косвенно подтверждает полученный Больцманом вид функции распределения.

Давление газа на данной высоте  $h$  обусловлено давлением вышележащих слоев газа. Найдем давление  $dp$ , созданное слоем газа толщиной  $dh$  и площадью основания  $S$  на высоте  $h$ , давление на этой высоте обозначим  $p$  (см. рис. 12.5б). Тогда

$$dp = dm g / S, \quad dm = \rho dV = \rho S |dh|, \quad p dV = \frac{dm}{M} RT, \quad \rho = \frac{PM}{RT}, \quad dp = -\frac{pMg}{RT} dh,$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh, \quad \int_0^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

что и требовалось показать.

При выводе этой формулы было учтено, что с увеличением высоты давление газа падает, то есть производная  $dp/dh$  меньше нуля.

### 12.1.9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим, как для идеального газа молекул, находящегося во внешнем потенциальном поле, можно найти распределение молекул газа одновременно и по координатам и по скоростям, то есть найти функцию распределения Максвелла–Больцмана.

Для этого необходимо учесть, что температура газа во всех точках объема считается постоянной. Поэтому распределение молекул по скоростям в любой точке пространства будет одним и тем же; оно зависит только от температуры газа и массы его молекул, и, следовательно, распределение молекул отдельно по скоростям и отдельно по координатам будет независимым друг от друга.

В теории вероятности известно, что вероятность одновременного осуществления двух независимых случайных событий равна произведению вероятностей осуществления этих событий по отдельности. Поэтому для функции распределения Максвелла–Больцмана можно записать:

$$f(x, y, z, v) = \frac{dP(x, y, z, v)}{dV dv} = \frac{dP(v) dP(x, y, z)}{dV} = f(v) f(x, y, z); \quad (12.31)$$

$$f(x, y, z, v) = 4\pi \frac{n_0}{N} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{W_K + W_P}{kT}}. \quad (12.32)$$

Функция распределения Максвелла–Больцмана позволяет найти относительное число молекул, попадающих в объем  $V_1$ , причем скорости этих молекул заключены в интервале скоростей  $(v_1, v_2)$ :

$$\frac{N(V_1; v_1, v_2)}{N} = P(V_1; v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} \iiint_{V_1} f(x, y, z, v) dv dx dy dz =$$

$$= \left( \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \right) \cdot \left( \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz \right). \quad (12.33)$$



В формулу (12.32) входит сумма кинетической и потенциальной энергии молекулы, поэтому функцию распределения Максвелла–Больцмана также называют функцией распределения молекул по полной энергии частиц:

$$f(W) = 4\pi \frac{n_0}{N} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{2W_K}{m_0}} e^{-\frac{W}{kT}}. \quad (12.34)$$

### 12.1.10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ПО МОДУЛЮ СКОРОСТИ. ОПЫТЫ ПЕРРЕНА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОСТОЯННОЙ АВОГАДРО

**Опыт Ламмерта.** В настоящее время известно несколько опытов, в которых проверялось распределение частиц идеального газа по модулю их скоростей, где был использован метод молекулярных и атомных пучков (Штерн (1920), Элдридж (1927), Ламмерт (1929)). Возможна также проверка распределения Максвелла по наблюдению уширения спектральных линий, которые излучают движущиеся возбужденные молекулы газа: за счет эффекта Доплера происходит смещение частоты излучения в зависимости от скорости движения молекул, что и позволяет по уширению спектральных линий проверить распределение молекул по скоростям.

Рассмотрим подробнее опыт Ламмерта. В специальном устройстве испаряют жидкий металл, его пары содержат молекулы с различными скоростями, которые соответствуют температуре испаряемого металла. Затем формируется узкий молекулярный пучок, он проходит через систему, состоящую из двух синхронно вращающихся с угловой скоростью  $\omega$  дисков, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 12.6а). В этих дисках имеются радиальные щели, смещенные на некоторый угол  $\varphi$  относительно друг друга. Через такую систему из двух дисков проходят молекулы, скорости которых удовлетворяют условию, при котором время прохождения молекулой расстояния  $l$  между дисками должно равняться времени поворота дисков на угол  $\omega$ :

$$t = l/v = \varphi/\omega \Rightarrow v = l \cdot \omega/\varphi. \quad (12.35)$$

Молекулы, пройдя систему из двух дисков, попадают в ловушку (приемник). Таким образом, выделяются из пучка только те молекулы, скорости

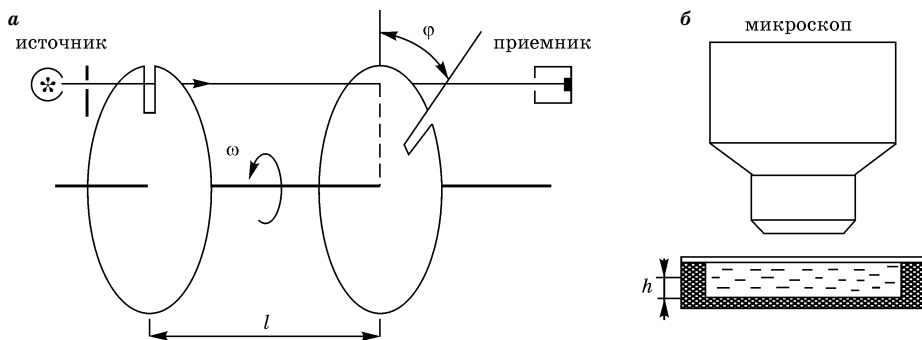


Рис. 12.6

которых попадают в узкий интервал скоростей (этот интервал связан с конечной шириной щелей, он будет вблизи скорости  $v$  равным  $v = l \cdot \omega / \varphi$ ). Число таких молекул определяют по толщине осадка на стеклянной пластине, помещенной в приемнике. Изменяя параметры  $l$ ,  $\varphi$  и  $\omega$ , можно было установить распределение молекул пучка по скоростям. Полученные из опыта кривые распределения молекул по скоростям подтвердили справедливость распределения Максвелла.

**Опыты Перрена по определению постоянной Авогадро.** Известно, что броуновские частицы (мельчайшие частицы твердого вещества, взвешенные в жидкости или газе, и которые можно наблюдать в микроскопе) находятся в тепловом движении так же, как и молекулы. Поэтому Перрен предположил, что распределение Больцмана справедливо и для броуновских частиц. При этом из-за значительно большей массы этих частиц по сравнению с массой молекул должны были наблюдаться более существенные изменения в концентрации частиц при малом изменении высоты  $\Delta h$ . В своих опытах Перрен (1906) использовал микроскоп с малой глубиной резкости. Это позволило ему достаточно хорошо наблюдать частицы (их размеры были порядка  $10^{-7}$  м) в пределах объема, высота которого была порядка ( $\Delta h \approx 10^{-6}$  м).

В опытах определялось число частиц, попадающих в поле зрения микроскопа в зависимости от высоты  $h$ , отсчитываемой от дна стеклянной трубки, в которой находилась жидкость с взвешенными в ней броуновскими частицами (см. рис. 12.6б).

В соответствии с распределением Больцмана для отношения концентраций частиц на разной высоте (формула (12.29)) можно записать

$$\ln \left( \frac{n_1}{n_2} \right) = \frac{(m - \rho_{\text{ж}} V) g (h_2 - h_1)}{kT} = \frac{N_A (\rho - \rho_{\text{ж}}) g V (h_2 - h_1)}{RT},$$

что позволило получить формулу для экспериментального определения постоянной Авогадро  $N_A$ :

$$N_A = \frac{RT}{(\rho - \rho_{\text{ж}}) g V (h_2 - h_1)} \ln \left( \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (12.36)$$

В эти формулы вместо массы частицы  $m_0$  входит разность  $(m_0 - \rho_{\text{ж}} V)$ , учитывающая дополнительную силу — силу Архимеда, действующую в жидкости на частицу;  $\rho_{\text{ж}}$ ,  $\rho$  — плотности жидкости и вещества частицы соответственно;  $V$  — объем частицы.

В результате проведенных опытов Перрен показал, что постоянная Авогадро  $N_A$  может принимать значения, заключенные в интервале  $N_A = (6,5 \div 7,2) \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ , что находилось в согласии с данными других опытов.

Уникальность опытов Перрена была связана с плохой экспериментальной аппаратурой, существовавшей в то время. Так, в частности, достаточно трудно было поддерживать с высокой точностью температуру во всем объеме жидкости, а также наблюдать быстро движущиеся частицы в микроскопе и делать фотоснимки с помощью фотоаппарата.

## 12.2. РАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

**Термодинамика** — это наука о наиболее общих макроскопических физических системах, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и о процессах перехода между этими состояниями. Термодинамика строится на основе фундаментальных принципов (начал, законов), которые являются обобщением многочисленных наблюдений и выполняются независимо от конкретной природы образующих систему тел. Поэтому закономерности и соотношения между физическими величинами имеют универсальный характер. В развитии термодинамики можно отметить вклад ряда ученых. М. В. Ломоносов сформулировал закон сохранения материи и движения (1748). В 1824 г. С. Карно опубликовал труд, в котором были приведены формулировки второго начала термодинамики и теорема о КПД теплового двигателя (теорема Карно). В 1842 г. Ю. Майер открыл закон сохранения энергии и определил механический эквивалент теплоты. Независимо от него к открытию закона сохранения энергии в тепловых процессах пришли Дж. Джоуль (1843), Г. Грин и Г. Гельмгольц (1847). У. Ранкин и Р. Клаузиус независимо получили соотношение между теплотой и механической работой (первое начало термодинамики). Большой вклад в развитие термодинамики внес Р. Клаузиус, сформулировавший второе начало термодинамики (1850); он также дал математическое выражение второго начала термодинамики для обратимых (1854) и необратимых (1862) процессов, записал формулу для КПД тепловой машины через температуры нагревателя и холодильника (1856). Введя понятие энтропии, он сформулировал второй закон термодинамики с точки зрения энтропии. Свою формулировку второго начала термодинамики дал У. Томсон в 1851 г. Л. Больцман установил связь энтропии физической системы с вероятностью ее состояния и доказал статистический характер второго закона термодинамики (1872). Дж. Гиббс заложил основы химической термодинамики, в частности разработал общую теорию термодинамического равновесия и метод термодинамических потенциалов (1873), завершил построение классической статистической физики (1902). В 1906 г. В. Нернст высказал утверждение о том, что энтропия химически однородного твердого или жидкого тела при абсолютном нуле температур равна нулю (теорема Нернста). Экспериментально это было показано (У. Джиоком), после чего получило название третьего начала термодинамики.

В настоящее время развивается равновесная статистическая термодинамика — раздел статистической физики, посвященный обоснованию законов термодинамики равновесных процессов (на основе статистической механики Гиббса) и вычислению термодинамических характеристик физических систем (термодинамических потенциалов), уравнения состояний на основе законов взаимодействия составляющих эту систему частиц. Неравновесная статистическая термодинамика дает статистическое обоснование термодинамики неравновесных процессов (уравнений переноса энергии, импульса, массы) и позволяет получить выражения для входящих в уравнения переноса коэффициентов (кинетических коэффициентов) на основе законов взаимодействия и движения частиц системы.

### 12.2.1. НУЛЕВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА, ТЕПЛООБМЕН

**Уравнение состояния.** В связи с тем, что макропараметры системы не являются независимыми, между ними существует вполне определенная формула связи, которая называется **уравнением состояния**. В самом простом случае, в отсутствие внешних полей (гравитационного, магнитного,

электрического поля) такое уравнение связывает такие параметры, как ( $p, V, T$ ):

$$f(p, V, T) = 0. \quad (12.37)$$

В более сложных случаях для характеристики равновесного состояния требуются и другие параметры (например концентрация компонентов смеси газов, напряженность электрического поля, магнитная индукция и т. д.).

**Функция состояния системы** — это любая функция параметров системы, которая принимает одно и то же значение в данном состоянии системы независимо от способа перехода в это состояние.

**Неравновесное состояние** — состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения.

**Процесс релаксации** — процесс перехода предоставленной самой себе системы из неравновесного состояния в равновесное состояние.

**Изолированная (замкнутая) система** — система, которая не обменивается с внешними телами энергией и веществом.

**Закрыва́тая система** — система, которая обменивается энергией и не обменивается частицами с окружающими ее внешними телами.

**Открытая система** — система, которая обменивается энергией и частицами с окружающими внешними телами.

В равновесной термодинамике изучают **равновесные процессы**. Под ними понимают процессы, в каждой точке которых макропараметры системы принимают определенные значения. Такие процессы являются идеализацией, они протекают бесконечно медленно в отсутствие разности давлений и температур.

Примером равновесного процесса является процесс бесконечно медленного сжатия газа под поршнем (рис. 12.7а). В этом случае давление и температура газа будут одинаковыми во всех точках занимаемого газом объема. Если же перемещать поршень с конечной скоростью, то тогда непосредственно под поршнем образуется область газа (воздушная подушка), в которой его давление превышает давление в остальных точках объема (рис. 12.7а). Следовательно, этот параметр для газа будет неопределенным и процесс не будет равновесным.

Равновесные процессы можно изображать на диаграммах состояниях, а неравновесные процессы нельзя из-за неопределенности параметров состояния в каждой точке процесса (их протекание можно обозначить пунктирной линией).

Равновесный процесс, представляя собой непрерывную цепь равновесных состояний, является **обратимым**, то есть обратимый процесс можно со-

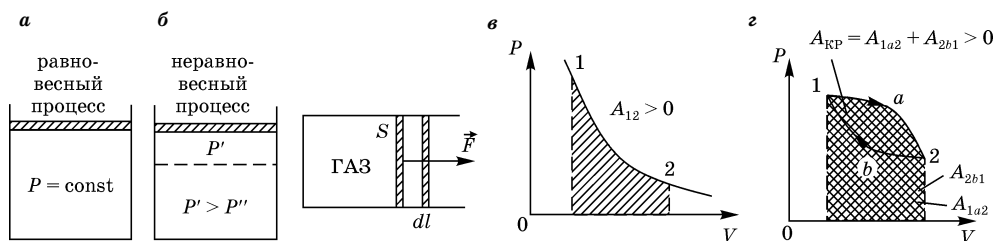


Рис. 12.7

вершить в обратном направлении, и при этом в окружающей среде не останется никаких изменений.

**Нулевое начало термодинамики.** Его еще называют принципом термодинамического равновесия. Если система 1 находится в состоянии теплового равновесия по отдельности с системами 2 и 3, то эти две последние системы находятся в состоянии теплового равновесия между собой. Этот принцип приводит к понятию температуры, она будет одинаковой для систем, находящихся в состоянии теплового равновесия друг с другом. Для отдельной системы все ее части в равновесном состоянии также имеют одинаковую температуру.

Данная формулировка нулевого начала термодинамики эквивалентна той, которая была дана в п. 12.1.7.

**Внутренняя энергия системы.** Под внутренней энергией системы (или тела)  $U$  понимают его энергию за вычетом энергии системы во внешних полях и кинетической энергии движения системы как целого. Внутренняя энергия системы зависит от параметров ее состояния (в самом простом случае от таких параметров, как ее объем, температура и давление).

*Внутренняя энергия системы является функцией состояния системы*, то есть она принимает одно и то же значение в данном состоянии системы независимо от способа перехода в это состояние:  $U = U(p, V, T)$ .

Так как параметры системы связаны уравнением состояния (12.37), то это означает, что внутренняя энергия системы может быть записана как функция только двух переменных, например объема и давления:  $U = U(p, V)$ .

В термодинамике нельзя определить точное значение внутренней энергии системы, так как она входит в формулы в виде разности внутренних энергий разных состояний:  $\Delta U_{12} = U_2 - U_1$ .

С точки зрения молекулярной физики внутренняя энергия системы складывается из суммы кинетических энергий теплового движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$U = \sum_{i=1}^N W_{Ki} + \sum_{i=1}^N W_{Pi}. \quad (12.38)$$

Вклады во внутреннюю энергию, которые не изменяются при протекании в системе термодинамических процессов (например вклад от внутримолекулярного или внутриатомного взаимодействия), полагают равными нулю.

Рассмотрим два способа изменения внутренней энергии системы за счет взаимодействия с внешними телами — это работа и теплопередача (теплообмен). При этом считается, что обмена частицами не происходит, то есть система является закрытой.

**Работа в термодинамике.** Существуют два способа обмена энергией между системой и внешними телами — работа и теплообмен (теплопередача). Под работой понимают такой способ обмена энергией, при котором происходит перемещение макроскопических частей системы, меняется ее объем. Работа как процесс обмена энергией связана с упорядоченной формой движения материи. Энергия, передаваемая или получаемая при этом системой, называется работой.

Можно отметить, что *работа как вид обмена энергией реализуется в чистом виде для адиабатического процесса — это процесс, происходящий*

без теплообмена с окружающими систему телами ( $\delta Q = 0$ ). В этом случае сжатие газа сопровождается его нагревом, а расширение — охлаждением, то есть изменением внутренней энергии системы.

Выведем формулу, которая позволяет рассчитать работу для различных процессов. Рассмотрим процесс равновесного расширения газа, находящегося под поршнем (см. рис. 12.7а). Сила  $F$  давления газа на поршень площади  $S$  при его элементарном перемещении  $dl$  совершает элементарную работу  $dA$ :

$$\delta A = F dl \cos 0 = (pS) dl = p(Sdl) = p dV. \quad (12.39)$$

Для работы на конечном перемещении можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 p dV. \quad (12.40)$$

Графически работа газа на диаграмме в координатах  $(p, V)$  изображается площадью под графиком процесса (см. рис. 12.7в). Для изобарического процесса это будет площадь прямоугольника, а для кругового процесса (**круговой процесс** — это процесс, при котором система возвращается в исходное состояние) работа  $A_{кр}$  равна площади замкнутой фигуры  $(1 - a - 2 - b - 1)$ , ограниченной графиком процесса ( $A_{кр} = (A_{1a2} + A_{2b1}) > 0$ , рис. 12.7г).

Работа газа при его расширении будет положительной, а при сжатии — отрицательной.

**Теплообмен (теплопередача).** Под теплопередачей понимают процесс обмена энергией между системой и внешними телами, при котором не происходит изменения объема системы, не перемещаются ее макроскопические части. Энергия, получаемая или отдаваемая системой при таком процессе, называется количеством теплоты. Если система получает теплоту, то она считается положительной, если отдает — отрицательной.

Теплообмен может происходить за счет соударений молекул системы и внешних тел на границе их раздела, лучеиспускания — молекулы системы поглощают электромагнитное излучение внешних источников и конвекции — процесса переноса тепла в жидкости, газе, сыпучих средах потоками вещества. Примером конвекции является перемешивание нагретых и холодных слоев воздуха в земной атмосфере.

В чистом виде теплообмен реализуется для изохорического процесса ( $V = \text{const}; \delta A = p dV = 0$ ).

**Теплоемкость системы (тела).** Для расчета количества теплоты, получаемой или отдаваемой системой, вводится понятие теплоемкости системы

$$C = \delta Q / dT. \quad (12.41)$$

Теплоемкость системы  $C$  равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, чтобы нагреть его на один градус.

Вводятся также удельная ( $c$ ) и молярная ( $c_M$ ) теплоемкости системы

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad c_1 = \frac{C}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (12.42)$$

где  $m$  — масса системы, а  $\nu = M/m$  — количество вещества.

При известных теплоемкостях системы можно рассчитать количество теплоты, которое получает или отдает система при теплообмене

$$\delta Q = CdT = cmdT = C_M v dT. \quad (12.43)$$

Все эти формулы записаны в том случае, когда в системе нет изменения агрегатного состояния вещества (плавление или кристаллизация, конденсация или парообразование происходят при постоянной температуре), в этих случаях можно записать

$$\delta Q = \lambda dm, \delta Q = r dm, \quad (12.44)$$

где используются определяемые из опыта удельная теплота плавления  $\lambda$  и парообразования  $r$ :  $\lambda = \delta Q/m$ ,  $r = \delta Q/m$ .

### 12.2.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН (НАЧАЛО) ТЕРМОДИНАМИКИ

Первый закон термодинамики является законом сохранения энергии в тепловых процессах:

$$\delta Q = dU + \delta A, Q_{12} = \Delta U + A_{12}. \quad (12.45)$$

Согласно первому закону термодинамики *количество теплоты, подведенное к системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на работу, совершаемую системой над внешними телами*. Формула (12.45) записана как для элементарных процессов, так и для случая, при котором происходит конечное изменение параметров системы.

Отметим различие между внутренней энергией системы и работой и количеством теплоты. При переходе системы из одного состояния в другое она обменивается с внешними телами энергией, при этом совершается работа и передается количество теплоты. Это приводит к изменению внутренней энергии системы. В конечном состоянии внутренняя энергия принимает вполне определенное значение, а работа и теплообмен прекращаются.

Следовательно, состояние системы нельзя охарактеризовать определенными значениями работы и количеством теплоты — эти величины зависят от процесса перехода и характеризуют только сам процесс перехода. Так, на-

пример, нельзя сказать, что в данном состоянии количество теплоты равно 10 Дж, а работа составляет 5 Дж.

Чтобы наглядно показать различие между внутренней энергией и количеством теплоты и работой, их малые изменения для элементарных процессов записывают как  $\delta Q$  и  $\delta A$ , а для внутренней энергии — как  $dU$ . Различие между этими величинами наглядно проявляется в зависимости значений

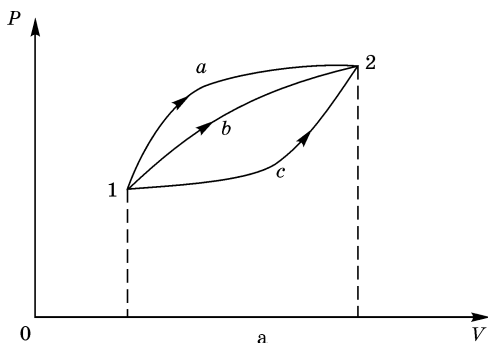


Рис. 12.8

работы и количества теплоты от способа перехода из одного состояния в другое (см. рис. 12.8):

$$\Delta U = U_2 - U_1 = (Q - A)_{1a2} = (Q - A)_{1b2} = (Q - A)_{1c2}. \quad (12.46)$$

Из формулы (12.46) следует, что переход различными путями из состояния 1 в состояние 2 приводит к изменению работы системы и количества теплоты, получаемой или отдаваемой системой при таком переходе, а изменение внутренней энергии при этом остается неизменным.

Зависимость количества теплоты от вида происходящего процесса приводит к аналогичной зависимости и теплоемкости системы. Поэтому вводят различные теплоемкости, описывающие протекание процессов при постоянном объеме ( $C_V$ ), давлении ( $C_P$ ), температуре ( $C_T$ ) и т. д.

Для кругового процесса первый закон термодинамики запишется таким образом:

$$\delta A_{\text{кр}} = \delta Q_{\text{кр}}. \quad (12.47)$$

Формула (12.47) позволяет сформулировать первый закон термодинамики в следующем виде: *невозможен вечный двигатель первого рода, то есть такое периодически действующее устройство, которое совершало бы работу большую, чем подводимая извне энергия.*

Формула (12.47) устанавливает эквивалентность двух форм передачи энергии — работы и теплоты. Они эквивалентны, так как представляют собой две формы передачи одной и той же физической величины — энергии; при совершении кругового и изотермического процессов работа и количество теплоты совпадают, приводят к одинаковым результатам.

### 12.2.3. ВТОРОЙ ЗАКОН (НАЧАЛО) ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛИРОВКИ

С точки зрения первого начала термодинамики возможно самопроизвольное протекание (без вмешательства извне) процессов передачи тепла от горячего тела к холодному и, наоборот, от холодного тела к горячему (рис. 12.9a). Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) не накладывает ограничений на возможность самопроизвольного протекания таких процессов. Однако известно, что второй процесс (переход тепла от холодного тела к горячему) самопроизвольно в природе не протекает.

Следовательно, возникает необходимость сформулировать закон, который определял бы направление протекания процессов в природе. Этим зако-

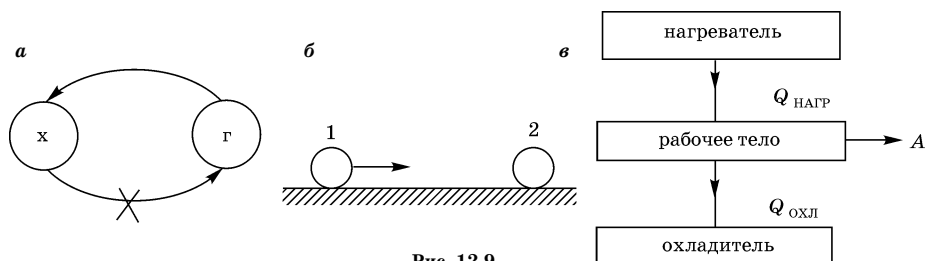


Рис. 12.9



ном и является второй закон (начало) термодинамики. Его обобщенная формулировка утверждает, что **все процессы в природе необратимы, то есть самопроизвольно (без вмешательства извне) протекают только в одном направлении.**

По мере развития термодинамики этот закон (начало) как обобщение опытных фактов формулировался разными учеными по-разному, но все эти формулировки отражали необратимость протекания процессов в природе. Приведем некоторые из этих формулировок.

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является переход тепла от холодного тела к горячему (Клаузиус, рис. 12.9а).

Следующие формулировки (2–6) в явном виде устанавливают неэквивалентность двух форм передачи энергии в виде тепла (неупорядоченная форма передачи энергии) и работы (упорядоченная форма), что приводит к необратимости протекания процессов в природе. Их неэквивалентность связана с различием тепловой формы движения материи и упорядоченной формой ее движения. Так, неупорядоченная форма движения материи приводит к диссипации энергии, к невозможности полного перехода ее в упорядоченную форму движения материи — работу.

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела (Томсон).

3. Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

4. Невозможен вечный двигатель второго рода, то есть такое устройство, которое полностью превращало бы тепло в работу (Оствальд).

5. Каждый тепловой двигатель должен содержать в своем составе охладитель.

6. КПД тепловой машины не может быть равен единице.

На рис. 12.9б показана блок-схема теплового двигателя (это устройство, превращающее тепловую энергию топлива в механическую работу). Нагреватель сообщает рабочему телу (это пар или газ) количество теплоты  $Q_{\text{нагр}}$ , за счет которого рабочее тело совершает работу, а неизрасходованное при этом тепло передает охладителю. При этом КПД теплового двигателя будет меньше единицы:

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{охл}}|}{Q_{\text{нагр}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{охл}}|}{Q_{\text{нагр}}} < 1. \quad (12.48)$$

Приведем еще одну возможную формулировку второго начала термодинамики.

7. Невозможен процесс самопроизвольного перехода тепловой энергии в другие виды энергии. Приведем пример, подтверждающий эту формулировку. Пусть шарик катится по горизонтальному столу (рис. 12.9б). С течением времени за счет работы силы трения его механическая энергия (кинетическая энергия) перейдет в тепловую энергию стола и шарика. Обратный процесс самопроизвольно не протекает, то есть шарик за счет своей внутренней энергии теплового движения не начнет двигаться по столу.

# 12.2.4. ЭНТРОПИЯ В ТЕРМОДИНАМИКЕ. КАЧЕСТВЕННЫЙ ПРИМЕР ИЗМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ НЕРАВНОВЕСНОМ ПРОЦЕССЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К РАЗВИТИЮ ВСЕЛЕННОЙ

**Энтропия.** Ряд термодинамических формулировок второго начала термодинамики содержит понятие энтропии системы. При развитии термодинамики оказалось, что, помимо внутренней энергии системы, функцией состояния также является величина, которая для равновесных процессов вводится (это было сделано Клаузиусом) по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad dS = \delta Q/T, \quad (12.49)$$

то есть эта величина не зависит от пути перехода из одного состояния в другое. Она получила название энтропия (с *греч.* — поворот, превращение). Величину  $(\delta Q/T)$  в формуле (12.49) называют **приведенной теплотой**.

Из формулы (12.49) следует, что источником изменения энтропии системы является теплообмен между системой и внешними телами. В зависимости от вида равновесного процесса, происходящего в системе, энтропия системы может как возрастать (тепло подводится к системе), так и убывать (тепло отводится от системы).

Оказалось, что существует еще один источник изменения энтропии, он связан с протеканием в системе неравновесного процесса. Клаузиус показал, что при протекании неравновесного процесса в замкнутой системе ее энтропия возрастает. Поэтому для изменения энтропии системы с учетом возможности протекания неравновесного процесса равенство (12.49) запишется таким образом:

$$\Delta S \geq \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T}. \quad (12.50)$$

Данная формула важна для анализа протекания необратимых процессов в замкнутых (или изолированных) системах (для них нет теплообмена между системой и окружающими телами —  $\delta Q = 0$ ), для них  $\Delta S \geq 0$ .

Дадим формулировку второго начала термодинамики с использованием понятия энтропии (Клаузиус): *энтропия замкнутой системы стремится к максимуму*:

$$\Delta S \geq 0. \quad (12.51)$$

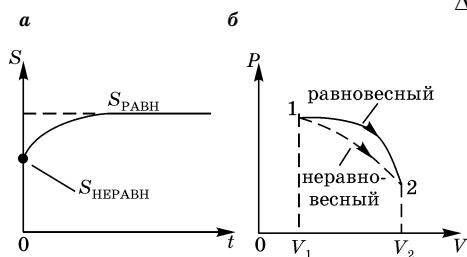


Рис. 12.10

Из опыта известно, что если замкнутая (или изолированная) система сначала находилась в неравновесном состоянии, то с течением времени в ней протекают процессы перехода в равновесное состояние, в состояние теплового равновесия. При таком процессе энтропия системы возрастает ( $\Delta S > 0$ ,

рис. 12.10а). Когда система переходит в равновесное состояние, энтропия достигает максимального значения, которое с течением времени остается неизменным ( $\Delta S = 0$ ,  $S = \text{const}$ , рис. 12.10а). Это означает, что в таких системах невозможен процесс перехода системы из равновесного состояния в неравновесное, так как при этом энтропия будет убывать, что запрещено вторым началом термодинамики.

Итак, *энтропия системы определяет направление протекания процессов в замкнутых системах.*

Наиболее полно физический смысл энтропии раскрывается в статистической (молекулярной) физике. В дальнейшем будут даны формулировки второго начала термодинамики с точки зрения молекулярного строения вещества.

**Качественный пример, поясняющий изменение энтропии при неравновесном процессе.** Пусть газ под поршнем расширяется из состояния 1 (объем газа  $V_1$ ) в состояние 2 (объем газа  $V_2$ ) с помощью равновесного (обратимого) процесса (сплошная линия на диаграмме, рис. 12.10б) и неравновесного (необратимого) процесса (пунктир).

Отметим, что для неравновесного расширения газа в формуле для работы (12.40) необходимо брать внешнюю силу, которая действует на поршень с внешней стороны, а не силу давления газа, как при равновесном процессе расширения. Неравновесный процесс расширения происходит с конечной скоростью, поэтому внешняя сила будет меньше силы давления газа на поршень и работа неравновесного расширения будет меньше работы при равновесном его расширении

$$A_{\text{неравн}12} < A_{12}. \quad (12.52)$$

В крайнем случае — расширения газа в пустоту — она будет равна нулю.

Давление газа как параметр его состояния при неравновесном процессе не будет иметь определенного значения для всего газа — непосредственно под поршнем он будет принимать наименьшие значения. В связи с этим неравновесный процесс нельзя изображать на диаграммах состояния, его можно обозначить, например, пунктирной линией (рис. 12.10б).

При достижении поршнем конечного объема  $V_2$  неравновесный процесс заканчивается. Затем протекает процесс, переводящий газ из неравновесного состояния в равновесное, при этом изменение энтропии будет положительным ( $\Delta S' > 0$ ). Действительно, запишем первый закон термодинамики для равновесного (обратимого) и неравновесного (необратимого) процессов перехода газа из состояния 1 в состояние 2:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1 + A_{12}), \quad Q_{12\text{необр}} = (U_2 - U_1 + A_{12\text{необр}}) \Rightarrow Q_{12} > Q_{12\text{необр}}.$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} > \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} \Rightarrow \Delta S' = \left( \Delta S - \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} \right) > 0, \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} + \Delta S'. \quad (12.53)$$

В итоге, изменение энтропии будет одинаковым для двух процессов перехода (энтропия является функцией состояния системы), а интегралы от приведенной теплоты будут различаться.

Для замкнутой системы, в которой в начальный момент времени было неравновесное состояние, изменение энтропии будет больше нуля (из формулы (12.53) следует  $\Delta S' = \Delta S > 0$ ).

Рассмотренный пример подтверждает формулу (12.50), но не является доказательством второго начала термодинамики; этот закон не доказывается, он является следствием опытных данных.

**«Тепловая смерть» Вселенной.** Можно применить второе начало термодинамики к процессам, происходящим во Вселенной, считая ее замкнутой системой. В такой системе будут протекать неравновесные процессы только с возрастанием энтропии. Следовательно, все виды энергии будут переходить в тепловую энергию, она будет переходить от нагретых тел к холодным. Обратные процессы протекать не будут, так как при них энтропия Вселенной будет убывать. В итоге Вселенная будет представлять собой резервуар равномерно распределенного по пространству тепла, процессы перехода из такого состояния запрещены, так как в этом случае энтропия замкнутой системы (Вселенной) будет убывать. Это и означает «тепловую смерть» Вселенной.

Данный вывод для Вселенной неприменим, так как ее нельзя рассматривать как замкнутую систему. При этом учет сил тяготения приводит к тому, что изотермическому равновесному равномерному распределению массы не соответствует максимальная энтропия. Это означает, что процессы структурообразования во Вселенной (образование звезд, галактик и т. д.) идут с увеличением энтропии, Вселенная развивается и «тепловая смерть» ей не грозит.

#### 12.2.5. МЕТОД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Объединяя первый и второй закон термодинамики, можно записать основное уравнение термодинамики для равновесных процессов:

$$TdS = dU + pdV. \quad (12.54 \text{ а})$$

Его называют **основным термодинамическим равенством Клаузиуса**, а в случае неравновесных процессов

$$TdS \geq dU + pdV, \quad (12.54 \text{ б})$$

его называют **основным термодинамическим неравенством Клаузиуса**.

Уравнение (12.54 а) позволяет полностью описывать термодинамические процессы в равновесной термодинамике. Для этого используют метод характеристических функций (или термодинамических потенциалов). Характеристическими называют функции состояния, через производные которых наиболее просто и в явном виде можно определить все параметры системы.

Рассмотрим, как могут быть выражены все термодинамические свойства системы с помощью характеристических функций. Уравнение (12.54 а) связывает пять переменных величин ( $p, V, T, S, U$ ). Состояние системы обычно задается с помощью двух независимых параметров, пусть, например, это будут энтропия системы и ее объем. Для определения трех оставшихся параметров ( $p, T, U$ ) необходимо записать три уравнения. Первое — уравнение 12.54 а, второе — уравнение состояния 12.37, а третье — найденная для сис-

темы из опыта (или найденная расчетным путем) зависимость внутренней энергии  $U$  от таких параметров, как энтропия и объем —  $U = U(S, V)$ . Эта зависимость и позволяет найти еще неопределенные остальные параметры состояния — температуру и давление.

Действительно, из математики известно, что дифференциал функции  $U$  от ее переменных  $(S, V)$  можно записать следующим образом:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV, \quad (12.55)$$

где обозначены частные производные от внутренней энергии по энтропии (при постоянном объеме системы) и по объему (при постоянной энтропии системы).

Формула (12.55) вместе с выражением для  $dU$  (12.54 а) при известной зависимости  $U = U(S, V)$  позволяет определить остальные параметры системы —  $p$  и  $T$ :

$$dU = TdS - pdV \Rightarrow T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S, \quad (12.56)$$

и тем самым описать полностью происходящие в системе процессы.

Отметим, что в данном случае необходимо знать именно зависимость внутренней энергии от энтропии и объема. Только в этом случае удастся определить без дополнительных данных остальные параметры системы — давление и температуру.

Однако использовать зависимость внутренней энергии от энтропии затруднительно, так как энтропия непосредственно на опыте не измеряется и сама является термодинамической функцией состояния системы. Поэтому с помощью уравнения (12.54 а) вводят другие характеристические функции состояния (термодинамические потенциалы), которые широко используются при анализе различных равновесных термодинамических процессов. К ним относятся энтальпия  $H$ , изохорно-изотермический потенциал (свободная энергия Гельмгольца)  $F$  и изобарно-изотермический потенциал (свободная энергия Гиббса)  $G$ :

$$H = U + pV = H(S, p), \quad dH = TdS + Vdp \Rightarrow T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S; \quad (12.57)$$

$$F = U - TS = F(T, V), \quad dF = -SdT - pdV \Rightarrow S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T; \quad (12.58)$$

$$G = H - TS = G(T, p), \quad dG = -SdT + Vdp \Rightarrow S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T. \quad (12.59)$$

Как видно из формул (12.57)–(12.59), энтальпию системы удобно применять при адиабатическом ( $S = \text{const} \Rightarrow H = H(p)$ ) или изобарическом процессах ( $p = \text{const} \Rightarrow H = H(S)$ ) соответственно и внутреннюю энергию при адиабатическом и изохорическом процессах (см. формулу (12.56)), и т. д.

Нужно отметить, что свободные энергии Гельмгольца и Гиббса зависят от параметров, непосредственно измеряемых опытным путем — температуры, давления и объема, что предопределяет частое их использование при термодинамических расчетах.

В соответствии с формулами (12.57)–(12.59) можно экспериментально определить изменения термодинамических потенциалов. Так, для адиабатического процесса убыль внутренней энергии газа равна работе газа, изменение энтальпии при изобарическом процессе равно количеству теплоты, полученной системой, и т. д.

$$dU(S = \text{const}) = -pdV = -\delta A, dF(T = \text{const}) = d(U - TS) = -pdV = -\delta A_T; \quad (12.60)$$

$$dH(p = \text{const}) = TdS = \delta Q_p, dG(T = \text{const}) = d(H - TS) = d(pV) - \delta A_T. \quad (12.61)$$

Обратим внимание на то, что убыль свободной энергии Гельмгольца равна работе, совершаемой системой при изотермическом процессе (формула (12.60)). При этом только часть внутренней энергии системы  $U$ , ее свободная энергия  $F$  ( $F = U - TS$ ), превращается в работу. Остальная часть внутренней энергии — **связанная энергия** ( $TS$ ) — не может быть превращена в работу. Чем больше будет энтропия системы  $S$ , тем меньше у нее будет запас свободной энергии, то есть меньшую работу сможет совершить система. Следовательно, внутренняя энергия обесценивается, ее качество (способность превращаться в другие виды энергии) с увеличением энтропии уменьшается.

Метод термодинамических потенциалов, созданный Гиббсом, позволяет получить из общих соображений, не вдаваясь во внутреннее строение систем, ряд важных термодинамических соотношений между различными физическими свойствами системы. Так, например, использование известной в математике независимости вторых смешанных производных от порядка дифференцирования приводит к связи между теплоемкостями при постоянном давлении  $c_p$  и объеме  $c_v$ , с коэффициентом теплового расширения  $(\partial V/\partial T)_p$  и изотермическим коэффициентом сжатия  $(\partial V/\partial p)_T$ .

Для замкнутой системы изменение энтропии  $\Delta S \geq 0$  (12.51), что в соответствии с формулами (12.56)–(12.59) приводит к тому, что термодинамические потенциалы  $F$  и  $G$  в такой системе уменьшаются и в состоянии равновесия принимают минимальные значения. Это позволяет с помощью формулы (12.54б) получить условия устойчивости систем

$$(\partial p/\partial V)_S < (\partial p/\partial V)_T < 0, c_p > c_v > 0.$$

#### 12.2.6. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МОЛЕКУЛЫ. ЗАКОН О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Число степеней свободы  $i$  в механике — это число независимых между собой возможных перемещений механической системы; оно зависит от числа материальных точек, образующих систему, а также от числа и характера наложенных на систему механических связей. За счет возбуждения таких степеней свободы у системы появляется энергия, в основном эта энергия будет представлять собой энергию кинетического движения.

Для свободной материальной точки  $i = 3$  — это степени свободы поступательного движения, которое для своего описания требует трех координат  $(x, y, z)$ , с этими степенями свободы связана кинетическая энергия поступа-

тельного движения. Число степеней свободы вращательного движения для материальной точки отсутствует ( $i = 0$ ), так как вращение материальной точки относительно взаимно перпендикулярных осей ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ), проходящих через нее, не вызывает ее перемещения в пространстве, то есть не требует дополнительной энергии.

Для твердого тела, которое может свободно перемещаться в пространстве, число степеней свободы равно шести. К трем степеням свободы поступательного движения центра масс тела прибавляются три степени свободы вращательного движения тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс — каждое такое вращение требует сообщения телу кинетической энергии. Как показывает эксперимент, с достаточной степенью точности можно рассматривать атом как материальную точку. Это позволяет оценить число степеней свободы молекулы, состоящей из нескольких атомов. Рассмотрим конкретные примеры.

### 1. Молекула, состоящая из одного атома.

$$i_{\text{пост}} = 3, i_{\text{вращ}} = 0, i = i_{\text{вращ}} + i_{\text{пост}} = 3. \quad (12.62)$$

Число степеней свободы равно трем, они соответствуют поступательному движению молекулы. Числа степеней свободы вращательного движения нет (рис. 12.11а).

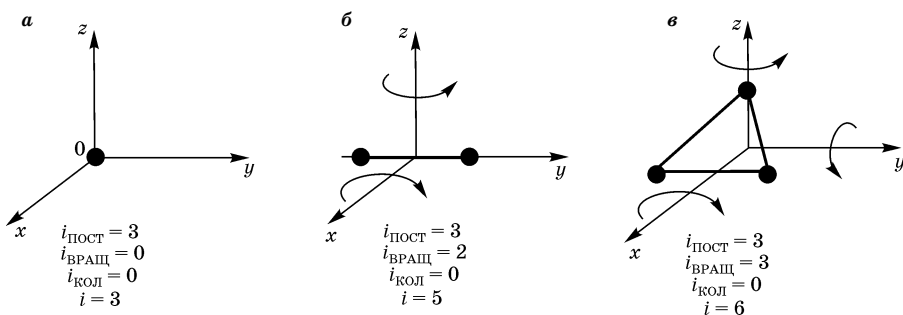


Рис. 12.11

### 2. Молекула, состоящая из двух атомов.

Молекула является жесткой (расстояние между атомами в ней не изменяется —  $l = \text{const}$ ), для нее число степеней свободы будет складываться из трех степеней свободы поступательного движения и двух степеней свободы вращательного движения:

$$i_{\text{пост}} = 3, i_{\text{вращ}} = 2, i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 2, i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 5. \quad (12.63)$$

В этом случае вращение вокруг оси, проходящей через ось молекулы (вокруг оси  $Oy$ , рис. 12.11б), теряет свой смысл — при таком вращении положение молекулы в пространстве не изменяется, и момент инерции такой молекулы относительно этой оси вращения равен нулю.

Нежесткая молекула — расстояние между атомами может изменяться (между атомами возникают силы упругости), тогда возможно колебательное

движение атомов в молекуле; оно будет происходить по гармоническому закону, при этом у атомов, помимо кинетической энергии, появляется и потенциальная энергия. Следовательно, такая молекула будет обладать шестью степенями свободы, причем одна из них будет соответствовать колебательной степени свободы:

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 2, \quad i_{\text{кол}} = 1, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6. \quad (12.64)$$

### 3. Многоатомная молекула (число молекул $N > 2$ ).

Для жесткой молекулы, как и для твердого тела, число степеней свободы равно шести — три степени свободы поступательного движения и три степени свободы вращательного движения относительно трех взаимно перпендикулярных осей (см. рис. 12.11а):

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6. \quad (12.65)$$

*Нежесткая молекула.* Между атомами действуют упругие силы, число степеней свободы для молекулы будет равно  $3N$ , из которых три степени свободы приходятся на поступательное движение, три степени свободы — на вращательное движение равновесной конфигурации молекулы и  $(3N - 6)$  степеней свободы — на колебательное движение:

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 3N - 6, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 3N. \quad (12.66)$$

Представляет интерес оценить, какая средняя энергия приходится на одну степень свободы любого вида движения. Максвелл сформулировал закон о равномерном распределении энергии хаотического теплового движения молекул по степеням свободы, согласно которому *на одну степень свободы поступательного и вращательного движения в среднем приходится энергия, равная  $kT/2$ , а на каждую степень свободы колебательного движения — энергия  $kT$ .*

Как уже было отмечено выше, возбуждение степени свободы колебательного движения молекулы требует сообщения кинетической и потенциальной энергии атомам молекулы. Известно, что при гармонических колебаниях среднее значение кинетической и потенциальной энергии совпадают, поэтому среднее значение энергии, приходящееся на одну степень свободы колебательного движения, удваивается.

Можно качественно показать справедливость этого закона. Действительно, из формулы (12.20) для средней энергии поступательного движения молекулы, участвующей в тепловом движении ( $\langle W_{\text{к.пост}} \rangle = 3kT/2$ ), и из равноправия поступательного движения по координатным осям ( $x, y, z$ ) следует, что на одну степень свободы поступательного движения приходится энергия, равная  $kT/2$ . Обобщая это утверждение на все степени свободы, Максвелл и сформулировал этот закон.

Итак, согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы, средняя энергия молекулы, участвующей в тепловом движении, определяется формулой

$$\langle W \rangle = \frac{kT}{2} (i_{\text{вращ}} + i_{\text{пост}}) + (kT) i_{\text{кол}}. \quad (12.67)$$



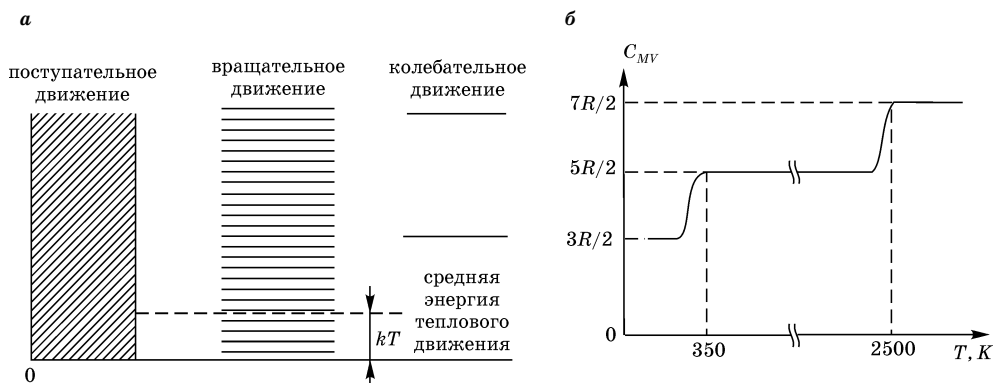


Рис. 12.12

Следует отметить, что этот закон является приближенным, это связано с квантованием энергии вращательного и колебательного движения молекул. В отличие от энергии поступательного движения, энергия которого принимает непрерывный набор значений (рис. 12.12а), энергии вращательного и колебательного движения молекул квантуются, то есть принимают дискретный набор значений. Причем расстояние между соседними уровнями энергии для колебательного движения существенно превышает расстояние между соседними уровнями энергии для вращательного движения ( $\Delta W_{(n,n+1) \text{ кол}} > \Delta W_{(n,n+1) \text{ вращ}}$ , рис. 12.12а).

Указанные особенности энергетического спектра молекул приводят к зависимости числа степеней свободы молекулы от температуры. Наглядным подтверждением этому являются экспериментально полученные зависимости теплоемкости идеальных газов от температуры.

Рассмотрим температурную зависимость молярной теплоемкости идеального газа  $c_{MV}$  при постоянном объеме ( $c_{MV} = iR/2$ , см. формулу (12.70 б)).

**1. Одноатомная молекула.** В области низких температур, превышающих температуру кипения (например для аргона она составляет 87,3 К), молекулы газа участвуют только в тепловом поступательном движении, для них число степеней свободы молекулы равно трем. При дальнейшем нагревании это число не изменяется, поэтому для одноатомного газа  $c_{MV} = 3R/2$ , что согласуется с экспериментом.

**2. Двухатомная молекула** (молекула водорода). При низких температурах ( $T > 30$  К) молекулы газа участвуют только в тепловом поступательном движении, поэтому  $c_{MV} = 3R/2$ . Это подтверждает экспериментальная зависимость  $c_{MV}$  от температуры для водорода (рис. 12.12б, температура кипения для водорода составляет 20,55 К).

В этой области температур энергии теплового движения еще недостаточно, чтобы возбудить вращательное и колебательное движение молекул.

При дальнейшем повышении температуры у молекул начинают возбуждаться вращательные степени свободы. При температуре  $T = 350$  К все молекулы принимают участие во вращательном движении, это приводит к плавному увеличению  $c_{MV}$  до значения  $5R/2$ .

Возбуждение колебательного движения в молекулах требует существенно большей энергии теплового движения, и только при температуре порядка 2500 К и выше начинается заметное участие молекул в колебательном тепловом движении и  $c_{MV}$  приближается к значению  $7R/2$ .

Итак, на температурной зависимости  $c_{MV}(T)$  имеются участки, на которых значение  $c_{MV}$  остается неизменным, и участки, где происходит рост  $c_{MV}$ .

Такое поведение теплоемкости газов находится в резком несоответствии с классической теорией теплоемкости газов, утверждающей независимость теплоемкости идеальных газов от температуры.

### 12.2.7. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗАКОНА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ. ПОЛИТРОПИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Запишем формулы, которые будут использоваться при рассмотрении изопроцессов в идеальном газе:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT, \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T, A_{12} = \int_1^2 p dV, Q_{12} = \Delta U + A_{12}; \quad (12.68 \text{ а})$$

$$c_M = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, pV = \nu RT = \frac{m}{M} RT. \quad (12.68 \text{ б})$$

К этим формулам добавлено уравнение состояния идеального газа (12.37) — уравнение Менделеева–Клапейрона.

**1. Изотермический процесс** ( $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $pV = \text{const}$ .

$$U = \frac{i}{2} \nu \cdot RT, \Delta U = \frac{i}{2} \nu \cdot R \Delta T = 0, A_{12} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{\nu \cdot RT}{V} dV = \nu \cdot RT \ln \frac{V_2}{V_1}, Q_{12V} = A_{12}; \quad (12.69 \text{ а})$$

$$c_{MT} = \frac{\delta Q_T}{\nu \cdot dT} = \infty, \Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q_T}{T} = \nu \cdot R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (12.69 \text{ б})$$

Отметим, что молярная теплоемкость при этом процессе равна бесконечности, так как любой подвод тепла идет на совершение газом работы, и при этом температура системы не изменяется.

**2. Изохорический процесс** ( $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $p/T = \text{const}$ .

$$U = \frac{i}{2} \nu \cdot RT, \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} \nu V \Delta P = \nu c_{MV} \Delta T, A_{12} = \int_1^2 p dV = 0, Q_{12V} = \Delta U_{12}; \quad (12.70 \text{ а})$$

$$c_{MV} = \frac{\delta Q_V}{\nu \cdot dT} = \frac{dU}{\nu \cdot dT} = \frac{i}{2} \cdot \frac{\nu R dT}{\nu dT} = \frac{i}{2} R; \quad (12.70 \text{ б})$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q_V}{T} = \frac{i}{2} \nu \cdot R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \nu \cdot R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} \nu \cdot R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (12.70 \text{ в})$$

**3. Изобарический процесс** ( $p = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $V/T = \text{const}$ .

$$U = \frac{i}{2} \nu \cdot RT, \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V = \nu c_{MV} \Delta T, A_{12} = \int_1^2 p dV = p \Delta V = \nu \cdot R \Delta T; \quad (12.71 \text{ а})$$

$$Q_{12P} = \Delta U_{12} + A_{12}; \quad (12.71 \text{ б})$$

$$c_{MV} = \frac{\delta Q_V}{\nu \cdot dT} = \frac{dU_{12} + \delta A_{12}}{\nu \cdot dT} = \frac{(i/2) \nu \cdot R dT + \nu \cdot R dT}{\nu \cdot dT} = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R; \quad (12.71 \text{ в})$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q_P}{T} = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu \cdot R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu \cdot R \ln \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu \cdot R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.71 \text{ г})$$

Отметим, что разность теплоемкостей  $c_{MP}$  и  $c_{MV}$  для идеального газа составляет

$$c_{MP} - c_{MV} = R. \quad (12.72)$$

Это уравнение получило название **уравнения Майера**.

**4. Адиабатический процесс** (изоэнтропийный процесс,  $S = \text{const}$ ) — это процесс, происходящий в системе без теплообмена с внешними телами, или это изоэнтропийный процесс, при его протекании энтропия системы не изменяется.

$$U = \frac{i}{2} \nu \cdot RT, \Delta U = \frac{i}{2} \nu \cdot R \Delta T = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), A_{12} = -\Delta U_{12}, Q_{12} = 0; \quad (12.73 \text{ а})$$

$$c_{MS} = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT} = 0, \Delta S_{12} = 0. \quad (12.73 \text{ б})$$

Выведем формулу уравнения адиабатического процесса:

$$dU + \delta A = 0, \nu \cdot c_{MV} dT + p dV = 0, pV = \nu \cdot RT \Rightarrow d(pV) = p dV + V dp = \nu \cdot R dT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dT = \frac{1}{\nu R} (p dV + V dp), \frac{c_{MV}}{R} (p dV + V dp) + p dV = 0,$$

$$\left( \frac{c_{MV}}{R} + 1 \right) p dV + \frac{c_{MV}}{R} V dp = 0 \times \frac{1}{pV} \Rightarrow \frac{c_{MV} + R}{c_{MV}} \cdot \frac{dp}{p} = 0,$$

$$\gamma \cdot d(\ln V) + d(\ln p) = 0, d(\ln(pV^\gamma)) = 0 \Rightarrow pV^\gamma = \text{const}.$$

Итак, уравнение адиабаты в параметрах состояния ( $p$ ,  $V$ ) принимает вид

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (12.74 \text{ а})$$

а для других параметров идеального газа запишется таким образом:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}. \quad (12.74 \text{ б})$$

При выводе был введен коэффициент Пуассона  $\gamma$ , который равен отношению молярной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении к молярной теплоемкости газа при постоянном объеме:

$$\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{i+2}{i}, \quad (12.75)$$

он выражается через число степеней свободы молекулы идеального газа.

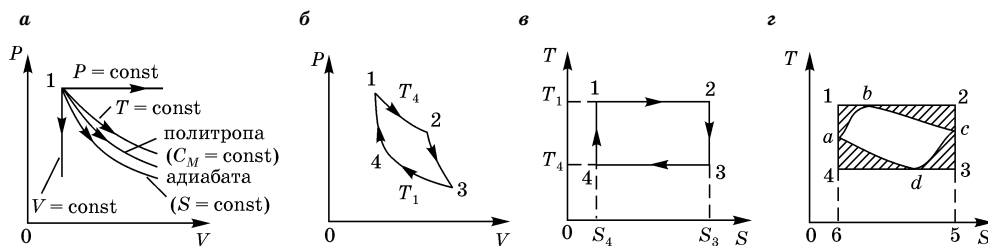


Рис. 12.13

В координатах  $(p, V)$  адиабата изменяется более резко, чем изотерма, так как коэффициент Пуассона  $\gamma$  больше единицы ( $\gamma > 1$ , рис. 12.13а).

Использование уравнения адиабаты, помимо формулы (12.73 а), позволяет получить следующую формулу для работы идеального газа при адиабатическом процессе:

$$A_{12} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{p_1 V_1^\gamma dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (12.76)$$

**5. Политропический процесс.** Это процесс, при протекании которого теплоемкость системы остается постоянной ( $c_M = \text{const}$ ). Уравнение политропы здесь не выводится, но его можно найти по аналогии с выводом уравнения адиабаты (12.74 а), при этом необходимо записать уравнение первого закона термодинамики в следующем виде:

$$\delta Q = \nu \cdot c_M dT = dU + \delta A.$$

Уравнение политропы имеет вид:

$$pV^\beta = \text{const}, \quad \beta = \frac{c_{MP} - c_M}{c_{MV} - c_M}, \quad (12.77)$$

где  $\beta$  — показатель политропы.

Все рассмотренные выше процессы относятся к политропным. Для них показатель политропы принимает следующие значения: 1) изотермический процесс  $c_M = \infty \Rightarrow \beta = 1$ ; 2) изохорический процесс  $c_M = c_{MV} \Rightarrow \beta = \infty$ ; 3) изобарический процесс  $c_M = c_{MP} \Rightarrow \beta = 0$ ; 4) адиабатический процесс  $c_M = 0 \Rightarrow \beta = c_{MP}/c_{MV} = \gamma$ .

Графики изопроцессов приведены на рис. 12.13а.

Политропные процессы широко используются в технической термодинамике при исследовании термодинамических рабочих циклов тепловых двигателей.

#### 12.2.8. КПД ИДЕАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ДВИГАТЕЛЯ. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИИ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

**КПД идеального теплового двигателя.** Если взять круговые процессы, для которых разность между максимальной и минимальной температурой будет одинаковой, то среди них максимальный КПД будет у теплового двигателя, работающего по циклу Карно. Такой двигатель назвали идеальным.

Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат, его графики в координатах  $(p, V)$  и  $(T, S)$  приведены на рис. 12.13б, в.

Рассчитаем КПД идеального теплового двигателя. Для этого выделим отдельные вклады в изменение энтропии рабочего тела (газ) и учтем, что изменение энтропии рабочего тела (газа) на замкнутом цикле равно нулю:

$$\Delta S_{\text{круг}} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = \int_1^2 \frac{\delta Q_T}{T} + 0 + \int_3^4 \frac{\delta Q_T}{T} + 0 = \frac{Q_{\text{н}}}{T_{\text{н}}} + \frac{Q_{\text{охл}}}{T_{\text{охл}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{Q_{\text{охл}}}{Q_{\text{н}}} \right| = \frac{T_{\text{охл}}}{T_{\text{н}}} \Rightarrow \eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{|Q_{\text{охл}}|}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{T_{\text{охл}}}{T_{\text{н}}}. \quad (12.78)$$

Покажем, что КПД цикла Карно является наибольшим. Для этого в координатах  $(T, S)$  приведем графики произвольного замкнутого цикла и цикла Карно (рис. 12.13г). Для этих циклов максимальные температуры нагревателя и охладителя совпадают. Тогда тепло, полученное от нагревателя и отданное охладителю, в цикле Карно:

$$Q_{\text{нагр}} = \int_1^2 T_1 dS = T_1(S_2 - S_1) > 0, \quad Q_{\text{охл}} = \int_3^4 T_3 dS = T_3(S_4 - S_3) < 0.$$

Эти количества теплоты в координатах  $(T, S)$  представляют собой площади прямоугольников 1–2–5–6–1 ( $Q_{\text{нагр}}$ ) и 3–4–6–5 ( $Q_{\text{охл}}$ ).

КПД произвольного цикла и цикла Карно определяются формулами:

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{|Q_{\text{охл}}|}{Q_{\text{нагр}}}, \quad \eta = 1 - \frac{|Q'_{\text{охл}}|}{Q'_{\text{нагр}}},$$

в которых

$$Q'_{\text{нагр}} = Q_{\text{нагр}} - q_1, \quad Q'_{\text{охл}} = Q_{\text{охл}} + q_2,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — площади фигур, ограниченных прямоугольником и произвольным циклом

$$q_1 = a1b + b2c, \quad q_2 = c3d + d4a.$$

Тогда КПД для произвольного цикла можно записать в следующем виде:

$$\eta = 1 - \frac{|Q'_{\text{охл}}|}{Q'_{\text{нагр}}} = \frac{Q_{\text{нагр}} - q_1 - |Q_{\text{охл}} + q_2|}{Q_{\text{нагр}} - q_1}, \quad Q_{\text{нагр}} = |Q_{\text{охл}}| = \eta_{\text{Карно}} Q_{\text{нагр}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\eta_{\text{Карно}} Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{охл}}| - q_1 - q_2}{Q_{\text{нагр}} - q_1} = \eta_{\text{Карно}} - \frac{q_1}{Q_{\text{нагр}} - q_1} (1 - \eta_{\text{Карно}}) - \frac{|q_2|}{Q_{\text{нагр}} - q_1}.$$

Второе и третье слагаемые в полученной формуле будут положительными, это означает, что  $\eta < \eta_{\text{Карно}}$ . Равенство будет наблюдаться только в том случае, если произвольный цикл будет совпадать с циклом Карно.

**Расчет изменения энтропии для произвольного неравновесного процесса перехода системы из одного состояния в другое.** Если необходимо рассчитать изменение энтропии произвольного неравновесного процесса перехода системы (идеальный газ) из одного состояния (параметры состояния  $p_1, V_1$ )

в другое (параметры состояния  $p_2, V_2$ ), следует использовать тот факт, что энтропия является функцией состояния системы, и рассчитать изменение энтропии для равновесного процесса перехода. Выбирается процесс, состоящий из нескольких изопроцессов (например изобарический 1–3 и изохорический 3–2, рис. 12.14), что позволяет использовать формулы, приведенные в п. 12.2.4 при  $V_3 = V_2, p_3 = p_1$ :

$$\Delta S_{12\text{равн}} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (12.79)$$

Если в процессе теплообмена системы с внешними телами в ней происходит нагревание (охлаждение), плавление (кристаллизация) вещества, превращение жидкости в пар (или конденсация), то необходимые для расчета

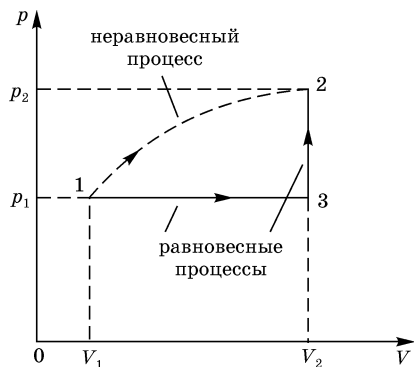


Рис. 12.14

изменения энтропии  $\Delta S$  и количество теплоты  $Q$  рассчитываются по формулам (12.43), (12.44).

В качестве примера рассмотрим процесс, происходящий в системе за счет теплообмена с внешними телами — процесс нагревания льда массы  $m$  от температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$  (при этой температуре лед превращается в воду:  $T_1 < 273 \text{ К}$ ,  $T_2 > 273 \text{ К}$ ). Тогда для расчета изменения энтропии системы используем равновесные процессы и рассчитываем  $\Delta S$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{равн}} &= \Delta S_{\text{нагрева льда}} + \Delta S_{\text{плавл}} + \Delta S_{\text{нагрева воды}} = \\ &= \int_{T_1}^{273} \frac{\delta Q_{\text{нагрева}}}{T} + \frac{Q}{273} + \int_{273}^{T_2} \frac{\delta Q_{\text{нагрева}}}{T} = c_{\text{льда}} m \ln \frac{273}{T_1} + \frac{m\lambda}{273} + c_{\text{воды}} m \ln \frac{T_2}{273}. \end{aligned} \quad (12.80)$$

**Расчет изменения энтропии замкнутой системы для процесса расширения идеального газа в пустоту.** Покажем, что протекание неравновесного процесса в замкнутой системе приводит к возрастанию энтропии системы. Для этого рассмотрим процесс расширения газа в пустоту. Пусть в первоначальном состоянии в одной половине цилиндра, разделенного неподвижным поршнем на две равные части, находится идеальный газ, термодинамические параметры которого равны  $T, P$  и  $V$  (равновесное состояние 1), а в другой половине цилиндра создан вакуум. Если поршень отпустить, то состояние газа будет уже неравновесным, газ начинает расширяться, занимая в итоге весь объем цилиндра. При таком расширении работа газа равна нулю (внешнее давление на поршень отсутствует, трением при движении поршня можно пренебречь). После расширения начинается процесс перехода (процесс релаксации) газа из неравновесного состояния в равновесное состояние 2. В конечном состоянии термодинамические параметры состояния газа будут равны  $T, P/2$  и  $2V$ . Это следует из того, что для замкнутой системы теплообмен отсутствует и поэтому внутренняя энергия газа не изменяется:

$$Q_{12} = \Delta U + A_{12} \Rightarrow \Delta U = 0, U_2 = \frac{i}{2} \nu R T_2 = \frac{i}{2} p_2 V_2 = U_1 = \frac{i}{2} \nu R T_1 = \frac{i}{2} p_1 V_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1 = T_2, p_2 = p_1 / 2.$$

Энтропия является функцией состояния системы, поэтому она не зависит от пути перехода из состояния 1 в состояние 2. Это позволяет для расчета изменения энтропии использовать процесс равновесного перехода из состояния 1 в состояние 2. В данном случае это будет изотермический процесс, так как температуры газа в состоянии 1 и 2 одинаковы:

$$\Delta S_{12 \text{ неравн}} = \Delta S_{12 \text{ равн}} = \nu R \ln(V_2/V_1) = \nu R \ln 2 > 0,$$

что и требовалось показать.

#### 12.2.9. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОНЯТИЯ ЭНТРОПИИ. ОЦЕНКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАВНОВЕСНОГО И РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЙ

**Энтропия системы с точки зрения статистической физики.** Итак, в термодинамике было выяснено, что энтропия определяет направление протекания процессов в замкнутых системах.

В статистической физике энтропия системы раскрывается с другой стороны, ее можно связать с тепловым движением молекул. Рассуждения при этом будут следующими.

Если система самопроизвольно переходит из неравновесного состояния в равновесное, то это означает, что она самопроизвольно переходит из состояний менее вероятных в состояния более вероятные, причем равновесное состояние обладает наибольшей вероятностью, так как в нем система может находиться сколь угодно долго при неизменных внешних условиях.

Следовательно, *необратимость процессов связана с переходом системы из состояний менее вероятных в состояния более вероятные*. Конечно, возможно протекание и обратных процессов, при которых система переходит из более вероятных состояний в менее вероятные, но вероятность осуществления таких процессов чрезвычайно мала. Так, например, с точки зрения молекулярной физики стакан, который упал со стола и разбился, имеет не равную нулю вероятность подняться на стол и стать снова целым. Но вероятность такого процесса будет чрезвычайно малой, и на практике такие процессы не наблюдаются.

Для того чтобы количественно оценить вероятность различных состояний системы, вводят понятие **термодинамической вероятности (статистического веса)  $\Omega$**  — это числа микросостояний системы, которые соответствуют данному макросостоянию системы. Причем по определению  $\Omega \geq 1$ .

В статистической физике принята гипотеза о том, что все микросостояния данной системы являются равновероятными. Это означает, что *вероятность макросостояния пропорциональна ее термодинамической вероятности  $\Omega$* .

Молекулы, участвуя в тепловом движении, со временем хаотично движутся и непрерывно изменяют свои координаты и скорости. Поэтому данному макросостоянию системы будет соответствовать чрезвычайно большое

число микросостояний, которое не так просто оценить. Это будет сделано в разделе, посвященном физике твердого тела (см. п. 13.3.2).

Относительно термодинамической вероятности  $\Omega$  можно отметить следующее. Аналогично энтропии:

- возрастает при переходе замкнутой системы из неравновесного состояния в состояние равновесия;
- является наибольшей в состоянии равновесия;
- является функцией состояния системы.

Также характеризует степень хаотичности в движении молекул по координатам и скоростям и, в отличие от энтропии, является мультипликативной функцией состояния системы, то есть для системы, состоящей из двух не взаимодействующих подсистем равна произведению термодинамических вероятностей этих подсистем ( $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ ).

Энтропия же является аддитивной функцией состояния системы, то есть энтропия системы, состоящей из двух не взаимодействующих частей, равна сумме энтропий этих частей ( $S = S_1 + S_2$ ).

Сравнивая свойства энтропии и термодинамической вероятности, можно заметить между ними много общего. Больцман показал, что введенное в термодинамике понятие энтропии связано с термодинамической вероятностью формулой

$$S = k \ln \Omega, \quad (12.81)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Отметим, что входящее в формулу выражение  $\ln \Omega$  так же, как и энтропия, является аддитивной величиной.

Записанная формула раскрывает статистический смысл энтропии, а именно *энтропия системы является мерой хаотичности в движениях молекул по координатам и скоростям*. Формула (12.81) позволяет также провести оценку энтропии для неравновесных состояний.

Приведем формулировку второго начала термодинамики с точки зрения статистической физики — *в замкнутой системе вероятнее всего протекают процессы с увеличением энтропии, процессы с уменьшением энтропии маловероятны*. Эта формулировка носит вероятностный смысл — она не запрещает протекание процессов, происходящих с уменьшением энтропии, они могут протекать в замкнутой системе, но они будут маловероятными.

**Оценка термодинамической вероятности неравновесного и равновесного состояний.** Покажем справедливость формулы (12.81). Для этого рассмотрим изотермическое расширение идеального газа от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Так как процесс происходит изотермически, то это означает, что распределение молекул по скоростям не изменяется (это распределение является распределением Максвелла и определяется только температурой и массой молекул). Тогда изменение энтропии и термодинамической вероятности будет связано с изменением распределения молекул по координатам.

Произвольная молекула при хаотичном тепловом движении независимо от других молекул может находиться в любой точке объема, занимаемого газом. Поэтому вероятность найти молекулу в любой точке пространства,



занимаемого газом, будет пропорциональна объему газа, а для всех молекул — произведению этих объемов ( $\Omega \sim V^N$ ,  $N$  — число молекул).

Возьмем натуральный логарифм отношения двух термодинамических вероятностей для конечного и начального состояний газа:

$$\ln(\Omega_2 / \Omega_1) = \ln \Omega_2 - \ln \Omega_1 = \ln(V_2^N / V_1^N) = N \ln(V_2 / V),$$

где входящий в формулу коэффициент пропорциональности сокращается (он при изотермическом расширении идеального газа не изменяется).

В соответствии с формулой для изменения энтропии при изотермическом процессе (12.69 б)

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \nu \cdot R \ln \frac{V_2}{V_1} = kN \ln(V_2 / V_1).$$

Сопоставление записанных формул для изменения энтропии и термодинамической вероятности и приводит к формуле (12.81).

Приведем доводы, поясняющие, что в состоянии равновесия наблюдается наибольший хаос в движении молекул по координатам и скоростям, то есть ему соответствует наибольшая термодинамическая вероятность. Для этого обсудим снова пример расширения газа в пустоту (см. п. 12.2.4). Сравним два состояния газа в замкнутом сосуде. В начальном состоянии газ занимает только половину объема системы (в другой половине сосуда — вакуум, такое состояние системы при освобождении поршня будет неравновесным), а в конечном состоянии газ занимает весь объем (равновесное состояние). Учтем, что температура газа остается постоянной.

Для изотермического процесса термодинамическая вероятность будет пропорциональна объему, занимаемому системой, то есть  $\Omega \sim V^N$  (где  $N$  — число молекул, см. пояснение к формуле (12.81)). Тогда

$$\frac{\Omega_{\text{равн}}}{\Omega_{\text{неравн}}} = \frac{(V)^N}{(V/2)^N} = 2^N.$$

Так как для обычных систем число молекул составляет порядка  $N \sim 10^{20}$ , то вполне понятно, что вероятность неравновесного состояния чудовищно мала (она меньше в  $2^{10^{20}}$  раз вероятности равновесного состояния) по сравнению с вероятностью равновесного состояния. Поэтому система самопроизвольно будет переходить в равновесное состояние, а обратный процесс, при котором все молекулы соберутся в одной половине сосуда, практически никогда в реальных условиях не реализуется.

### 12.2.10. ФЛУКТУАЦИИ.

#### ТРЕТИЙ ЗАКОН (НАЧАЛО) ТЕРМОДИНАМИКИ

**Флуктуации.** Согласно молекулярной физике, которая придает вероятностный характер протеканию процессов в системе, в состоянии равновесия в замкнутой системе возможно протекание процессов, при которых в разных частях ее объема энтропия может убывать, хотя в среднем для всей системы она остается постоянной. Это приводит к тому, что в разных частях системы

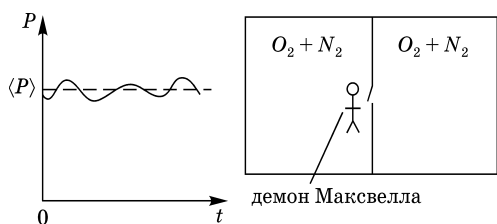


Рис. 12.15

наблюдаются отклонения термодинамических параметров системы от их средних значений, наблюдаются флуктуации этих параметров (это могут быть отклонения концентрации, температуры, давления и т. д.).

*Под флуктуациями понимают отклонения термодинамических*

*параметров системы от их средних значений на основе теплового движения молекул.* Так, например, давление идеального газа в состоянии равновесия в среднем остается постоянным. Однако со временем оно будет изменяться, флуктуировать (рис. 12.15а). Это связано с тем, что в данный момент времени о стенку ударяется разное число молекул, что и приводит к отклонению давления от его среднего значения.

Для количественного описания флуктуаций вводится дисперсия (квадратичная флуктуация)  $\sigma_x^2$ , то есть средний квадрат отклонения величины  $x$  от среднего значения  $\langle x \rangle$ :  $\sigma_x^2 = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , абсолютная  $\sigma_x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$  и относительная  $\delta_x = \sigma_x / \langle x \rangle$  флуктуации.

При большом числе  $N$  частиц системы описывающие ее физические величины (давление, температура, концентрация молекул) практически не отклоняются от своих средних статистических значений. Это связано с тем, что относительные флуктуации  $\delta_x$  будут пропорциональны  $1/\sqrt{N}$ . Так, например, число молекул (число Лошмидта) идеального газа в объеме  $V = 1 \cdot 10^6 \text{ м}^3$  при нормальных условиях равно  $N_{\text{Л}} = 2,68 \cdot 10^{19}$ , что приводит к относительной флуктуации, равной  $\delta_x \sim 2 \cdot 10^{-10}$ .

Однако для малых объемов системы флуктуации могут быть достаточно большими и будут приводить к наблюдаемым эффектам. Например, голубой цвет неба связан с молекулярным рассеянием света на флуктуациях плотности воздуха. При этом интенсивность рассеянного света прямо пропорциональна четвертой степени частоты падающего излучения (закон Рэля, см. п. 7.4.3). Поэтому наиболее интенсивно будет рассеиваться коротковолновая часть видимого диапазона излучения (белого света), что и приводит к голубому цвету неба.

Действительно, при рассмотрении процессов рассеяния видимого света необходимо выбирать объемы, линейные размеры которых сопоставимы с длиной волны проходящего атмосферу излучения:  $\Delta V \approx \lambda^3 = (5 \cdot 10^{-7} \text{ м})^3 \approx 1 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3$ . Такой объем воздуха содержит число молекул, равное примерно  $N \approx 3 \cdot 10^6$ , что дает для относительной флуктуации концентрации молекул значение  $\delta_n \approx 6 \cdot 10^{-4} = 0,06\%$ . Такая относительная флуктуация является достаточно большой, что и вызывает изменение частотного состава проходящего атмосферу видимого света.

Другим примером проявления флуктуаций являются «шумы» в радиотехнических системах, под ними понимают случайные изменения (колебания) силы тока, напряжения, связанные с хаотическим движением электронов внутри металла. Частотный спектр этого шума охватывает всевозможные значе-

ния частот от нуля и выше, что приводит к уменьшению чувствительности радиоаппаратуры. При комнатной температуре интенсивность тепловых шумов остается постоянной до частот  $\nu \sim 10^{12}$  Гц.

**Демон Максвелла.** При развитии термодинамики в связи с ее статистическим обоснованием возникла дискуссия о возможности обойти второе начало термодинамики с помощью флуктуаций. Одним из рассматриваемых в то время примеров, позволяющих обойти второй закон термодинамики, был следующий. Внутри системы, разделенной на две части перегородкой, находилась смесь двух газов (например азота и кислорода). Там же находился демон Максвелла — гипотетическое разумное существо, которое могло использовать флуктуации плотности газов для его разделения (рис.12.15б). В перегородке было отверстие с крышкой. Когда к отверстию подлетала порция газа, в которой было больше кислорода, демон открывал отверстие и пропускал эту порцию газа и соответственно не пропускал порцию газа, где было больше азота.

Работая таким образом достаточно долго, демон мог обойти второе начало термодинамики, то есть разделить газы в замкнутой системе. Однако если бы демон был маленьким, то он сам бы испытывал флуктуации и не смог бы открыть крышку в нужное время. Если бы он был большим, то он не чувствовал бы эти флуктуации. Таким образом, с помощью флуктуаций нельзя нарушить второй закон термодинамики.

**Третье начало термодинамики.** Оно вытекает из формулы (12.81) для энтропии. Известно, что при температуре, равной абсолютному нулю температур ( $T = 0$  К), тепловое движение будет отсутствовать и за счет действия сил потенциального поля система занимает только одно возможное состояние — состояние с минимальной энергией. Поэтому термодинамическая вероятность будет равна единице (этому состоянию соответствует только одно микросостояние), и в соответствии с формулой (12.81) можно записать:

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega = k \ln 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(T = 0 \text{ К}) = 0. \end{aligned} \quad (12.82)$$

Итак, третий закон термодинамики формулируется таким образом — **энтропия системы при абсолютном нуле температур равна нулю.**

Существуют другие, эквивалентные, формулировки третьего закона термодинамики: 2) *абсолютный ноль температур недостижим*; 3) *за конечное число шагов нельзя достичь абсолютного нуля температур*.

Эквивалентность этих формулировок можно показать на примере получения низких температур с помощью процессов адиабатического размагничивания.

**Адиабатическое размагничивание.** Адиабатическое размагничивание используют для достижения сверхнизких температур. Для этого берут парамагнетик, в котором можно выделить две подсистемы — решетку атомов и систему магнитных моментов атомов. Между ними существует взаимосвязь, они могут обмениваться энергией. Общую энтропию парамагнетика можно представить как сумму энтропий решетки атомов и системы магнитных моментов атомов.

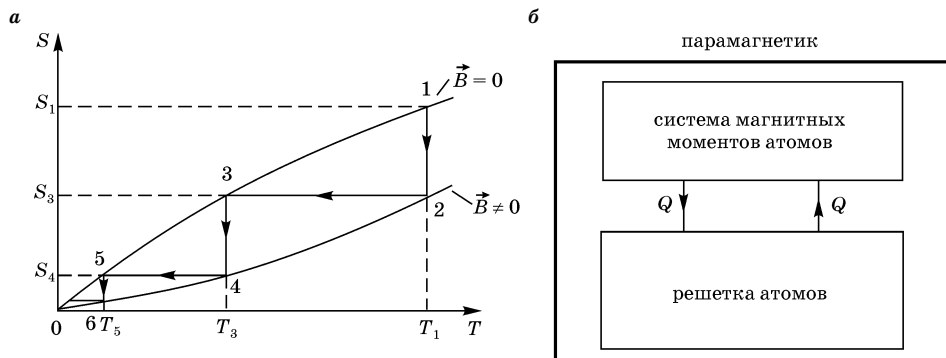


Рис. 12.16

На рис. 12.16 показано, как изменяется энтропия парамагнетика в отсутствие ( $\vec{B} = 0$ , кривая 1–3–5–0) и при наличии внешнего магнитного поля ( $\vec{B} \neq 0$ , кривая 2–4–6–0).

Эти две кривые сходятся в нуле, так как согласно третьему началу термодинамики энтропия системы при нуле градусов Кельвина равна нулю как в присутствии, так и в отсутствии магнитного поля.

Рассмотрим процесс адиабатического размагничивания. Пусть сначала парамагнетик находится в состоянии 1 в отсутствии магнитного поля —  $\vec{B} = 0$  (рис. 12.16a). Поддерживая температуру парамагнетика постоянной, включают магнитное поле —  $\vec{B} \neq 0$ . При этом магнитные моменты атомов будут ориентироваться вдоль внешнего магнитного поля, что приводит к понижению энтропии системы магнитных моментов и выделению теплоты. Эта теплота отводится от парамагнетика за счет охлаждения его жидким гелием, поэтому температура парамагнетика не изменяется. Парамагнетик изотермически переходит в состояние 2, которое находится на кривой  $\vec{B} \neq 0$ .

Затем отключают в отсутствие теплообмена между парамагнетиком и внешней средой (адиабатически замкнутая система) магнитное поле. В этом случае состояние системы магнитных моментов будет неравновесным — магнитного поля нет, а они ориентированы вдоль магнитного поля. Поэтому происходит процесс перехода системы магнитных моментов в состояние равновесия. При этом энтропия системы магнитных моментов должна увеличиться, на это требуется энергия ( $\delta Q = T_1 dS$ ), которая забирается у решетки атомов. Вследствие этого температура парамагнетика падает ( $T_2 \rightarrow T_3$ ,  $T_3 < T_2$ ), и он переходит в состояние 3.

При дальнейшем охлаждении парамагнетика изменение температуры  $\Delta T$  будет становиться все меньше и меньше:  $(T_1 - T_3) > (T_3 - T_5) > \dots$ , так как две кривые для энтропии при отсутствии внешнего магнитного поля ( $\vec{B} = 0$ ) при его наличии ( $\vec{B} \neq 0$ ) сходятся в нулевой точке ( $T = 0$  К). Это означает, что за конечное число шагов температуру в ноль градусов Кельвина достичь нельзя. Это и утверждает формулировка третьего начала термодинамики.

## 12.2.11. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

### 12.2.11.1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА. ЛИНЕЙНАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

В классической термодинамике рассматриваются равновесные состояния и равновесные (бесконечно медленные) процессы. Для практики же представляет большой интерес изучение неравновесных процессов обмена между системой и внешними телами, протекающих с конечной скоростью.

Задача количественного описания таких процессов является довольно сложной. Наиболее разработанной является теория необратимых процессов, происходящих в открытой системе при малых ее отклонениях от положения равновесия. Этот раздел называют линейной неравновесной термодинамикой.

При малом отклонении системы от состояния равновесия можно разбить весь ее объем на малые элементы объема (они содержат макроскопическое число частиц), в пределах которых термодинамические параметры принимают вполне определенные значения (локальные термодинамические параметры). Вследствие этого для всей системы можно применять понятие термодинамических параметров, но они теперь будут зависеть от времени и координат этих элементов объема внутри системы.

К явлениям переноса относят необратимые процессы, в результате которых в системе происходит пространственный направленный перенос какой-либо физической величины (электрического заряда, массы, импульса, энергии и т. д.) на основе теплового движения частиц.

Запишем общее уравнение, которое описывает явления переноса в различных средах (газах, жидкостях и твердых телах).

Рассмотрим самый простой случай явлений переноса, когда в пространстве вдоль оси  $\vec{r}$  создано неравномерное распределение какого-либо параметра  $a$  системы (концентрация, температура, скорость движения различных слоев и т. д.).

Создадим на двух противоположных стенках системы разные значения параметра  $a$  ( $a_2 > a_1$ , рис. 12.17а), которые за счет действия внешних сил будут оставаться постоянными, тогда в пространстве возникнет стационарное

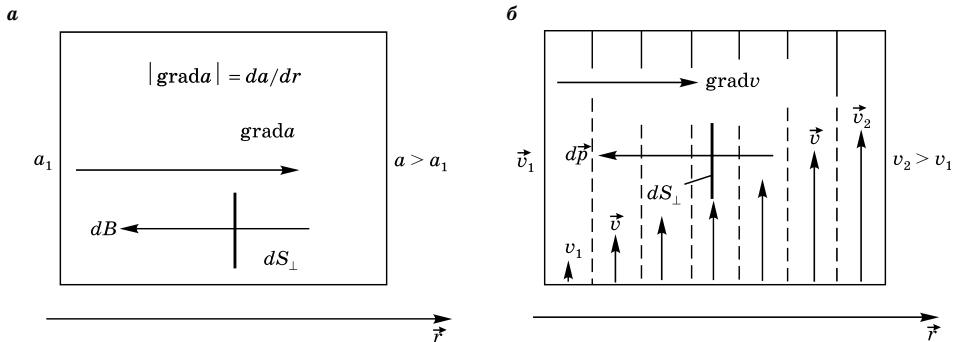


Рис. 12.17

распределение величины  $a$  (оно со временем не изменяется). Данное распределение можно описать вектором градиента величины  $a$ , модуль которого вдоль оси  $\vec{r}$  будет равен  $(da/dr)$ . В таких условиях в системе возникает направленный перенос (поток) другой физической величины  $B$ , причем он будет стационарным, то есть не будет зависеть от времени.

За время  $dt$  через площадку  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно к оси  $\vec{r}$  (см. рис. 12.17а), будет перенесено количество  $dB$  величины  $B$ , причем значение  $dB$  будет прямо пропорционально градиенту  $da/dr$ , времени переноса  $dt$  и площади площадки  $dS_{\perp}$ ; это позволяет записать следующую формулу:

$$dB = -\beta \frac{da}{dr} dS_{\perp} dt. \quad (12.83)$$

Формула (12.83) представляет собой общую форму записи уравнения для явлений переноса. Входящий в уравнение параметр  $\beta$  называют коэффициентом переноса.

Физический смысл коэффициента переноса можно определить так:

$$\beta = \frac{dB}{\left| \frac{da}{dr} \right| dS_{\perp} dt} \Rightarrow \beta = dB, \frac{da}{dr} = 1, dS_{\perp} = 1 \text{ м}^2, dt = 1 \text{ с}, \quad (12.84)$$

то есть коэффициент переноса  $\beta$  численно равен величине  $dB$ , перенесенной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению переноса величины  $B$ , при единичном градиенте величины  $a$ .

Отметим, что направления вектора градиента величины  $a$  и направление переноса величины  $B$  будут в этом случае противоположными (см. рис. 12.17а), что приводит к знаку минус в формуле (12.83).

Рассмотрим конкретные примеры явлений переноса.

**1. Явление диффузии.** В этом случае неравномерно распределена в пространстве плотность ( $a = \rho$ ) вещества (или концентрация  $n$ ), поэтому происходит перенос массы вещества ( $B = M$ ):

$$dM = -D \frac{d\rho}{dr} dS_{\perp} dt. \quad (12.85)$$

Это уравнение диффузии, или уравнение Фика, а коэффициент  $D$  — коэффициент диффузии.

Различают диффузию и самодиффузию. Под первой понимают процессы выравнивания концентраций (плотности) в смеси нескольких веществ, когда выравниваются концентрации для отдельных веществ в смеси по всему объему, занимаемому системой. Под явлением самодиффузии понимают процессы выравнивания концентрации (плотности) для одного вещества.

**2. Явление теплопроводности.** Температура противоположных стенок системы поддерживается различной ( $a = T$ ), поэтому возникает перенос тепла ( $B = Q$ ):

$$dQ = -K \frac{dT}{dr} dS_{\perp} dt. \quad (12.86)$$

Это уравнение теплопроводности или уравнение Фурье, а коэффициент  $K$  — коэффициент теплопроводности.

**3. Явление внутреннего трения (явление вязкости).** В системе создается, например, направленное движение газа (жидкости) вдоль стенок сосуда (см. рис. 12.17б). Распределение скорости  $\vec{v}$  направленного движения  $\vec{v}$  по сечению будет неравномерным. Если разбить объем газа (жидкости) на отдельные слои, то их скорость будет разной — вблизи стенки она будет наименьшей, а вдали от нее наибольшей.

Молекулы каждого слоя движутся вместе с ним со скоростью направленного движения  $\vec{v}$  и одновременно участвуют в тепловом движении. За счет теплового движения молекулы будут переходить из одного слоя в другое, при этом происходит перенос импульса направленного движения ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ), а на границе слоев возникают силы трения, которые тормозят движение более быстрого слоя и увеличивают скорость более медленного слоя.

В явлении вязкости в пространстве неравномерно распределяется скорость направленного движения слоев газа ( $a = v$ ), вследствие чего происходит перенос импульса направленного движения ( $B = p$ ):

$$dp = -\eta \frac{dv}{dr} dS_{\perp} dt; \quad (12.87 \text{ а})$$

$$dF_r = -\eta \frac{da}{dr} dS_{\perp}. \quad (12.87 \text{ б})$$

В формулах (12.87) коэффициент  $\eta$  называют коэффициентом вязкости. Уравнение внутреннего трения или вязкости записывают, вводя в него силы внутреннего трения  $dF_r = dp/dt$ , которые препятствуют движению слоев газа относительно друг друга.

**4. Закон Ома в дифференциальной форме.** Известно, что электроны внутри металла образуют газ свободных электронов, участвующих в тепловом движении. Для создания электрического тока (явления направленного переноса заряда) внутри металла создается внешнее электрическое поле, разность потенциалов. Тогда величина  $a$  равна потенциалу  $\varphi$  ( $a = \varphi$ ), а в пространстве происходит перенос заряда  $q$  ( $B = q$ ):

$$dq = -\sigma \frac{d\varphi}{dr} dS_{\perp} dt. \quad (12.88)$$

Эту формулу можно переписать в виде закона Ома в дифференциальной форме

$$I = dq/dt, \quad j = I/S, \quad \vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где коэффициент  $\sigma$  — удельная проводимость (см. формулу (3.31)).

**5. Линейная неравновесная термодинамика.** Как уже отмечалось, явления переноса рассматриваются в линейной термодинамике неравновесных процессов. Предполагается линейная зависимость возникающих потоков  $J_i$  от термодинамических сил  $X_K$ , что приводит к уравнениям типа

$$\vec{J}_i = \sum_K L_{ik} \vec{X}_K, \quad (12.89)$$

где  $L_{ik}$  — кинетические коэффициенты или коэффициенты переноса.

В прямых процессах термодинамическая сила  $X_K$  вызывает поток  $J_K$ ; например градиент температуры вызывает поток теплоты (явление теплопроводности), градиент концентрации — поток вещества (явление диффузии), градиент скорости направленного движения — поток импульса направленного движения (явление вязкости), градиент потенциала — поток заряда (электрический ток). Такие процессы характеризуются кинетическими коэффициентами  $L_{ik}$  (их называют коэффициентами переноса), пропорциональными коэффициентам теплопроводности, диффузии, вязкости и удельной проводимости.

Следствием таких уравнений (12.89) является существование перекрестных процессов ( $L_{ik}$ ), а именно: градиент температуры может вызвать поток вещества в многокомпонентных системах (явление термодиффузии, эффект Соре), а градиент концентрации — поток теплоты (диффузионный термоэффект, эффект Дюфура).

Отметим, что в нелинейной неравновесной термодинамике изучаются процессы, происходящие в системах при больших отклонениях ее от состояния равновесия. В этом случае была обнаружена возможность самоорганизации в открытых неравновесных системах, то есть протекания таких процессов, при которых энтропия системы уменьшается. При этом происходит образование структур, которые могут играть существенную роль при развитии окружающего мира.

#### 12.2.11.2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

**Средняя длина свободного пробега молекул газа.** Молекулы идеального газа непрерывно хаотически движутся, сталкиваясь друг с другом. От одного столкновения до другого они движутся по прямой линии, а их общая траектория представляет собой ломаную линию, состоящую из прямолинейных участков (рис. 12.18а). Под средней длиной свободного пробега понимают величину, равную пути, пройденному молекулой за время  $t$ , деленному на число столкновений  $Z$ , которые испытала молекула за это время  $t$ :

$$\langle \lambda \rangle = l/Z = \langle v \rangle \cdot t/Z.$$

Выведем формулу для средней длины свободного пробега. Будем считать, что все молекулы неподвижны, кроме одной. За время  $t$  молекула пройдет

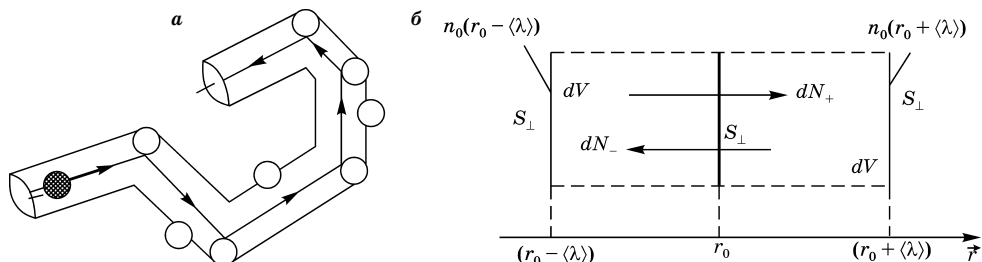


Рис. 12.18



расстояние  $l = \langle v \rangle \cdot t$ , где  $\langle v \rangle$  — средняя арифметическая скорость молекулы. Причем она за это время испытывает столкновения со всеми молекулами, центры которых попадают внутрь коленчатого цилиндра (его радиус равен диаметру одной молекулы  $d$ , а длина образующей цилиндра — пройденному молекулой расстоянию  $l = \langle v \rangle \cdot t$ , рис. 12.18а). Число столкновений движущейся молекулы будет равно количеству молекул, центры которых попали в этот цилиндр:

$$Z = nV = n\pi^2 l = \pi d^2 n \langle v \rangle \cdot t,$$

что позволяет записать

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \cdot d^2 n}, \quad (12.90)$$

где коэффициент  $\sqrt{2}$  учитывает движения всех молекул — в этом случае для определения числа столкновений  $Z$  необходимо использовать относительную скорость молекул, а не скорость молекул относительно стенки сосуда. Это приводит к следующим формулам:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \vec{v}_2 \Rightarrow \langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle} = \langle v \rangle \sqrt{2},$$

где учтено, что усреднение слагаемого  $2\vec{v}_1 \vec{v}_2 = 2v_1 v_2 \cos \alpha$  по всевозможным углам  $\alpha$  ( $\alpha = (0 \div 180^\circ)$ ) дает нулевое значение ( $\langle \cos \alpha \rangle = 0$ ).

**Вывод формулы для коэффициента диффузии.** Пусть в идеальном газе создано неравномерное распределение концентрации молекул, а именно на одной стенке прямоугольного сосуда концентрация молекул газа будет равной  $n_2$ , а на другой —  $n_1$  (см. рис. 12.17). Тогда в газе возникает явление диффузии (точнее, самодиффузии). Выберем площадку  $S_\perp$ , перпендикулярную направлению переноса (рис. 12.18а). Будем считать, что все молекулы, пересекающие эту площадку  $S_\perp$ , испытывают последнее столкновение на одном и том же расстоянии  $dr$  от нее, равном средней длине свободного пробега:  $dr = \langle \lambda \rangle = \langle v \rangle dt$  (рис. 12.18а). Тогда число молекул  $dN_+$ , пересекающих площадку в положительном направлении оси  $\vec{r}$ , будет определяться концентрацией молекул на расстоянии  $(r_0 - dr)$ , а в обратном направлении  $(dN_-) - (r_0 + dr)$ . За время  $dt$  через площадку  $S_\perp$  пройдет  $1/6$  часть всех молекул, попадающих в объемы  $dV = S_\perp \langle v \rangle dt = S_\perp dr = S_\perp \langle \lambda \rangle$  по разные стороны от площадки. Поэтому суммарный перенос молекул за это время составит

$$\begin{aligned} dM &= m_0(dN_+ - dN_-) = \frac{1}{6} m_0(n(r_0 - dr) - n(r_0 + dr)) S_\perp \langle v \rangle dt = \\ &= \frac{1}{6} m_0((n(r_0) - \frac{dn}{dr} dr - n(r_0) - \frac{dn}{dr} dr) S_\perp \langle v \rangle dt = -\left(\frac{1}{3} dr \langle v \rangle\right) \frac{dp}{dr} S_\perp dt = -\left(\frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle\right) \frac{dp}{dt} S_\perp dt. \end{aligned}$$

Из записанной выше формулы видно, что коэффициент диффузии будет определяться выражением

$$D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle. \quad (12.91)$$

Ввиду малости расстояния  $dr$  при выводе формулы (12.91) было использовано следующее равенство:  $n(r_0 \pm dr) = n(r_0) \pm dn/dr$ .

Аналогично можно вывести формулы для коэффициентов вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $K$ :

$$\eta = D\rho = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle\rho; \quad (12.92)$$

$$K = \eta \cdot c_V = \frac{1}{3} \cdot \langle\lambda\rangle\langle v\rangle\rho \cdot c_V. \quad (12.93)$$

В формулу для коэффициента теплопроводности  $K$  входит удельная теплоемкость  $c_V$  идеального газа при постоянном объеме, которую согласно формулам (12.42) и (12.70 б) можно представить в следующем виде:

$$c_V = \frac{\nu}{m} c_{MV} = \frac{iR}{2M}. \quad (12.94)$$

Вывод формулы для удельной проводимости  $\sigma$ , входящей в уравнение переноса заряда, будет рассмотрен в разделе, посвященном физике твердого тела (13.7.1).

### 12.2.11.3. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА ОТ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПРИ ПРОТЕКАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ИЗОПРОЦЕССОВ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

Запишем формулы, позволяющие определить зависимости коэффициентов переноса от параметров состояния идеального газа:

$$D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle v\rangle = \frac{1}{3} \frac{kT}{\sqrt{2\pi}d^2 p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \eta = D\rho, \quad \rho = \frac{pM}{RT}, \quad K = \eta \cdot c_V = \eta \cdot \frac{iR}{2M}. \quad (12.95)$$

Отметим, что входящий в формулу диаметр молекулы  $d$  зависит от температуры, так как при столкновениях расстояние, на которое сближаются центры молекул, будет зависеть от скорости их столкновения, то есть от температуры  $d = d(T)$ . Однако эта зависимость является слабой, и поэтому ею можно пренебречь при дальнейшем обсуждении.

**1. Изобарический процесс** ( $p = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $V/T = \text{const}$ , ( $V \sim T$ ). Из формул (12.90) и (12.95) следует, что

$$\langle\lambda\rangle \sim T \sim V, \quad D \sim T^{3/2} \sim V^{3/2}, \quad \eta \sim \sqrt{T} \sim \sqrt{V}, \quad K \sim \sqrt{T} \sim \sqrt{V}. \quad (12.96)$$

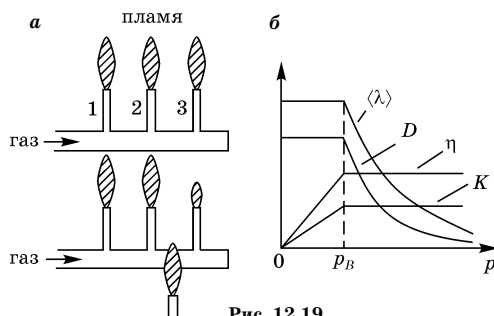


Рис. 12.19

В соответствии с формулами (12.96) повышение температуры идеального газа приводит к увеличению коэффициента вязкости, что подтверждается экспериментом. Так, например, пропустим газ (метан) по трубе, в которой имеются три отвода в виде коротких трубок (рис. 12.19а). Поджигая метан, можно наблюдать одинаковые по высоте столбы пламени в каждой трубке. Если затем нагреть часть трубы между второй и третьей короткими трубками, то тогда коэффициент вязкости метана в этой части трубы возрастет, в третью трубку будет поступать меньше газа и высота пламени третьей трубки будет меньше (рис. 12.19а).

Такое поведение коэффициента вязкости в случае газов при повышении их температуры существенно отличается от его поведения в жидкостях. Для жидкостей с повышением температуры коэффициент вязкости падает за счет возрастания частоты переходов молекул из одной потенциальной ямы в другую (см. п. 12.2.17).

**2. Изотермический процесс** ( $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $pV = \text{const}$ , ( $p \sim 1/V$ ). Учитывая, что  $p = nkT$ , запишем

$$\langle \lambda \rangle \sim 1/p \sim V, D \sim 1/p \sim V, \eta = \text{const}, K = \text{const}, \quad (12.97)$$

то есть коэффициент диффузии при уменьшении давления газа (за счет увеличения объема, занимаемого газом под поршнем) возрастает, а коэффициенты вязкости и теплопроводности остаются постоянными, они от давления не зависят (рис. 12.19б).

При понижении давления газа за счет увеличения объема, занимаемого газом, средняя длина свободного пробега его молекул будет возрастать. При некотором значении давления  $P$ , равного  $P_B$  ( $P = P_B$ ), средняя длина  $\langle \lambda \rangle$  свободного пробега будет сопоставима с размерами сосуда  $l$  и при дальнейшем понижении давления изменяться не будет. При этом наступает такое состояние газа, которое называется вакуумом; в этом случае молекулы будут двигаться от одной стенки сосуда к другой без столкновений между собой ( $P \leq P_B$  — вакуум). В состоянии вакуума дальнейшее понижение давления газа приводит к тому, что коэффициент диффузии не будет зависеть от давления, а коэффициенты вязкости и теплопроводности в соответствии с формулами (12.95) будут линейно уменьшаться до нуля (рис. 12.19б, по вертикальной оси откладываются значения  $\langle \lambda \rangle$ ,  $D$ ,  $\eta$ ,  $K$ ).

**3. Изохорический процесс** ( $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ). Уравнение процесса:  $p/T = \text{const}$ , ( $p \sim T$ ). В этом случае средняя длина свободного пробега  $\langle \lambda \rangle$  в соответствии с формулой (12.90) не зависит от параметров газа (его давления и температуры), так как концентрация молекул при этом не изменяется ( $n = N/V = \text{const}$ ). Поэтому

$$\langle \lambda \rangle = \text{const}, D \sim \sqrt{T} \sim \sqrt{p}, \eta \sim 1/\sqrt{T} \sim 1/\sqrt{p}, K \sim 1/\sqrt{T} \sim 1/\sqrt{p}. \quad (12.98)$$

Отметим, что полученные в модели идеального газа зависимости коэффициентов переноса от его параметров состояния подтверждаются экспериментально.

Обсудим еще один эксперимент. Для этого сопоставим коэффициенты теплопроводности для воздуха ( $i = 5$ ,  $M = 0,029$  кг/моль,  $d_{\text{возд}} = 1,75d_{\text{He}}$ ) и гелия ( $i = 3$ ,  $M = 0,004$  кг/моль). Из формул (12.95) следует, что

$$K \sim i/(d^2\sqrt{M}) \Rightarrow K_{\text{гелия}}/K_{\text{воздуха}} \cong 5,$$

то есть гелий лучше проводит тепло, чем воздух.

Этот факт можно показать на следующем опыте. В стеклянной трубке, расположенной вертикально и заполненной воздухом, находится оголенный металлический проводник. По нему пропускают электрический ток, проводник нагревается и ярко светится. Это достигается выбором определенного равновесия между силой тока (чем больше сила тока, тем больше выделяется тепла) и отводом тепла от проводника за счет явления теплопроводности. Если в трубку сверху запускать гелий, то свечение проводника в верхней его части будет тускнеть и может вообще исчезнуть. Этот эффект распространяется на весь проводник — гелий как более легкий газ, чем воздух, будет постепенно вытеснять его и заполнять трубку сверху. Это приводит к тому, что при неизменной силе тока отвод тепла от проводника возрастает и динамическое равновесие наступает при другой, более низкой температуре проводника, что и приводит к уменьшению яркости его свечения.

#### 12.2.12. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Модель идеального газа хорошо описывает процессы, происходящие в разреженных газах. При этом используется уравнение состояния идеального газа — уравнение Менделеева–Клапейрона. Однако с увеличением концентрации молекул становятся заметными отклонения поведения реальных газов от поведения, соответствующего идеальному газу. Это связано, во-первых, с необходимостью учета сил притяжения между молекулами реального газа, и во-вторых, при больших плотностях газа начинает сказываться наличие у молекул собственного объема — в результате не весь объем газа будет доступен молекулам.

**Влияние сил притяжения.** Рассмотрим сначала влияние сил притяжения между молекулами реального газа на вид уравнения Менделеева–Клапейрона.

На рис. 12.20а приведен график зависимости потенциальной энергии взаимодействия  $W_p$  частиц от расстояния  $r$  между ними (одна молекула на-

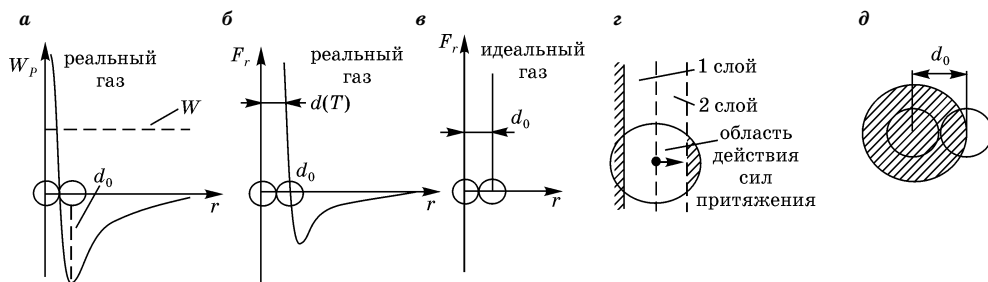


Рис. 12.20

ходится в начале оси  $\vec{r}$ ). Движению молекул в газе соответствует полная энергия  $W$  частицы, принимающая положительные значения (рис. 12.20а).

Между потенциальной энергией молекул и силами, действующими между ними, существует формула связи ( $F_r = -(dW_p/dr)$ ), которая позволяет построить график зависимости проекции результирующей силы, действующей между молекулами, от расстояния между ними (рис. 12.20б). Напомним, что результирующая сила складывается из сил притяжения молекул (они вызваны взаимодействием разноименных зарядов молекул — ядра одной молекулы с электронной оболочкой другой молекулы) и сил отталкивания (они связаны с взаимодействием одноименных зарядов молекул — ядра одной молекулы с ядром другой молекулы или электронной оболочкой одной молекулы с электронной оболочкой другой молекулы).

Согласно графику  $F_r(r)$ , приведенному на рис. 12.20б, результирующая сила взаимодействия между молекулами на расстояниях  $r > d_0$  является силой притяжения (она является короткодействующей и быстро спадает до нуля на расстояниях порядка  $10^{-9}$  м), а для расстояний  $r < d_0$  — силой отталкивания ( $d_0$  — диаметр молекулы; он соответствует минимуму потенциальной энергии взаимодействия двух молекул при малых скоростях их движения).

График  $F_r(r)$  для реального газа (рис. 12.20б) отличается от графика  $F_r(r)$  для идеального газа (рис. 12.20в) прежде всего наличием сил притяжения между молекулами. При больших концентрациях газа (плотный газ) молекулы достаточно долго будут находиться на расстояниях, на которых действуют силы притяжения, что создает добавочное давление (его называют внутренним давлением  $p_{\text{вн}}$ ) внутри реального газа по сравнению с идеальным газом.

Это внутреннее давление уменьшает скорость молекул, ударяющихся о стенку сосуда. Покажем это. Выделим вблизи стенки сосуда первый слой молекул, которые движутся без столкновений до нее (на рис. 12.20г молекула газа изображена в виде материальной точки). Второй слой молекул, отстоящий от стенки дальше первого, будет притягивать его к себе, что уменьшает скорость молекул идеального газа первого слоя и тем самым уменьшает давление газа  $p$  на стенки сосуда. Поэтому давление внутри реального газа будет равно сумме давления на газ со стороны стенок сосуда (внешнее давление) и внутреннего давления:  $p_{\text{газа}} = p + p_{\text{вн}}$ .

Следовательно, учет сил притяжения между молекулами приводит к тому, что в уравнении Менделеева–Клапейрона необходимо подставить выражение

$$p_{\text{газа}} = p + p_{\text{вн}}.$$

Внутреннее давление можно оценить следующим образом. Оно возникает при взаимодействии молекул первого и второго слоев, то есть будет пропорциональным количеству молекул в этих слоях, то есть концентрации молекул газа

$$p_{\text{вн}} \sim n_1 \cdot n_2 \Rightarrow p_{\text{вн}} = a/V^2,$$

где введен коэффициент пропорциональности  $a$ , который можно установить из опыта.

Из рис. 12.20г видно, что сила притяжения, действующая на молекулу первого слоя со стороны второго, вызвана тем, что в область действия сил

притяжения выделенной молекулы (сфера) первого слоя попадает частично стенка сосуда. Это уменьшает область действия сил притяжения до усеченной сферы, что и приводит к возникновению притяжения молекул первого слоя к молекулам второго слоя. Внутри газа эти силы притяжения, действующие на молекулу, уравнивают друг друга.

**2. Влияние сил отталкивания.** При больших плотностях газа заметную роль начинает играть собственный объем молекул. Действующие между молекулами силы на малых расстояниях становятся силами отталкивания. Они не позволяют центрам двух молекул при столкновении сблизиться до расстояний, меньших  $d_0$  ( $r \leq d_0$ ).

Следовательно, при столкновении двух молекул недоступным для них будет объем сферы диаметром  $d_0$  (см. рис. 12.20*д*), этот объем будет равен восьми объемам молекулы  $V_{\text{мол}}$ , а для одной молекулы недоступным будет половина этого объема:  $V_{\text{недост}} = 4V_{\text{мол}}$ . Тогда объем, доступный для молекул идеального газа, составит

$$V_{\text{дост}} = V - V_{\text{недост}} = V - b,$$

где  $b$  — недоступный для молекул объем.

В случае идеального газа диаметр молекул не зависит от температуры, так как при столкновении молекул силы взаимодействия резко возрастают (см. рис. 12.20*в*). Для реального газа силы отталкивания, хотя и резко возрастают при столкновении молекул, тем не менее зависимость их от расстояния позволяет изменяться диаметру молекулы при столкновении  $d = d(T)$ . Ввиду слабой зависимости диаметра молекулы от температуры ею можно пренебречь.

Учет двух поправок видоизменяет уравнение состояния идеального газа следующим образом:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (12.99)$$

Это уравнение записано для одного моля газа ( $\nu = m/M = 1$  моль, в нем объем газа является молярным объемом  $V = V_M$ ). Для произвольной массы газа в уравнении (12.99) нужно произвести замену  $V_M = V/\nu$ :

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu \cdot b) = \nu \cdot RT. \quad (12.100)$$

Уравнение (12.99) было впервые получено Ван-дер-Ваальсом.

### 12.2.13. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИЗОТЕРМЫ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА

Впервые экспериментальные изотермы для реальных газов (углекислый газ  $\text{CO}_2$ ) были изучены Эндрюсом; они были получены медленным изотермическим сжатием ненасыщенного пара, находящегося в цилиндре под поршнем (изотермы рис. 12.21*а*). Как видно из этих изотерм, все они содержат

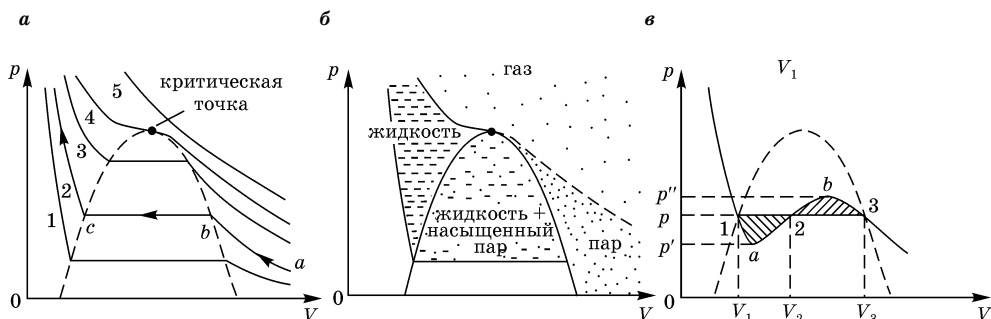


Рис. 12.21

горизонтальный участок, который с повышением температуры уменьшается и при достижении **критической температуры** ( $T = T_K$ ) полностью исчезает. Критической температуре соответствует критическая изотерма 4, на ней в критической точке имеется точка перегиба.

Если провести через крайние точки горизонтальных участков изотерм линию (она будет колоколообразной), то тогда вся область диаграммы в координатах ( $p, V$ ) будет разделена на три области (рис. 12.21б) — область жидких состояний, газообразных и двухфазных — в ней одновременно существуют газообразное и жидкое состояния вещества. (Что касается твердого состояния вещества, то оно показано на рис. 12.24а и 12.25а.)

Область газообразных состояний, которая располагается выше критической изотермы, называют газом. Здесь изотермы напоминают изотермы идеального газа (рис. 12.21а, изотерма 5). В этой области температур вещество существует только в газообразном состоянии при любых давлениях и объемах, то есть, проводя изотермическое сжатие газа при таких температурах, его нельзя превратить в жидкость. Это объясняет тот факт, что гелий и водород длительное время с помощью процесса изотермического сжатия не удавалось перевести в жидкое состояние (для гелия и водорода критические температуры составляли 5,2 К и 33,2 К соответственно). Газ, находящийся ниже критической изотермы, при изотермическом сжатии можно превратить в жидкость, поэтому для этой области он носит название ненасыщенного пара.

Рассмотрим подробнее изотерму под номером 2 на рис. 12.21а. Ее можно разделить на три участка.

**Участок а-б.** При сжатии ненасыщенного пара он переходит в насыщенное состояние в точке б.

**Участок б-с.** Происходит конденсация насыщенного пара — при неизменном давлении, равном давлению насыщенного пара при данной температуре. В этой области объемов две фазы вещества — жидкая и парообразная — находятся в равновесии. При достижении точки С весь пар превращается в жидкость.

**Участок с-д.** Здесь наблюдается жидкое состояние вещества. Изменение объема жидкости при увеличении ее давления будет незначительным. Поэтому изотермы в этой области практически вертикальны.

**Сравнение теоретических и экспериментальных изотерм.** Рассмотрим вид расчетных изотерм, которые можно получить из уравнения (12.99). Для этого перепишем это уравнение в следующем виде:

$$pV^3 - (pb + RT)V^2 + aV - ab = 0 \left( \times \frac{1}{p} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^3 - \left( b + \frac{RT}{p} \right) V^2 + \frac{a}{p} V - \frac{ab}{p} = 0. \quad (12.101)$$

Известно, что такое кубическое уравнение имеет либо один, либо три вещественных корня. На рис. 12.21*б* приведен график одной из расчетных изотерм — для нее в области давлений ( $p' < p < p''$ ) решение уравнения (12.99) дает три вещественных корня (горизонтальная линия  $p = \text{const}$  пересекает изотерму в трех точках, соответствующих значениям объема  $V_1, V_2$  и  $V_3$ ). Это приводит к зигзагообразному (волнообразному) поведению изотермы в области одновременного существования насыщенного пара и жидкости. Такое поведение изотермы в этой области не согласуется с экспериментом. В других же областях, где существует только жидкость или только пар, наблюдается достаточно удовлетворительное согласие между экспериментом и теорией.

Отметим, что волнообразные участки расчетных изотерм частично подтверждаются экспериментом. Если создать условия, при которых в газе будут отсутствовать центры конденсации (например пылинки или ионы), то медленным изотермическим сжатием (переход 1–2–3) можно получить так называемый **пересыщенный пар**, ему соответствуют на изотерме состояния между точками 2 и 3 (рис. 12.22*а*). Давление пересыщенного пара превышает давление насыщенного пара (при данной температуре). Эти состояния будут метастабильными (малоустойчивыми) — при возникновении центров конденсации пересыщенный пар быстро превращается в жидкость (переход 3–4), возникает равновесное состояние между насыщенным паром и жидкостью.

Аналогично можно получить метастабильные состояния **перегретой жидкости**. Для этого необходимо удалить из жидкости и стенок сосуда, в кото-

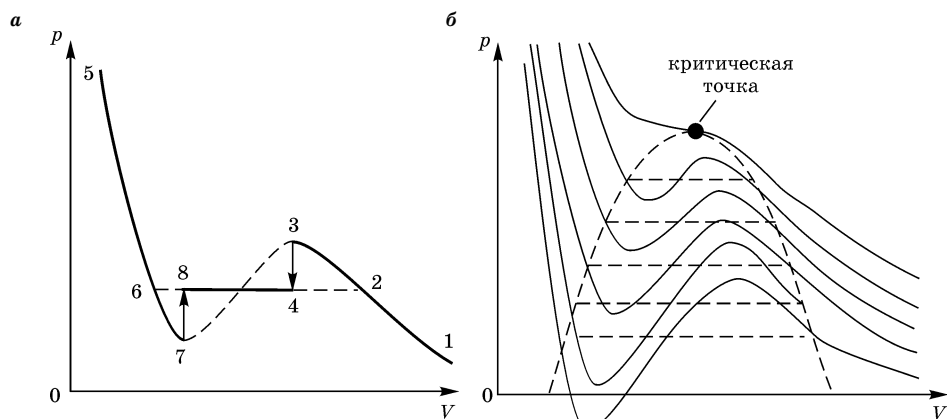


Рис. 12.22



рой она находится, центры парообразования (например пылинки, пузырьки растворенных в жидкости газов). Перегретой жидкости соответствуют состояния, расположенные на изотерме между точками 6 и 7 (рис. 12.22а), ее температура будет выше температуры точки кипения. Если в жидкости возникают центры парообразования, то она мгновенно закипает (переход 7–8).

Состояния, соответствующие части изотермы между точками 3 и 7 (они обозначены пунктирной линией), абсолютно неустойчивы (рис. 12.22а) и не реализуются на практике.

Для примера, на рис. 12.22б приведены графики расчетных изотерм при различных температурах. При их построении необходимо учитывать, что площади фигур 1а2 и 2б3 должны быть одинаковыми (см. рис. 12.21е), это является следствием второго начала термодинамики.

**Критическая точка.** Рассмотрим подробнее, что происходит в **критической точке** (параметры, соответствующие ей, обозначаются как  $p_K$ ,  $V_K$  и  $T_K$ ).

Здесь наблюдается **критическое состояние вещества**, для него исчезает различие между жидкостью и насыщенным паром. Это проявляется в том, что при нагреве в закрытом сосуде какой-либо жидкости при достижении критической температуры исчезнет граница раздела между жидкостью и паром — они образуют единое однородное вещество (плотности пара и жидкости совпадут, силы поверхностного натяжения исчезнут, теплота парообразования будет равна нулю).

С помощью экспериментально определенных критических параметров вещества ( $p_K$ ,  $V_K$ ,  $T_K$ ), соответствующих критической точке, можно оценить постоянные  $a$  и  $b$ , входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса. Критической точке на критической изотерме соответствует точка перегиба, причем в этой точке касательная к графику будет горизонтальна. Это означает, что в этой точке равны нулю первая и вторая производные давления газа по объему. Найдем эти производные. Для этого перепишем уравнение (12.99) в следующем виде:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0, \quad \frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0.$$

Решая эти алгебраические уравнения, получим

$$V_K = 3b, \quad T_K = \frac{8a}{27bR}, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}, \quad (12.102)$$

что позволяет записать уравнения состояния вещества в критической точке в следующем виде (для одного моля вещества):

$$p_K V_K = \frac{3}{8} RT_K.$$

В отличие от уравнения Менделеева–Клапейрона, здесь в уравнение входит коэффициент  $3/8$ , что связано с существенным взаимодействием молекул друг с другом.

В качестве примера можно привести критические параметры состояния для некоторых веществ — гелий ( $p_K = 2,26$  атм,  $V_K = 57,8$  см<sup>3</sup>/моль,  $T_K = 5,2$  К), углекислый газ ( $p_K = 72,85$  атм,  $V_K = 94,04$  см<sup>3</sup>/моль,  $T_K = 304,19$  К), вода ( $p_K = 218,39$  атм,  $V_K = 56$  см<sup>3</sup>/моль,  $T_K = 647,3$  К).

Критические параметры позволяют провести расчет параметров  $a$  и  $b$ , входящих в уравнение Ван-дер-Ваальса. Например, для углекислого газа параметры  $a$  и  $b$  будут равны:  $b = V_K/3 = 31 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$  или  $b = RT_K/(8p_K) = 43 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ ;  $a = 27bRT_K/8 = 0,26 \text{ м}^4 \cdot \text{Н}/\text{моль}^2$ ;  $0,37 \text{ м}^4 \cdot \text{Н}/\text{моль}^2$ .

Видно, что использование разных формул для параметра  $b$  приводит к разбросу числовых значений параметров  $a$  и  $b$ . Эти параметры, в частности, позволяют рассчитать температуру инверсии  $T_{\text{инв}}$  (см. формулу (12.106)).

#### 12.2.14. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

Внутренняя энергия реального газа будет равна сумме кинетических энергий движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$U = \sum_{i=1}^N W_{Ki} + \sum_{i=1}^N W_{Pi} = U_{\text{ид}} + W_P,$$

где сумма кинетических энергий реального газа совпадает с внутренней энергией  $U_{\text{ид}}$  идеального газа, которую для одного моля газа можно записать в следующем виде (см. формулы (12.69 а) и (12.70 б)):

$$U_{\text{ид}} = c_{MV}T.$$

Выведем формулу для потенциальной энергии взаимодействия молекул  $W_P$ . Это взаимодействие обусловлено появлением сил притяжения между молекулами, и оно приводит к возникновению внутреннего давления газа  $p_{\text{вн}}$ . Используя теорему о потенциальной энергии, согласно которой работа консервативной силы осуществляется за счет убыли потенциальной энергии газа, можно записать

$$dA = -dW_P = -p_{\text{внутр}}dV = -\frac{a}{V^2}dV \Rightarrow dW_P = \frac{a}{V^2}dV.$$

Интегрируя полученное выражение, запишем

$$W_P = -\frac{a}{V} + \text{const} \Rightarrow W_P = -\frac{a}{V},$$

где постоянная величина была выбрана так, чтобы при увеличении объема, занимаемого газом, потенциальная энергия взаимодействия молекул стремилась к нулю:  $V \rightarrow \infty \Rightarrow W_P \rightarrow 0$ .

Итак, окончательное выражение для внутренней энергии реального газа (для одного моля газа) будет выглядеть следующим образом:

$$U = c_{MV}T - \frac{a}{V}. \quad (12.103)$$

Полученная формула свидетельствует о том, что внутренняя энергия реального газа будет зависеть не только от температуры газа, но и от его объема.

Для произвольного количества газа нужно вместо молярного объема  $V$  подставить в формулу величину  $V/\nu$ .

## 12.2.15. ЭФФЕКТ ДЖОУЛЯ–ТОМСОНА

Наглядным примером зависимости внутренней энергии реального газа от его объема является эффект Джоуля–Томсона. Кратко обсудим его. Для этого рассмотрим процесс медленного протекания газа в теплоизолированном цилиндре (адиабатический процесс) при постоянном перепаде давления ( $\Delta p = (p_2 - p_1) < 0$ ) через пористую перегородку, которая оказывает препятствие движению газового потока (рис. 12.23). Такое течение газа называют адиабатическим дросселированием, а под дросселем понимают какое-либо препятствие протеканию газа (например пористая перегородка).

Оказывается, что при таком процессе происходит изменение температуры газа, в этом и заключается эффект Джоуля–Томсона.

Пусть давление газа до и после перегородки поддерживается постоянным (до перегородки —  $p_1$ , после перегородки —  $p_2$ ). Это можно сделать с помощью двух поршней. Выделим до перегородки определенный объем газа с параметрами  $p_1, V_1, T_1$ , после прохождения перегородки его параметры станут равными  $p_2, V_2, T_2$ , причем  $p_2 < p_1, V_2 > V_1$ .

Найдем формулу для изменения температуры газа в этом опыте. Для этого используем выражение для работы газа (12.72 а) при адиабатическом процессе

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\Delta U_{12}, A_{12} = p_2 V_2 - p_1 V_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \end{aligned} \quad (12.104)$$

При выводе формулы было учтено, что работа газа до перегородки — это работа при изобарическом сжатии от объема  $V_1$  газа до нуля, а после перегородки — работа газа при изобарическом расширении от нулевого объема до объема  $V_2$ .

Из формулы (12.104) следует, что при таком процессе внутренняя энергия газа будет изменяться, а энтальпия  $H$  (см. формулу (12.57)) будет оставаться постоянной величиной:  $H = U + pV$ .

Для идеального газа внутренняя энергия будет зависеть только от температуры, и в соответствии с формулой (12.70 а) изменение температуры газа будет равно нулю. Действительно,

$$U_1 = c_{MV} T_1 = \frac{i}{2} \nu \cdot R T_1 = \frac{i}{2} p_1 V_1, \quad U_2 = c_{MV} T_2 = \frac{i}{2} \nu \cdot R T_2 = \frac{i}{2} p_2 V_2,$$

что приводит в формуле (12.104) к равенству

$$(i/2 + 1)p_1 V_1 = (i/2 + 1)p_2 V_2,$$

а оно означает одинаковую температуру газа в начальном и конечном состояниях, так как  $pV = \nu \cdot RT$ . Следовательно, эффект Джоуля–Томсона наглядно

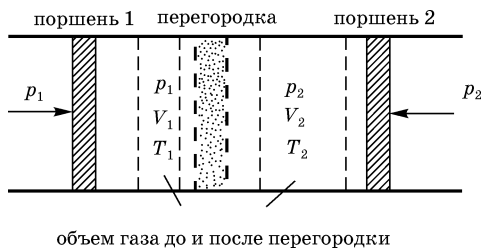


Рис. 12.23

свидетельствует о наличии в реальных газах взаимодействия между молекулами.

Перепишем уравнение (12.104), учитывая, что после прохождения перегородки давление газа существенно уменьшается, он становится разреженным и его можно считать идеальным газом:

$$c_{MV}T_1 - \frac{a}{V_1} + \frac{RT_1V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = c_{MV}T_2 + RT_2.$$

Преобразуем находящийся в левой части уравнения третий член к следующему виду:

$$\frac{RT_1V_1}{V_1 - b} = RT_1 + \frac{RT_1b}{V_1 - b},$$

что позволяет получить окончательное выражение для изменения температуры газа:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{c_{MV} + R} \left( \frac{RT_1b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (12.105)$$

Как следует из формулы (12.105), изменение температуры зависит от начальных параметров газа ( $V_1$ ,  $T_1$ ) и его природы (постоянных  $a$  и  $b$ ).

Температура газа при адиабатическом дросселировании не будет изменяться, если выражение в скобках в формуле (12.105) будет равно нулю:

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 &= \frac{1}{c_{MV} + R} \left( \frac{RT_1b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{\text{инв}} &= \frac{2a(V_1 - b)}{RbV_1}. \end{aligned} \quad (12.106)$$

Температура  $T_{\text{инв}}$  получила название **температуры инверсии**, при этой температуре разность температур газа  $\Delta T$  при адиабатическом дросселировании принимает нулевое значение.

Введем в формулу (12.105) температуру инверсии  $T_{\text{инв}}$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{Rb}{(c_{MV} + R)(V_1 - b)} (T_1 - T_{\text{инв}}). \quad (12.107)$$

Из полученного выражения видно, что при начальной температуре газа  $T_1$ , меньшей температуры инверсии ( $T_1 < T_{\text{инв}}$ ), газ будет охлаждаться ( $T_2 < T_1$ ), а при начальной температуре, превышающей температуру инверсии ( $T_1 > T_{\text{инв}}$ ), газ будет нагреваться ( $T_2 > T_1$ ). Чтобы охладить газ во втором случае ( $T_1 > T_{\text{инв}}$ ), необходимо предварительно охладить газ до температур ниже температуры инверсии, а затем провести процесс дросселирования.

Эффект Джоуля–Томсона используется во многих технических способах сжижения газов, получения низких температур. Например, при дросселировании воздуха от  $p_1 = 200$  атм до  $p_2 = 1$  атм при начальной температуре воздуха  $T_1 = 290$  К воздух охлаждается на  $\Delta T = 35$  К.

12.2.16.  
**ФАЗА. РАВНОВЕСИЕ ФАЗ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ.**  
**УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА–КЛАУЗИУСА.**  
**ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ**

12.2.16.1.  
**ФАЗА. ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ.**  
**РАВНОВЕСИЕ ФАЗ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ**

**Фаза** — физически однородная часть системы, отличающаяся своими физическими свойствами от других ее частей и отделенная от них четко выраженной границей. В качестве фазы можно рассматривать твердое тело, жидкость, насыщенный пар, кристаллическую модификацию какого-либо вещества (например углерода в виде алмаза и графита), вещество в ферромагнитном состоянии и в парамагнитном состоянии и т. д.

Как видно, понятие фазы является более широким, чем агрегатное состояние вещества. Так, например, различные кристаллические фазы могут отличаться друг от друга типом кристаллической структуры, электропроводностью, электрическими и магнитными свойствами, наличием или отсутствием сверхпроводимости и т. д. Жидкие фазы могут отличаться друг от друга концентрацией компонентов, наличием или отсутствием сверхтекучести, анизотропией упругих и электрических свойств и т. д.

**Химический потенциал.** Рассмотрим открытые термодинамические системы, для которых количество вещества  $\nu$  (или число молекул  $N$ ,  $N = N_A \nu$ ) может изменяться. В этом случае внутренняя энергия системы будет зависеть не только от энтропии и объема (12.56), но также и от числа частиц

$$dU = TdS - pdV + \mu \cdot d\nu, \quad (12.108)$$

где  $\mu$  — химический потенциал.

$\mu \cdot d\nu$  войдет в формулы для всех термодинамических потенциалов (см. формулы (12.57), (12.58), (12.59)), что позволяет определить физический смысл химического потенциала:

$$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_{S,V} = \left( \frac{\partial H}{\partial \nu} \right)_{S,p} = \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_{T,V} = \left( \frac{\partial G}{\partial \nu} \right)_{T,p}. \quad (12.109)$$

Так, например, можно сказать, что химический потенциал определяет изменение внутренней энергии теплоизолированной системы ( $S = \text{const}$ ) при изменении ее количества вещества (числа частиц) на один моль при постоянном объеме ( $V = \text{const}$ ) —  $\mu = (\partial U / \partial \nu)_{S,V}$ .

Оказывается, что функции состояния  $U, H, F, G, S$ , а также объем системы  $V$  будут пропорциональны числу частиц в системе — чем больше будет число частиц, тем больше будут числовые значения этих функций, например  $G \sim \nu$ ,  $V \sim \nu$  и т. д. Их называют экстенсивными (аддитивными величинами). В отличие от них температура и давление (интенсивные величины) не изменяются при увеличении размеров системы. Это позволяет записать величины  $U, H, F, G, S$ , вводя характеристики, отнесенные к одному молю вещества ( $\tilde{U}, \tilde{H}, \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{S}, \tilde{V}$ ), например  $G = \nu \cdot \tilde{G}$ ,  $V = \nu \cdot \tilde{V}$  и т. д. В этом случае для свободной энергии Гиббса

$$G(p, T, \nu) = \nu \cdot \tilde{G}(p, T), \quad d\tilde{G} = -\tilde{S}dT + \tilde{V}dp,$$

откуда следует, что

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial \nu} \right)_{T,p} = \tilde{G}, \quad d\mu = d\tilde{G} = -\tilde{S}dT + \tilde{V}dp, \quad (12.110)$$

то есть химический потенциал можно определить как свободную энергию Гиббса, отнесенную к одному молю вещества. Входящие в формулу (12.110) величины  $(\tilde{S}, \tilde{V})$  представляют собой молярную энтропию и молярный объем системы соответственно.

**Фазовое равновесие. Фазовый переход.** Фазовое равновесие — это одновременное существование равновесных фаз в многофазной системе — жидкости со своим насыщенным паром, воды и льда при температуре плавления, двух несмешивающихся жидкостей, отличающихся концентрациями, нормальной и сверхпроводящей фаз металла во внешнем магнитном поле и т. д.

В условиях равновесия давление и температура во всех фазах должны быть одинаковы:  $p_1 = p_2, T_1 = T_2$ . Кроме того, переход в условиях равновесия частицы из одной фазы в другую не должен изменять энергии системы. Это означает, что химические потенциалы каждого компонента в различных фазах также будут одинаковы ( $\mu_1 = \mu_2$ , см. формулу (12.112)). В условиях равновесия между фазами не наблюдается потоков вещества, масса вещества в разных фазах остается постоянной.

Итак, в условиях равновесия фаз 1, 2, 3 и т. д. выполняются следующие соотношения:

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots p_1 = p_2 = p_3 = \dots \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots \quad (12.111)$$

Если внешние условия в системе изменятся, это приведет к нарушению равновесного существования фаз, то есть к фазовому переходу.

**Фазовый переход (фазовое превращение)** — переход вещества из одной фазы в другую при изменении внешних условий — температуры, давления, магнитных и электрических полей и т. д.

Если, например, равновесие двух фаз 1 и 2 существовало при температуре  $T_A = T_1 = T_2$  и давлении  $p_A = p_1 = p_2$ , то изменение температуры  $T_A \rightarrow T_B$  в системе приведет к изменению массы вещества в каждой фазе. Оно будет происходить до тех пор, пока новое давление и температура в каждой фазе снова не выровняются. Тогда снова будет наблюдаться фазовое равновесие, но уже при новом давлении  $p_B = p'_1 = p'_2$  и новой температуре  $T_B = T'_1 = T'_2$ . При этом изменение массы вещества в каждой из фаз прекратится, а химические потенциалы фаз снова станут одинаковыми ( $\mu'_1 = \mu'_2$ ).

Следовательно, важным для изучения фазовых равновесий и фазовых переходов является исследование зависимости давления от температуры  $p = p(T)$  в условиях фазового равновесия. Такую зависимость в плоскости  $(p, T)$  называют **фазовой кривой равновесия**.

Рассмотрим подробнее фазовый переход в двухфазной системе при постоянных значениях давления и температуры ( $dp = dT = 0$ ). В этом случае свободная энергия Гиббса для двухфазной системы (фаза 1 и фаза 2) будет зависеть только от числа молекул вещества в каждой фазе:

$$dG = -SdT + Vdp + \mu_1 \cdot dN_1 + \mu_2 dN_2 = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2.$$

Здесь считается, что температура и давление мало отличаются от своих равновесных значений ( $dT = 0$ ,  $dp = 0$ ), и поэтому процессы выравнивания происходят за счет изменения числа молекул.

В состоянии равновесия энтропия системы имеет максимальные значения, поэтому свободная энергия Гиббса принимает минимальное значение (в формулу для  $G$  входит энтропия  $S$  со знаком минус:  $G = -ST + pV + \mu N$ ), и следовательно, значение  $G$  при переходе в состояние равновесия уменьшается ( $dG < 0$ ). Поэтому

$$\begin{aligned} dG &= \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2 < 0, \quad N_1 + N_2 = \text{const} \Rightarrow \\ \Rightarrow dN_2 &= -dN_1 \Rightarrow dG = (\mu_1 - \mu_2) dN_1 < 0. \end{aligned} \quad (12.112)$$

Из формулы (12.112) можно сделать вывод, что при различных химических потенциалах двух фаз между ними равновесия не будет. Если  $\mu_1 > \mu_2$ , будет происходить переход вещества из фазы 1 в фазу 2 ( $dN_1 < 0$ ), а для  $\mu_1 < \mu_2$  — из фазы 2 в фазу 1 ( $dN_1 > 0$ ). В состоянии же равновесия двух фаз ( $G = G_{\text{мин}}, dG_{\text{мин}} = 0$ ) наблюдается равенство химических потенциалов

$$\mu_1(T, p) = \mu_2(T, p), \quad (12.113)$$

что подтверждает записанное выше уравнение (12.111)

Равенство (12.113) позволяет найти, например, зависимость давления от температуры и, следовательно, определяет кривую фазового равновесия — линию зависимости  $p = p(T)$  на плоскости  $(p, T)$ , которая разделяет две фазы. На рис. 12.24 приведены такие фазовые кривые равновесия для жидкости и пара (фазовая кривая испарения), твердого тела и жидкости (фазовая кривая плавления) и твердого тела и пара (фазовая кривая сублимации).

С помощью термодинамики равновесных процессов кривую фазового равновесия (уравнение для фазовой кривой)  $p = p(T)$  получить не удастся, но можно установить зависимость производной давления в системе от температуры ( $dp/dT$ ), то есть определить угол наклона касательной к графику в точках фазового равновесия (уравнение Клапейрона–Клаузиуса) и тем самым предсказать характер кривой фазового равновесия  $p = p(T)$ .

#### 12.2.16.2. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПЕРВОГО РОДА. УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА–КЛАУЗИУСА

Различают фазовые переходы первого и второго рода. При **фазовом переходе первого рода** скачком изменяются такие термодинамические характеристики вещества, как молярный объем (плотность), концентрация компонентов, происходит выделение или поглощение вполне определенного количества теплоты, называемой теплотой фазового перехода.

Фазовые переходы первого рода широко распространены в природе. К ним относятся испарение и конденсация, плавление и затвердевание, сублимация и конденсация в твердую фазу, некоторые структурные переходы в твердых телах. В чистых сверхпроводниках достаточно сильное магнитное поле вызывает фазовый переход первого рода — переход из сверхпроводящего состояния в нормальное состояние.

Для фазового перехода первого рода характерно существование области метастабильного равновесия вблизи кривой фазового перехода. Например, жидкость можно нагреть до температуры выше точки кипения (перегретая жидкость) или переохладить ниже точки замерзания, либо получить пересыщенный пар (см. п. 12.2.2.8).

**Уравнение Клапейрона–Клаузиуса** определяет для фазового перехода первого рода производную от давления по температуре  $dp/dT$  в точках фазовой кривой равновесия. Приведем вывод этого уравнения с использованием метода термодинамических потенциалов.

При фазовых переходах первого рода происходит скачкообразное изменение молярного объема ( $\tilde{V}_{1M} \neq \tilde{V}_{2M}$ ) и молярной энтропии ( $\tilde{S}_{1M} \neq \tilde{S}_{2M}$ ) вещества. Используя формулу  $dS = \delta Q/T$  и учитывая, что фазовый переход происходит при постоянной температуре, можно записать для молярной теплоты  $\lambda$  перехода формулу

$$T = \text{const} \Rightarrow \Delta \tilde{S} = \tilde{S}_2 - \tilde{S}_1 = \int_1^2 \delta Q/T = Q/T \Rightarrow \lambda = Q = T(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1). \quad (12.114)$$

Совершим элементарное перемещение по кривой фазового равновесия (например на рис. 12.24, а это будет перемещение по кривой испарения вода (фаза 1)–газ (фаза 2) от точки А к точке В). Тогда химические потенциалы в разных фазах получают согласно формуле (12.113) одинаковое элементарное приращение, которое можно расписать с помощью формулы (12.110)

$$d\mu_1(T, p) = d\mu_2(T, p), \quad d\mu(T, p) = -\tilde{S}dT + \tilde{V}dp \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1}{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1}.$$

В итоге можно получить дифференциальное уравнение кривой фазового перехода, уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1)}. \quad (12.115)$$

Для всех веществ при температуре фазового перехода для процессов испарения (кривая испарения, переход жидкость–пар) и сублимации (кривая сублимации, переход твердое тело–пар) молярный объем вещества возрастает и теплота подводится к веществу. Это согласно уравнению Клапейрона–Клаузиуса приводит к положительной производной ( $dp/dT > 0$ ) в точках фа-

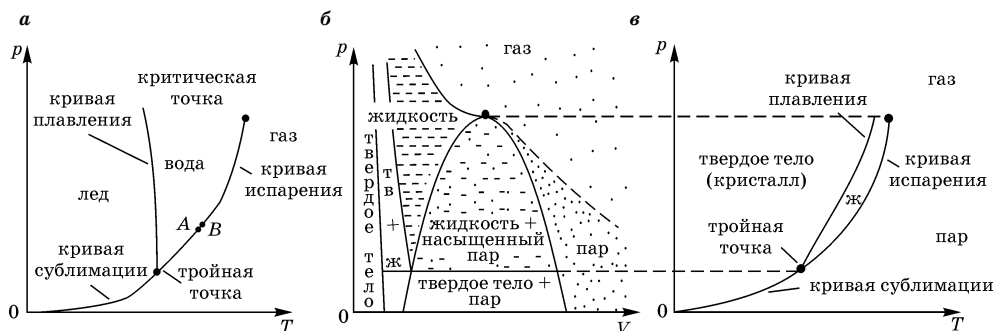


Рис. 12.24



зовой кривой равновесия в координатах  $(p, T)$ , то есть происходит постоянное возрастание давления при повышении температуры испарения и сублимации (рис. 12.24а, в).

Для фазового перехода твердое тело–жидкость (кривая плавления) можно сделать такие же выводы для многих веществ. Однако существуют некоторые вещества, у которых при плавлении молярный объем жидкости становится меньше ( $\tilde{V}_2 < \tilde{V}_1$ , к ним, например, относится вода). Для таких веществ производная будет меньше нуля  $(dp/dT) < 0$ , и поэтому при повышении температуры плавления давление в точках фазовой кривой равновесия (например лед–вода) будет уменьшаться (рис. 12.24а).

### 12.2.16.3. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВТОРОГО РОДА

Ландау предложил общую трактовку всех фазовых переходов второго рода как точек скачкообразного изменения симметрии.

Изменение симметрии кристаллической решетки возможно при незначительных смещениях атомов относительно своих положений равновесия, поэтому здесь не возникает скачков в изменении объема и не требуется поглощение или выделение теплоты при фазовом переходе.

Отметим, что в фазовых переходах первого рода химический потенциал изменяется непрерывно, а его первые производные изменяются скачком:

$$\mu_1 = \mu_2, \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P = -\tilde{S}, \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S = -\tilde{V}.$$

В фазовых же переходах второго рода первые производные химического потенциала скачков не имеют:

$$\mu_1 = \mu_2, \tilde{S}_1 = \tilde{S}_2, \tilde{V}_1 = \tilde{V}_2, \quad (12.116)$$

а скачком изменяются вторые производные

$$\left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \right)_T = \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial p} \right)_T, \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_P = -\frac{\tilde{c}_P}{T}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T} = \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial T} \right)_P. \quad (12.117)$$

Эти вторые частные производные представляют собой коэффициент объемного расширения  $(\partial \tilde{V} / \partial T)_P$ , теплоемкость  $(\tilde{c}_P)$  и сжимаемость  $(\partial \tilde{V} / \partial p)_T$ .

К фазовым переходам второго рода относятся, например: 1) переход парамагнетик–ферромагнетик, сопровождаемый появлением макроскопического магнитного момента; 2) переход металлов и сплавов из нормального в сверхпроводящее состояние; 3) переход гелия-3 и гелия-4 в сверхтекучее состояние; 4) переход твердого тела из одной кристаллической модификации в другую и т. д.

### 12.2.16.4. ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ

Графики, изображающие зависимости одних термодинамических переменных от других в условиях фазового равновесия, называются **линиями (поверхностями) равновесия**, а их совокупность — **диаграммой состояния**. Наиболее полная диаграмма состояния, которая охватывает все фазы какого-либо

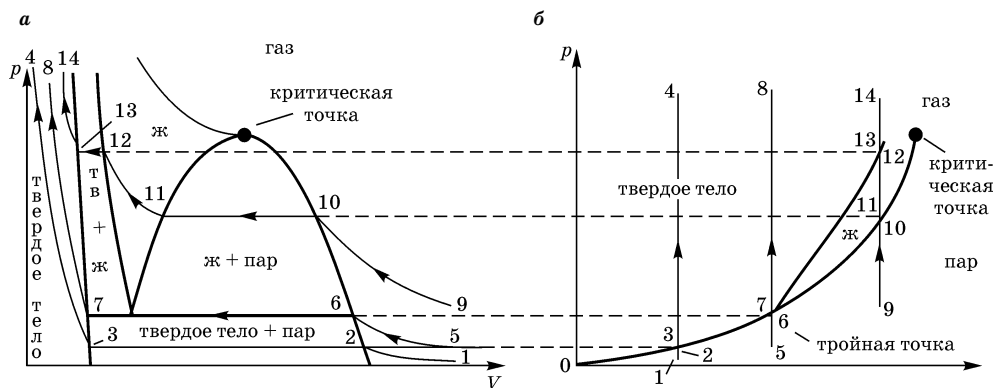


Рис. 12.25

вещества, приведена на рис. 12.24б, в и 12.25а, б. Рассмотрим диаграмму состояния более подробно.

Ранее обсуждались кривые фазового равновесия, описывающие равновесное существование двух фаз, например твёрдое тело–жидкость (кривая плавления), жидкость–пар (кривая испарения) и твёрдое тело–пар (кривая сублимации). Как видно из рис. 12.24а, в и 12.25а, б, эти кривые пересекаются в **тройной точке**, в ней в равновесии одновременно могут существовать три фазы индивидуального вещества — твёрдое тело (кристалл), жидкость и пар.

В качестве примера приведем параметры тройной точки для двух веществ: углекислого газа —  $T_{\text{тр}} = 216,6 \text{ К}$ ,  $p_{\text{тр}} = 5,16 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ; и воды —  $T_{\text{тр}} = 273,16 \text{ К}$ ,  $p_{\text{тр}} = 609 \text{ Па}$ . Тройная точка воды является основной точкой для построения абсолютной термодинамической температурной шкалы.

Отметим, что тройная точка не обязательно описывает равновесие жидкой, твердой и газообразной фазы. В ней могут находиться в равновесии две кристаллические фазы вещества и жидкая фаза, или две кристаллические фазы и газообразная фаза, или три кристаллические фазы.

В однокомпонентной системе не могут одновременно находиться в равновесии четыре фазы (к ним, например, можно отнести две кристаллические модификации твердого тела, жидкость и пар), так как при этом число переменных параметров будет меньше числа уравнений, числа условий, которые накладываются на них. Для линии фазового равновесия можно изменять только один параметр, например температуру. Для тройной точки фиксируются и температура, и давление, то есть не остается переменных параметров. Поэтому еще одно дополнительное условие на параметры невыполнимо.

Для более подробного обсуждения диаграммы состояния, приведенной на рис. 12.24б, в, выберем три изотермы и в параметрах  $(p, V)$  и  $(p, T)$  рассмотрим, как изменяется фазовый состав однокомпонентной системы при движении по этим изотермам в сторону увеличения давления (сжатие вещества) из начального газообразного состояния (рис. 12.25а, б).

Для изотермы 1–2–3–4 ( $T = T_1$ ) участок 1–2 соответствует пару, давление которого возрастает с уменьшением объема, в точке 2 эта изотерма выходит

на фазовую кривую равновесия твердое тело–пар. Это равновесие сохраняется при изменении объема двухфазной системы от значения  $V_2$  до  $V_3$  (при уменьшении объема изменяется количественный состав двухфазной системы твердое тело–пар, рис. 12.25a).

На диаграмме ( $p$ ,  $T$ ) этот участок изотермы будет соответствовать одной точке (точки 2 и 3 сливаются в одну точку), находящейся на фазовой кривой равновесия твердое тело–пар. Участок изотермы 3–4 соотносится с однофазным состоянием (твердое тело), здесь при уменьшении объема твердого тела давление будет резко возрастать из-за малой его сжимаемости.

Температура изотермы 5–6–7–8 соответствует температуре тройной точки ( $T_2 = T_{\text{тр}} > T_1$ ). В этом случае между точками 6 и 7 в равновесии при давлении ( $p = p_2 = p_{\text{тр}}$ ) находятся три фазы вещества — твердое тело, жидкость и пар. Давление, соответствующее тройной точке, будет наблюдаться при уменьшении объема системы от значения  $V_6$  до значения  $V_7$ . В точке 7 равновесие трех фаз нарушается и остается только твердое тело, для которого уменьшение объема сопровождается резким увеличением давления (участок 7–8).

Для изотермы 9–10–11–12–13–14 с более высокой температурой ( $T_3 > T_2$ ) равновесия трех фаз вещества не наблюдается. На участке 9–10 происходит увеличение давления пара за счет уменьшения объема системы. В точке 10 наблюдается равновесие между жидкостью и паром. Оно сохраняется при уменьшении объема от значения  $V_{10}$  до значения  $V_{11}$ .

В точке 11 происходит переход от двухфазной системы к однофазной — к жидкости, для которой уменьшение объема системы приводит к резкому возрастанию давления при переходе от точки 11 к точке 12. В точке 12 наблюдается фазовый переход из жидкого состояния (точка 12) в твердое состояние (точка 13); он происходит при постоянном давлении, здесь наблюдается равновесие между твердым телом и жидкостью. После этого в твердом состоянии уменьшение объема твердого тела при переходе от точки 13 к точке 14 сопровождается резким увеличением давления.

Диаграммы состояния во многих случаях помогают понять процессы, имеющие место в системе, состоящей из нескольких компонентов при изменении ее температуры и давления. Это позволяет оптимизировать процессы производства различных изделий, понять суть происходящих событий. Так, из рис. 12.25a видно, что лед может испаряться, минуя жидкую фазу (изотерма 1–2–3–4), что объясняет сушку белья на сильном морозе.

## 12.2.17. ЖИДКОЕ СОСТОЯНИЕ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ. СМАЧИВАЕМОСТЬ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### 12.2.17.1. СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось, молекулы в газе при высоких температурах движутся поступательно от одного столкновения до другого. При понижении температуры средняя скорость движения молекул и их средняя длина свободного пробега уменьшаются, и все большее время молекулы проводят на расстояниях, попадающих в область действия сил молекулярного притяжения.

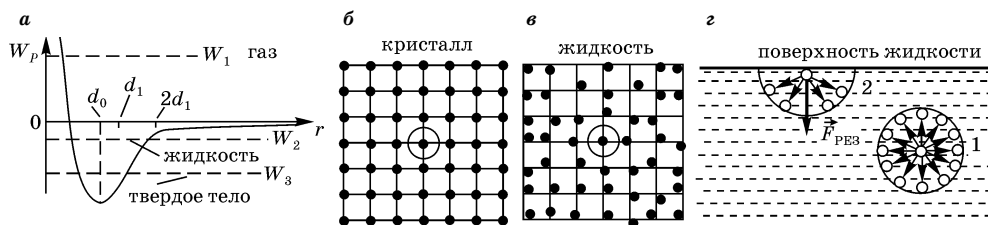


Рис. 12.26

Это приводит к возрастанию роли сил притяжения между молекулами, к отклонению поведения реальных газов от поведения идеальных газов.

При понижении температуры качественный скачок в поведении молекул будет наблюдаться тогда, когда полная энергия молекул станет меньше нуля ( $W < 0$ ), то есть средняя кинетическая энергия молекулы будет меньше потенциальной энергии их взаимодействия. В этом случае поступательное движение молекул переходит в колебательное движение в потенциальных ямах (рис. 12.26а), которые созданы взаимодействием молекул, находящихся достаточно близко друг к другу, что приводит к малой сжимаемости жидкости.

При этом наблюдаются достаточно частые переходы молекул из одной потенциальной ямы в другую. Это связано с тем, что потенциальная яма является несимметричной, молекулы при своих колебаниях могут удаляться друг от друга на расстояния, которые позволяют им легко преодолевать потенциальный барьер и переходить в другую потенциальную яму (соседняя потенциальная яма находится на расстоянии  $2d_0$ , рис. 12.26а). Все это говорит о том, что жидкость обладает свойством текучести, то есть она принимает форму сосуда, в котором находится.

Дальнейшее понижение температуры приводит к тому, что вероятность перехода молекул в соседние потенциальные ямы будет уменьшаться (понижается полная энергия молекул и соответственно возрастает высота и ширина потенциальных барьеров) и молекула в основном будет совершать колебания только в своей потенциальной яме. При этом происходит качественный переход (скачок) к твердому телу (к кристаллу), он осуществляется при определенной температуре, называемой температурой плавления.

Однако имеются вещества (их называют аморфными), которые не имеют температуры плавления. У них с понижением температуры происходит плавное уменьшение интенсивности теплового движения без образования кристаллической структуры. Речь идет о янтаре, смолах, битумах и полимерах.

Для того чтобы отличать жидкости, аморфные и кристаллические твердые вещества друг от друга с точки зрения их строения, вводится понятие ближнего и дальнего порядка. **Под ближним порядком** понимают упорядоченное расположение, то есть на определенных расстояниях и в определенных направлениях, ближайших соседних атомов какого-либо произвольного атома в веществе, принятого за центральный атом (относительно него рассматривается расположение атомов в веществе). **Под дальним порядком** понимают упорядоченное расположение (на определенных расстояни-

ях и в определенных направлениях) дальних соседей центрального атома. На рис. 12.26б приведено расположение атомов относительно центрального атома (он обведен окружностью) в кристаллической решетке. Видно, что здесь наблюдается как ближний, так и дальний порядок. В жидкости молекулы отклоняются от своих положений равновесия, но как следует из рис. 12.26б, в них сохраняется ближний порядок (хотя он и будет меньше, чем в кристалле), а дальний порядок отсутствует. В аморфных телах, как и в жидкости, наблюдается только ближний порядок в расположении атомов, а дальнего порядка нет.

Можно отметить, что неопределенность в строении жидкости, ее текучесть приводят к тому, что теория жидкого состояния разработана сравнительно хуже, чем теория газов и твердых тел, поэтому для жидкости достаточно трудно провести количественный расчет многих физико-химических свойств.

Рассмотрим кратко основные особенности жидкого состояния, которые отличают его от газов и от кристаллических твердых тел.

#### 12.2.17.2. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Ранее было отмечено, что между молекулами действуют силы притяжения. Одна молекула взаимодействует, в основном, с молекулами, находящимися от нее на расстояниях в несколько (два-три) межмолекулярных интервалов. Для молекул внутри жидкости результирующая сила притяжения со стороны соседних молекул будет равна нулю (молекула 1, рис. 12.26г). Другая ситуация наблюдается для молекул, находящихся вблизи поверхности жидкости — сфера действия сил притяжения для таких молекул будет усеченной и поэтому возникает результирующая сила, направленная внутрь жидкости (молекула 2, рис. 12.26г).

Это приводит к тому, что часть молекул покидает поверхностный слой, уходит внутрь жидкости, число молекул в поверхностном слое уменьшается. Расстояние между молекулами поверхностного слоя возрастает (расстояние между молекулами  $d_1$  будет больше равновесного расстояния  $d_0$ :  $d_1 > d_0$ , рис. 12.26а), что увеличивает потенциальную энергию этих молекул и приводит к возникновению сил поверхностного натяжения, которые действуют вдоль поверхности жидкости ( $W_p(d_1) > W_p(d_0)$ ,  $Fr = -dW_p/dr$ , рис. 12.26а).

Добавочная энергия, которой обладают молекулы поверхностного слоя по сравнению с молекулами внутри жидкости, получила название **поверхностной энергии**  $W_{\text{пн}}$ .

Силы поверхностного натяжения сокращают поверхность жидкости, и в условиях равновесия поверхность принимает наименьшее значение, она соответствует минимальной поверхностной энергии. Если, например, капля жидкости будет находиться только под действием сил поверхностного натяжения (в условиях невесомости), то тогда форма капли будет шарообразной, то есть наименьшая свободная поверхность жидкости будет представлять собой сферу.

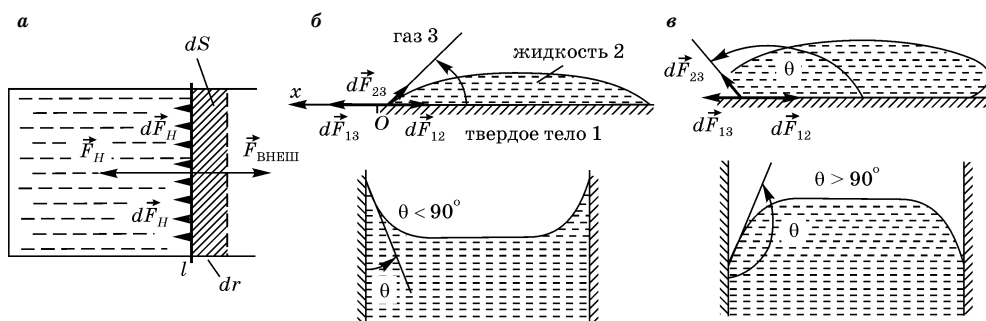


Рис. 12.27

Для количественного описания явления поверхностного натяжения вводится понятие **коэффициента поверхностного натяжения**, он равен отношению поверхностной энергии  $W_{\text{рп}}$  к площади  $S$  поверхности жидкости:

$$\sigma = W_{\text{рп}}/S. \quad (12.118)$$

Можно ввести коэффициент  $\sigma$  и по другой формуле. Для этого рассмотрим процесс медленного растяжения внешней силой пленки жидкости, натянутой на металлический прямоугольный каркас, одна сторона которого представляет собой легко подвижный стержень длиной  $l$  (рис. 12.27а). При этом удвоенная сила поверхностного натяжения, действующая на стержень, равна по модулю внешней силе:  $2F_H = F_{\text{внеш}}$  (коэффициент 2 связан с тем, что у пленки имеются две стороны).

Работа внешней силы в данном случае идет на приращение поверхностной энергии жидкости:

$$dW_{\text{рп}} = dA_{\text{внеш}} = F_{\text{внеш}} dr \cos 0^\circ = 2F_H dr,$$

что позволяет получить следующую формулу:

$$\sigma = dW_{\text{рп}}/dS = (2F_H dr)/(2ldr) = F_H/l, \quad (12.119)$$

где  $dS$  — элементарное изменение площади контура.

Следовательно, коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости.

Поверхностное натяжение жидкостей можно уменьшить, добавляя к ним поверхностно-активные вещества. Так, добавляя к воде мыло, можно значительно понизить ее коэффициент поверхностного натяжения (примерно в два раза), что существенно сказывается на явлении смачивания водой поверхности твердых тел.

### 12.2.17.3. СМАЧИВАНИЕ И НЕСМАЧИВАНИЕ

**Смачивание** — явление, которое возникает при соприкосновении жидкости с поверхностью твердого тела или с другой жидкостью. Оно выражается, в частности, в искривлении свободной поверхности жидкости в области соприкосновения, это изменение (искривление) направлено на увеличение

поверхности их соприкосновения — например капля воды растекается по поверхности стекла (рис. 12.27б).

Может также наблюдаться явление **несмачивания** — капля жидкости не растекается, а собирается, уменьшая область контакта жидкости и поверхности твердого тела (например капля ртути на поверхности стекла, рис. 12.27в).

Эти явления обусловлены взаимодействием молекул твердого тела (1), жидкости (2) и газа (3) в области их контакта друг с другом. В условиях равновесия капли жидкости проекции сил поверхностного натяжения в точке  $O$  (в ней соприкасаются три фазы, рис. 12.27б) на направление оси  $Ox$ , будут равны нулю (проекция сил на вертикальное направление, куда войдет проекция силы тяжести, здесь не рассматривается). Поэтому можно записать следующую формулу:

$$\begin{aligned} dF_{13} - dF_{23}\cos\theta - dF_{12})/dF_{23} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\theta = (\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (12.120)$$

При записи уравнения (12.120) был введен **краевой угол**  $\theta$  — это угол между поверхностью твердого тела и касательной, проведенной к поверхности жидкости в области ее контакта с твердым телом (рис. 12.27б, в). Значение краевого угла зависит от химического состава твердого тела и жидкости, от их чистоты и температуры.

В формулу (12.120) также были введены коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  в соответствии с формулой (12.119).

Рассмотрим частные случаи для углов  $\theta$ . Для этого будем изменять угол  $\theta$  в пределах от нуля до  $180^\circ$  ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ,  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ) за счет выбора разных жидкостей, при этом коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_{13}$  для поверхности раздела твердое тело–газ будет оставаться постоянным ( $\sigma_{13} = \text{const}$ ). Таким изменениям угла  $\theta$  согласно формуле (12.120) соответствует неравенство

$$-1 \leq (\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23} \leq 1. \quad (12.121)$$

При возрастании угла  $\theta$  от нуля до  $180^\circ$  в поверхностном слое будет происходить уменьшение силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела по сравнению с силами взаимодействия между молекулами жидкости. Это приводит к переходу от явления полного смачивания к явлению полного несмачивания, что сказывается на площади соприкосновения капли жидкости, помещенной на поверхность твердого тела, с его поверхностью.

1.  $\theta = 0$ . Этому значению угла  $\theta$  соответствует **полное смачивание** жидкостью поверхности твердого тела, при этом для такой жидкости выполняется условие:  $\cos\theta = 1 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23}$ . Тогда в поверхностном слое силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела будут значительно больше сил взаимодействия между молекулами жидкости, что приводит к малым значениям коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma_{12}$  для поверхности, разделяющей твердое тело и жидкость. При полном

смачивании капля жидкости, помещенная на поверхность твердого тела, под действием сил поверхностного натяжения растекается по его поверхности в виде тонкой пленки.

Отметим, что полное смачивание также наблюдается для условия

$$\sigma_{13} > (\sigma_{12} + \sigma_{23}).$$

2.  $0 < \theta < 90^\circ$ . Наблюдается **частичное смачивание** жидкостью поверхности твердого тела. В этом случае  $0 < (\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23} < 1$ . При возрастании угла  $\theta$  в поверхностном слое происходит уменьшение сил взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела по сравнению с силами взаимодействия между молекулами жидкости (это происходит за счет выбора жидкости), что приводит к увеличению  $\sigma_{12}$  и уменьшению разности  $(\sigma_{13} - \sigma_{12})$ , смачиваемость поверхности твердого тела уменьшается. Это означает, что капля жидкости увеличивает площадь соприкосновения с поверхностью твердого тела, но уже в меньшей степени, чем при полном смачивании.

3.  $\theta = 90^\circ$ . При этом угле  $\sigma_{13} - \sigma_{12} = 0$ . Следовательно, в поверхностном слое силы взаимодействия между молекулами твердого тела и молекулами газа, с одной стороны, и молекулами твердого тела и жидкости — с другой, будут одинаковыми. Поэтому не возникает суммарной силы, вызывающей перемещение молекул воды по поверхности твердого тела. Капля жидкости, помещенная на поверхность твердого тела, не изменяет площади соприкосновения с ней, **явление смачиваемости будет отсутствовать**.

4.  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ . Наблюдается **частичное несмачивание** поверхности твердого тела жидкостью. При увеличении угла  $\theta$  в поверхностном слое происходит уменьшение сил взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела по сравнению с силами взаимодействия молекул жидкости друг с другом; это приводит к возрастанию коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma_{12}$ , разность в скобках  $(\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23}$  становится меньше нуля, что вызывает большую несмачиваемость поверхности твердого тела жидкостью. Это означает, что капля жидкости, помещенная на поверхность твердого тела, уменьшает площадь соприкосновения с ней.

5.  $\theta = 180^\circ$ . При угле  $\theta = 180^\circ$  наблюдается **полное несмачивание**, чему соответствует неравенство  $\sigma_{12} \geq (\sigma_{13} + \sigma_{23})$ . Силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела существенно ослабевают по сравнению с силами взаимодействия молекул жидкости друг с другом,  $\sigma_{12}$  еще больше возрастает, что и приводит к полной несмачиваемости жидкостью поверхности твердого тела.

При явлении полного несмачивания капля жидкости под действием силы тяжести приобретает форму сплюснутой сферы и соприкасается с поверхностью твердого тела только в одной точке (идеальный случай).

Смачивание имеет большое значение в промышленности. Хорошее смачивание необходимо при крашении и стирке, обработке фотографических материалов, нанесении лакокрасочных покрытий и др. Снизить смачиваемость до минимума стремятся при получении гидроизоляционных материалов и т. д.



12.1.17.4.  
КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.  
ФОРМУЛА ЛАПЛАСА.  
ВЫСОТА ПОДНЯТИЯ ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРЕ

Под капиллярными явлениями понимают подъем или опускание жидкости в капиллярах (узких трубках) по сравнению с уровнем жидкости в широких сосудах, в которые эти капилляры опущены.

**Мениском** называют искривленную свободную поверхность жидкости вблизи границы ее соприкосновения с твердым телом (например вблизи стенок сосуда, рис. 12.27б, в). В капиллярных трубках мениск имеет сферическую форму — вогнутую, если имеет место смачивание, и выпуклую — при отсутствии смачивания (рис. 12.28а, в).

Оказывается, что искривленный поверхностный слой оказывает на жидкость дополнительное давление. В случае выпуклого мениска поверхностный слой, стремясь сократиться, сжимает жидкость, а для вогнутого мениска — растягивает ее (рис. 12.28а, в).

**Формула Лапласа.** Найдем добавочное давление, которое оказывает мениск на жидкость. Для этого рассмотрим самый простой случай, когда жидкость находится в вертикальной цилиндрической трубке радиуса  $r$  и полностью не смачивает ее стенки. В этом случае мениск представляет собой полу сферу, обращенную выпуклой стороной вверх (рис. 12.28а,  $\theta = 180^\circ$ ).

Силы давления поверхностного слоя, действующие на жидкость, направлены вертикально вниз (рис. 12.28б), и их результирующая сила равна по модулю  $F = 2\pi \cdot r\sigma$ . Для определения добавочного давления эту силу следует разделить на площадь поперечного сечения трубки  $S = \pi \cdot r^2$ . В итоге можно записать:

$$p_{\text{л}} = 2\sigma/r. \quad (12.122)$$

Данная формула получила название формулы Лапласа, а давление  $p_{\text{л}}$  называют лапласовым давлением.

В более общем случае для произвольного краевого угла  $\theta$  ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ) сферическая поверхность мениска будет иметь радиус  $R$  ( $R = r/|\cos \theta|$ , рис. 12.28д) и формула Лапласа примет вид:

$$p_{\text{л}} = 2\sigma|\cos \theta|/r. \quad (12.123)$$

Под выпуклым мениском лапласово давление будет положительным (общее давление в жидкости будет превышать давление при отсутствии капиллярных явлений), а для вогнутого мениска — отрицательным (рис. 12.28в).

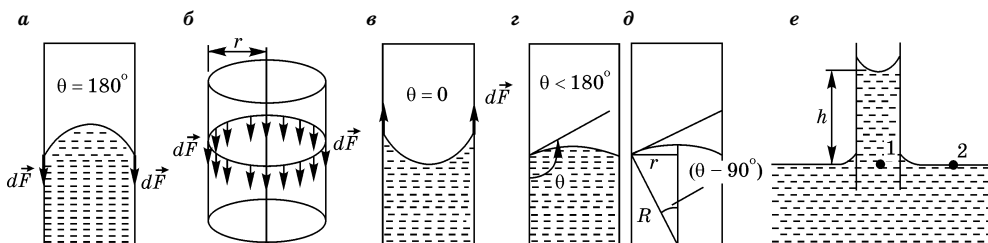


Рис. 12.28

Отметим, что внутренняя и внешняя части пленки мыльного пузыря оказывают по отдельности дополнительное давление, определяемое по формуле (12.122), и поэтому лапласово давление внутри пузыря будет равно  $p_{\text{л}} = 4\sigma/r$ .

**Высота поднятия жидкости в капилляре.** Выведем формулу для высоты  $h$ , на которую поднимается жидкость в капилляре радиуса  $r$  в случае полного смачивания его стенок жидкостью ( $\theta = 0$ , рис. 12.28е). Давление в капилляре на уровне свободной поверхности жидкости в широком сосуде (точка 1) равно атмосферному давлению, это следует из условия равновесия жидкости:  $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$ . Далее в капилляре давление в точке 1 складывается из атмосферного давления ( $p_{\text{атм}}$ ), давления столба жидкости (гидростатического давления  $p_{\text{г}} = \rho gh$ ) и лапласова давления ( $p_{\text{л}} = 2\sigma/r$ , оно войдет в формулу со знаком минус). Подставляя эти давления в условие равновесия жидкости, получим

$$p_{\text{атм}} = p_{\text{атм}} + \rho gh - 2\sigma/r \Rightarrow h = 2\sigma/(\rho gr).$$

Для произвольного угла  $\theta$  ( $0 < \theta < 90^\circ$ ) формула примет вид:

$$h = 2\sigma \cos \theta / (\rho gr). \quad (12.124)$$

Различают кристаллическое и аморфное твердые тела. В аморфных телах атомы колеблются вокруг хаотически расположенных точек. Кристаллическому телу соответствует устойчивое состояние равновесия (минимум внутренней энергии). В нем наблюдается упорядоченное расположение атомов в пространстве (кристаллическая решетка). Физика твердого тела как наука объединяет исследования различных свойств (магнитных, механических, электрических и т. д.) твердых тел. Это позволяет ей, откликаясь на потребности практики, непосредственно получать материалы с наперед заданными свойствами. Над этой задачей трудится значительная часть физиков всего мира, что предопределяет значение физики твердого тела в развитии современной физической теории. Разрабатываемые в рамках физики твердого тела подходы и идеи широко используются в различных областях физики (например биофизика, ядерная физика, астрофизика и т. д.). По сравнению с кристаллами теория свойств аморфных тел разработана значительно слабее.

Изучая кристаллическую структуру твердых тел в 1890–1891 гг., Е. С. Федоров доказал возможность существования 230 вариантов упорядоченного расположения частиц в твердом теле. В настоящее время широко применяются методы исследования экспериментального расположения атомов в кристаллах, основанные на наблюдении дифракции рентгеновских лучей, электронов и нейтронов.

Отметим также тот факт, что для описания различных явлений и свойств твердых тел в настоящее время широко используют представление о квантовых газах квазичастиц (газ фононов, газ электронов и дырок, газ магнонов, экситонов и т. д.). Так, например, колебания атомов в узлах кристаллической решетки приводят к волновому полю тепловых возбуждений, это волновое поле описывают газом фононов; нарушение магнитного порядка распространяется в кристалле в виде магнитных волн, которое описывается газом магнонов, электропроводность твердых тел газом электронов и дырок и т. д.

## 13.1. СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

### 13.1.1. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

Для кристаллов характерен строгий порядок в расположении атомов. Для того чтобы его описать, вводят ряд понятий. К ним относят **кристаллическую решетку** и **элементарную ячейку**.

Кристаллическая решетка — это правильная пространственная сетка, в узлах которой располагаются частицы, образующие кристалл.

Элементарная ячейка — наименьший многогранник (параллелепипед), который можно выделить в кристалле и повторением которого можно воспроизвести весь кристалл.

Существует семь видов элементарных ячеек, которые отличаются длиной сторон и углами при одной из ее вершин (рис. 13.1а). Поэтому выделяют семь кристаллических систем (сингоний). К ним относятся триклинная ( $a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ ), моноклинная, ромбическая, тригональная, гексагональная, тетрагональная и кубическая системы ( $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ).

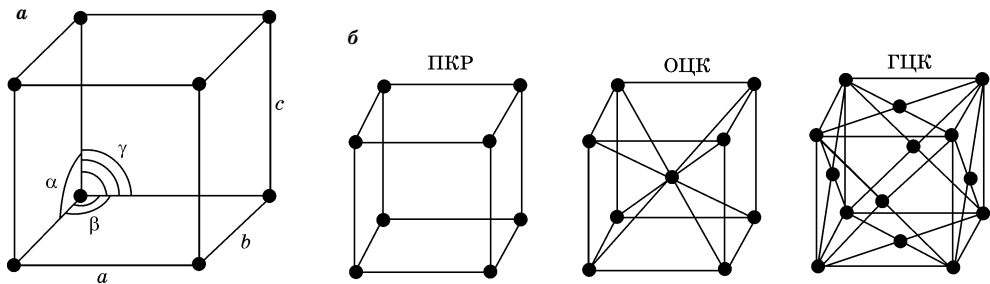


Рис. 13.1

Если частицы, образующие кристалл, располагаются только в вершинах элементарной ячейки, то она называется примитивной. Для того чтобы более полно описать симметрию решетки, вводят сложную элементарную ячейку, для которой частицы, образующие кристалл, располагаются не только в ее вершинах, но также в центрах граней и внутри ячейки. Так, например, для кубической системы выделяют ячейки для простой кубической решетки (ПКР), объемно-центрированной кубической решетки (ОЦК) и гранецентрированной кубической решетки (ГЦК) (рис. 13.1б).

Понятие плотности упаковки определяет число атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку.

Для простой кубической решетки каждый атом в вершине ячейки принадлежит одновременно восьми ячейкам, поэтому плотность упаковки для ПКР составляет один атом на ячейку:  $N_{\text{уп}} = 8 \cdot (1/8) = 1$ . Для ОЦК-структуры  $N_{\text{уп}} = 8 \cdot (1/8) + 1 = 2$ , а для наиболее плотноупакованной ГЦК-структуры  $N_{\text{уп}} = 8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) = 4$  (рис. 13.1).

### 13.1.2. ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ, АМОРФНЫЕ МЕТАЛЛЫ, КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

Как уже было отмечено в п. 12.1.17, в кристаллах наблюдается ближний и дальний порядок в расположении атомов, а в жидкостях и аморфных веществах только ближний порядок.

В настоящее время по свойствам своего строения выделяют такие группы веществ, как жидкие кристаллы, квазикристаллы, аморфные металлы, поликристаллы и т. д.

**Жидкие кристаллы.** Существуют вещества, молекулы которых представляют собой длинные нити или плоскости, упакованные атомами. При повышении температуры у них наблюдаются две температуры плавления ( $T_{пл1} < T_{пл2}$ ).

При температуре  $T = T_{пл1}$  происходит переход от кристалла к жидкому кристаллу; это состояние характеризуется наличием ближнего и дальнего порядка только в одном направлении (либо в направлении вдоль нитевидных молекул, либо в направлении, перпендикулярном плоскостям молекул). При переходе через вторую температуру  $T = T_{пл2}$  исчезает дальний порядок, остается только ближний порядок, то есть возникает жидкое состояние.

Состояние жидкого кристалла характеризуется тем, что малые изменения внешних параметров существенно влияют на его свойства (например малые изменения температуры жидкого кристалла могут изменять его цвет, что используется при изготовлении мониторов и других индикаторных устройств).

**Квазикристаллы.** Оказывается, что в природе существуют кристаллы, у которых имеется ось симметрии первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков. Вращением вокруг этих осей на углы  $\alpha = 360^\circ/n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 6$ ) совмещают кристалл сам с собой. За последнее время научились вырабатывать кристаллы с осью симметрии пятого порядка ( $n = 5$ ), их стали называть квазикристаллами. Отметим, что структура некоторых вирусов также обладает осью симметрии пятого порядка.

**Аморфные металлы.** При низких температурах металлы обладают кристаллическим строением. Но при резком охлаждении металла из жидкого состояния кристаллическая структура может и не возникнуть, такое состояние металла называют аморфным металлом. Его структура напоминает структуру аморфного вещества, замерзшей жидкости. Это состояние металла является неравновесным, но оно может существовать достаточно долго из-за малой интенсивности теплового движения атомов при низких температурах.

Аморфные металлы обладают рядом уникальных свойств по сравнению с обычными металлами, это, например, относится к их электросопротивлению, магнитной восприимчивости и т. д.

Все это свидетельствует о динамичном развитии раздела физики, посвященного строению различных групп веществ.

### 13.1.3. ДЕФЕКТЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ. ТОЧЕЧНЫЕ ДЕФЕКТЫ. ОДНОМЕРНЫЕ, ДВУХМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ДЕФЕКТЫ

Известно, что при температурах, близких к абсолютному нулю температур ( $T = 0$  К), может существовать идеальный кристалл. В нем отсутствуют тепловые колебания атомов в узлах кристаллической решетки, отсутствуют все дефекты кристаллического строения (например примесные атомы, дефекты Шоттки и Френкеля, дислокации и т. д.). При этом энтропия кристалла будет равна нулю (третье начало термодинамики), что означает наличие только сил потенциального поля, и вследствие этого кристалл занимает одно-единственное возможное микросостояние. С увеличением температуры, то есть с появлением фактора теплового движения, закономерным является процесс возрастания хаоса в движениях молекул кристалла по координатам и скоростям — и следствием этого является возникновение различных дефектов решетки, их число возрастает, энтропия кристалла увеличивается.

Рассмотрим, какие виды дефектов кристаллической решетки возникают в кристаллах.

**Точечные дефекты. Дефекты Френкеля и Шоттки.** Вид потенциального поля для атомов в кристалле можно представить, используя график зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух атомов от расстояния между ними (рис. 13.2а). При полной энергии частицы, соответствующей кристаллу ( $W < 0$ ), атомы совершают колебания в узлах кристаллической решетки. Чем больше температура кристалла, тем больше интенсивность (амплитуда) колебаний.

Для направления  $OO_1$ , плотноупакованного атомами, атомы могут располагаться только в узлах решетки, а для направления  $OO_2$  возникают дополнительные неглубокие потенциальные ямы, расположенные в пространстве между узлами (рис. 13.2б, в).

За счет теплового движения часть атомов с повышенными кинетическими энергиями теплового движения может переходить в эти потенциальные ямы, то есть переходить в пространство между узлами. В этом случае возникает дефект решетки, называемый дефектом Френкеля. Итак, дефект Френкеля образуется за счет внутреннего «испарения» и представляет собой вакансию (незанятый атомом узел) и атом в пространстве между узлами (рис. 13.2г).

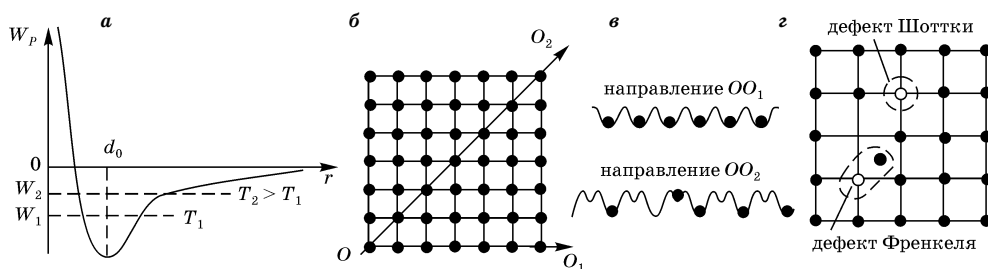


Рис. 13.2

Дефект Шоттки образуется за счет внешнего «испарения» (атом уходит с поверхности металла) и представляет собой незанятый атомом узел решетки (рис. 13.2з). За счет переходов атомов в этот незанятый узел дефект Шоттки перемещается внутрь кристалла.

Энергия образования дефектов Френкеля и Шоттки составляет соответственно  $W_{\text{Фр}} \approx (3 \div 5)$  эВ,  $W_{\text{Ш}} \approx 1$  эВ. Концентрация дефектов ( $n_d$ ) Френкеля и Шоттки изменяется с температурой по экспоненциальному закону

$$n_d \approx n \exp(-W_{\text{Фр(Ш)}}/kT), \quad (13.1)$$

где  $n$  — концентрация атомов в кристалле.

При температурах, близких к температуре плавления кристалла, концентрация дефектов становится значительной, что и приводит к скачкообразному разрушению кристаллической решетки. Напомним, что энергия теплового движения при комнатной температуре ( $T = 300$  К) будет равна  $kT = 0,025$  эВ.

**Точечные дефекты. Примеси.** Под примесью элемента  $B$  в матрице элемента  $A$  понимают добавление малого количества атомов  $B$  в кристалл элемента  $A$ . Примесь может быть примесью замещения (атом  $B$  замещает атом  $A$  в кристаллической решетке элемента  $A$ ) и примесью внедрения (атом  $B$  занимает пространство между узлами, внедряется в кристаллическую решетку элемента  $A$ , рис. 13.3а).

Примеси оказывают существенное влияние на ряд физико-химических свойств кристалла элемента  $A$ . Прежде всего, примесный атом искажает вокруг себя кристаллическую решетку на расстояниях от десяти до ста межатомных расстояний ( $(10 \div 100)d_0$ ), такое искажение будет затрагивать порядка тысячи атомов кристалла  $A$ . Также примесные атомы вводят новый тип взаимодействия между атомами элемента  $B$  и элемента  $A$  ( $B - A$ ).

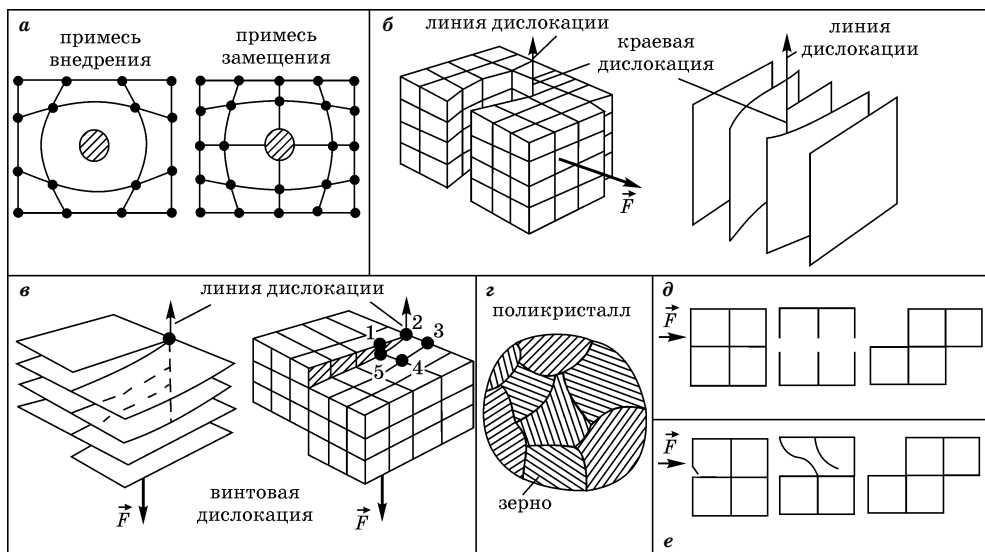


Рис. 13.3

В качестве примера существенного влияния примесей на ряд свойств чистых веществ можно привести изменение электросопротивления чистых полупроводников при введении в них малых добавок примесных атомов, валентность которых либо меньше, либо больше валентности атомов полупроводника (сопротивление полупроводника увеличивается в  $10^6$  раз). Так, для получения легированной стали в чугуны (расплав углерода и железа) вводятся малые добавки других элементов, таких как хром, марганец, вольфрам и т. д. В этом случае получают стали с различными служебными характеристиками (жаропрочные, кислотостойкие, хладостойкие, трансформаторные и т. д.).

В настоящее время ставятся задачи, во-первых, получения сверхчистых веществ. При уменьшении содержания примесей вещества (элементы) могут существенно изменить некоторые характеристики. Например, вольфрам, который считается хрупким материалом, при уменьшении содержания примесей становится пластичным, то есть легко деформируется. Во-вторых, решаются задачи, связанные с введением в чистую матрицу атомов элемента *A* других элементов в определенном количестве (речь идет о добавках порядка нескольких атомов) на определенную глубину в кристалл (изготовление больших интегральных схем, применение нанотехнологий).

**Линейные, двумерные и объемные дефекты.** К линейным дефектам можно отнести дислокации (краевые и винтовые). Кристаллическую структуру кристалла можно представить как набор параллельных плоскостей, упакованных атомами. Тогда краевая дислокация представляет собой линию, вдоль которой обрывается внутри кристалла край «лишней» полуплоскости (см. рис. 13.3б). Ее образование можно представить как смещение полуплоскости на один период решетки в направлении, перпендикулярном направлению линии дислокации (эта линия располагается вдоль линии обрыва плоскости). Винтовая дислокация образуется в том случае, когда одна часть решетки кристалла смещается относительно другой в направлении, параллельном линии дислокации (см. рис. 13.3в). Название «винтовая» дислокация связано с тем, что в области такой дислокации перемещение от атома 1 к атому 5 происходит по винтовой линии (1–2–3–4–5).

Между предельными случаями краевой и винтовой дислокаций возможны любые промежуточные случаи.

К двумерным (поверхностным) дефектам можно отнести границы зерен в поликристаллах, границы доменов в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках и поверхность кристалла. К поверхностным дефектам также можно отнести ряды и сетки дислокаций.

Поясним, что понимают под границей зерен в кристаллах. Обычно упорядоченная кристаллическая структура распространяется не на весь кристалл, а существует в малых объемах, называемых зернами. Тогда такое состояние кристаллического вещества называют поликристаллом (см. рис. 13.3г). Граница зерен является двумерным дефектом.

К объемным дефектам относятся скопление вакансий, включения посторонней фазы, пузырьки газов, скопление примесных атомов на дислокациях и т. д.



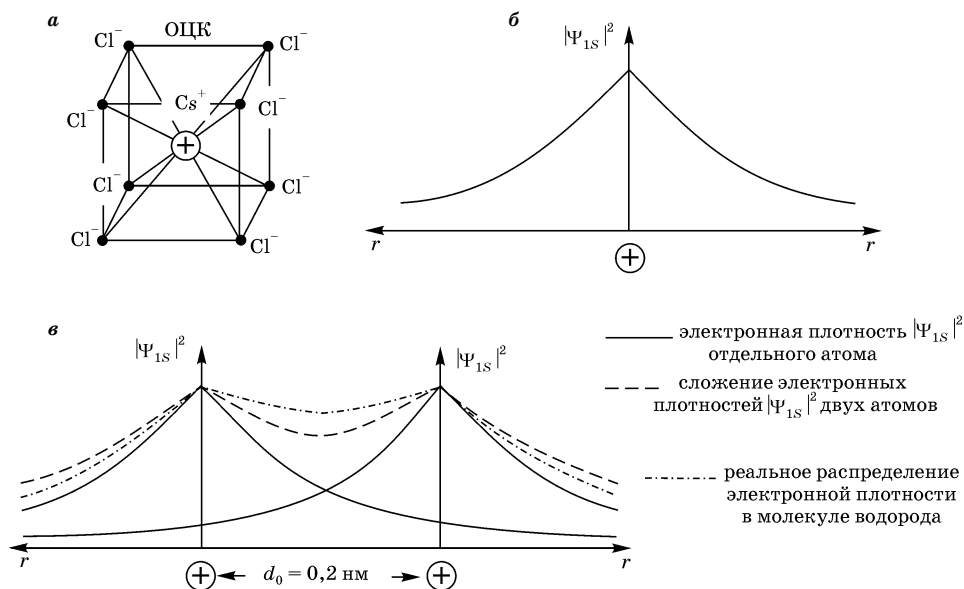
Наличие дислокаций оказывает существенное влияние на механические свойства кристалла, на его пластичность. Действительно, при отсутствии дислокаций сдвиг двух частей кристалла относительно друг друга на одно межатомное расстояние требует обрыв всех межатомных расстояний, что требует значительных усилий (рис. 13.3*д*). Если же создать дислокацию и затем ее переместить по всему кристаллу, то в итоге получится такой же результат, но со значительно меньшими усилиями (рис. 13.3*е*). Этот процесс аналогичен смещению ковра, расположенного на полу, на малое расстояние — создается складка на ковре (дислокация), и затем она без лишних усилий перемещается по всему коврау.

Отметим, что линейные, двумерные и объемные дефекты кристаллической решетки оказывают влияние в основном на механические свойства кристаллов.

## 13.2. ТИПЫ СВЯЗЕЙ В КРИСТАЛЛАХ

Рассмотрим основные типы связей, существующие в кристаллах. К ним можно отнести ионную, ковалентную, металлическую, молекулярную и водородную связи. Все эти типы связей имеют одну и ту же электромагнитную природу, но качественно отличаются друг от друга. Можно отметить, что тот или иной тип связи определяется числом электронов на внешней заполненной оболочке атомов.

**Ионная связь.** В узлах кристаллической решетки находятся ионы различного знака. Ионы одного знака окружены ионами противоположного знака, поэтому силы притяжения преобладают над силами отталкивания.



Ионная связь является ненаправленной (интенсивность взаимодействия одинакова по всем направлениям) и ненасыщенной (каждый ион может взаимодействовать со всеми ионами кристалла). Ионная связь образуется между элементами, один из которых легко отдает электроны, а другой легко их принимает. Причем у атомов этих элементов образуются полностью заполненные внешние электронные оболочки, что способствует образованию такой связи.

Примерами кристаллов с ионным типом связи являются щелочно-галлоидные кристаллы, такие как NaCl, KCl, NaF и т. д. Эти кристаллы имеют плотноупакованные структуры типа ОЦК, ГЦК и т. д. (см. рис. 13.4а).

**Ковалентная связь.** В узлах кристаллической решетки находятся атомы. Ковалентная связь образуется за счет возникновения общей пары электронов между двумя атомами, и ей нет объяснения в рамках классической физики.

Примерами кристаллов с ковалентной связью являются алмаз, полупроводники, такие как Si, Ge, Te (рис. 13.5а). Атомы в молекулах  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  также связаны ковалентной связью.

Рассмотрим, как объясняется ковалентная связь в квантовой теории на примере молекулы водорода. В изолированном атоме водорода электрон находится в  $1s$ -состоянии, его волновая функция имеет вид:  $\Psi_{1s}(r) = Ae^{\{r/r_1\}}$ . На рис. 13.4б приведен график зависимости квадрата модуля волновой функции  $|\Psi_{1s}|^2$  для электрона от расстояния  $r$  до ядра в атоме водорода (сплошная линия).

На большом расстоянии двух атомов водорода друг от друга перекрытия их электронных плотностей не происходит, то есть каждый электрон будет принадлежать своему атому. Если сблизить атомы до расстояний, соответствующих молекуле водорода ( $d_0 = 2 \cdot 10^{-10}$  м), то тогда теряет смысл понятие свой/чужой электрон, они принадлежат одновременно двум атомам, и вероятность найти электрон возле своего и чужого атома одинакова. Этот вывод следует из сложения электронной плотности  $|\Psi_{1s}|^2$  для каждого электрона (пунктирная линия на рис. 13.4б).

Решение квантово-механической задачи на молекулу водорода приводит к тому, что такое состояние характеризуется выигрышем в энергии и повышенной электронной плотностью в пространстве между ядрами (на рис. 13.4в штрихпунктирная линия располагается выше в пространстве между ядрами, чем пунктир при простом сложении электронных плотностей отдельных атомов).

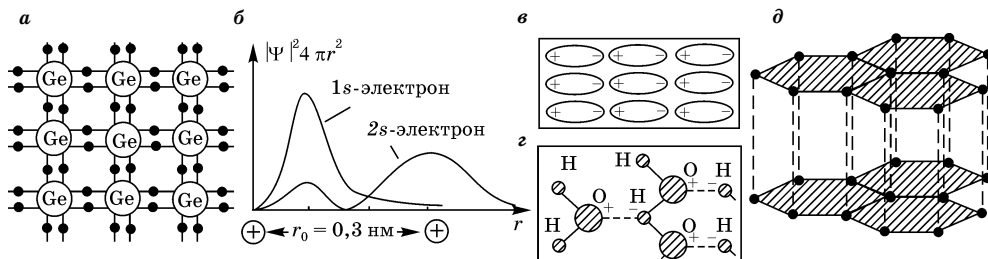


Рис. 13.5

Добавочная энергия называется обменной энергией, она связана с обменным эффектом. Обменный эффект является следствием принципиальной неразличимости тождественных частиц в квантовой механике, то есть тождественные частицы нельзя пронумеровать (см. п. 13.3).

Обменная энергия зависит от взаимной ориентации спинов двух электронов. Для атома водорода спины электронов направлены в противоположные стороны.

Ковалентная связь является направленной и насыщенной, для нее характерны рыхлые структуры и высокие температуры плавления кристаллов.

**Металлическая связь.** В узлах кристаллической решетки находятся положительно заряженные ионы. Валентные электроны отрываются от атомов и образуют газ свободных электронов, который стягивает решетку ионов, поэтому появляется выигрыш в связи.

Для металлов валентные электроны принадлежат всему кристаллу, в отличие от ковалентной связи, в которой валентные электроны принадлежат одновременно двум соседним атомам. Такое различие связано с тем, что вероятность найти валентный электрон около чужого атома в металлах больше, чем у своего. Это приводит к переходу электрона от своего атома к соседнему атому, затем к другому атому и т. д. Так, например, для лития вероятность найти  $2s$ -электроны больше у чужого атома, чем у своего (для этих электронов плотность электронного облака выше вблизи соседнего атома, рис. 13.5б), в то время как для  $1s$ -электронов вероятность найти их около своего атома больше (рис. 13.5б).

Металлическая связь является ненаправленной и ненасыщенной, поэтому для металлов характерны плотноупакованные структуры (ГЦК, ГПУ, ОЦК).

**Молекулярная связь.** В узлах решетки находятся молекулы, атомы которых связаны ковалентной связью (сильной связью, например,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ), или атомы инертных газов (например атомы гелия и аргона). Между молекулами действуют силы Ван-дер-Ваальса, они обусловлены взаимодействием дипольных моментов молекул (рис. 13.5в). Различают три вида сил межмолекулярного притяжения.

1. Ориентационные силы возникают между дипольными моментами полярных молекул.

2. Индукционные силы обусловлены взаимодействием между дипольным моментом полярной молекулы и наведенным дипольным моментом неполярной молекулы.

3. Дисперсионные силы связаны с возникновением корреляции в движении электронов соседних неполярных молекул, поэтому молекулы приобретают наведенные дипольные моменты, что и приводит к возникновению сил притяжения между ними.

Эти силы зависят от расстояния между молекулами по закону ( $\sim 1/r^7$ ), то есть быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Поэтому молекулярная связь является непрочной. Кристаллы с таким видом связи имеют низкие температуры плавления.

**Водородная связь.** Примером водородной связи является связь между атомом водорода одной молекулы воды и атомом кислорода другой молекулы

воды (см. рис. 13.5г), водородная связь показана штриховой линией. Это становится возможным в силу того, что атом кислорода притягивает электрон атома водорода и водородная связь представляет собой силу притяжения положительно заряженного атома водорода и отрицательно заряженного атома кислорода.

Водородная связь приводит к образованию дополнительных связей между большим числом молекул, что существенно изменяет свойства вещества (например повышает его вязкость в жидком состоянии).

Нужно отметить, что в реальных кристаллах присутствуют многие типы связей, но один из них является преобладающим. Например, в соединении SiC ковалентная связь составляет 88%, а ионная и металлическая связи вместе — 12%.

Можно также привести характерный пример сосуществования разных типов связи в кристалле. Так, в графите атомы углерода в параллельных плоскостях располагаются в углах правильных шестиугольников и связаны ковалентной связью (сильная связь), а между плоскостями существует молекулярный тип связи (слабая связь, рис. 13.5д). Поэтому писать графитовым карандашом легко, молекулярные связи рвутся и отслаиваются отдельные плоскости графита.

### 13.3. ОПИСАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТИЦ

#### 13.3.1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. СХЕМА ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

**Фазовое пространство.** Для удобства описания статистических свойств идеального газа частиц вводится понятие фазового пространства — это шестимерное пространство, по осям которого откладывают координаты и проекции импульсов частиц  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  системы. С точки зрения классической физики состояние каждой частицы в этом пространстве изображается точкой, а состояние всего газа — совокупностью  $N$  точек ( $N$  — полное число частиц).

В квантовой физике состояние отдельных частиц из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга нельзя задать определенными значениями их импульсов и координат. Наличие волновых свойств частиц приводит к тому, что в фазовом пространстве на одно состояние частицы приходится не точка, а ячейка фазового пространства, объем  $\Delta\Gamma$  которой можно оценить из соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta\Gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = V \Delta\Gamma_p; \quad (13.2)$$

$$\Delta\Gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = (\Delta x \Delta p_x)(\Delta y \Delta p_y)(\Delta z \Delta p_z) \geq h \cdot h \cdot h = h^3$$

$$\Delta\Gamma = h^3, \quad (13.3)$$

где  $(\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z)$  — объем ячейки в обычном трехмерном пространстве и  $d\Gamma_p = dp_x dp_y dp_z$  — объем ячейки в пространстве импульсов.

Итак, на одно состояние частицы в фазовом пространстве приходится ячейка размером  $\Delta\Gamma = h^3$ .

**Схема описания свойств идеального газа частиц в квантовой физике.** Как уже отмечалось (см. п. 12.1.1), описание свойств системы частиц предполагает получение информации о распределении частиц по энергиям, координатам и импульсам. Это позволяет найти среднее значение энергии частицы, полную энергию системы частиц, а также средние значения любых функций энергии, любых функций координат и импульсов, следовательно, описать свойства системы частиц.

В квантовой физике состояние отдельных частиц из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга определяется не импульсами и координатами, а волновыми функциями частиц и их энергетическим спектром, который является дискретным. Поэтому для описания свойств системы частиц, обладающих волновыми свойствами, необходимо знать энергетический спектр частиц и, кроме того, их распределение по квантовым состояниям (или по ячейкам фазового пространства) на каждом уровне энергии.

Расчет равновесных свойств системы требует отыскания из всевозможных распределений наиболее вероятного распределения, которому соответствует наибольшая вероятность (см. п. 12.2.5).

Рассмотрим систему, представляющую собой идеальный газ частиц, обладающих волновыми свойствами. Распределение таких частиц по ячейкам фазового пространства задается их функциями распределения.

**Функции распределения  $f(W_K)$  определяют среднее число частиц в одном квантовом состоянии (в одной фазовой ячейке) с энергией  $W_K$**

$$f(W_K) = \frac{N_K}{g_K}, \quad (13.4)$$

где  $N_K$  — это число частиц с энергией  $W_K$ ;  $g_K$  — число фазовых ячеек на уровне энергии  $W_K$  или число квантовых состояний на этом уровне энергии.

При известной функции распределения можно оценить число частиц  $N$  в системе и их полную энергию  $W_{\text{полн}}$  по формулам:

$$N = \alpha \sum_K g_K f_K, \quad W_{\text{полн}} = \alpha \sum_K g_K f_K W_K, \quad (13.5)$$

где сумма идет по всем уровням энергетического спектра частицы.

Для квазинепрерывного энергетического спектра частиц (спектр дискретный, но его дискретностью можно пренебречь в условиях данной задачи) можно в формуле (13.5) перейти к интегралам

$$N = \alpha \int_0^{\infty} f(W) g(W) dW, \quad W_{\text{полн}} = \alpha \int_0^{\infty} W f(W) g(W) dW. \quad (13.6)$$

В этих формулах введена функция плотности квантовых состояний (фазовых ячеек)  $g(W)$ , которая определяет число  $dN_{\text{сост}}$  квантовых состояний (фазовых ячеек), заключенных в интервале энергий  $(W, W + dW)$ :

$$g(W) = \frac{dN_{\text{сост}}}{dW}. \quad (13.7)$$

Коэффициент  $\alpha$  в формуле (13.6) учитывает тот факт, что в одной фазовой ячейке могут находиться несколько частиц в разных состояниях, отличающихся другими параметрами. Например, если частица имеет спин  $S$ , то проекция спина на некоторое направление в пространстве может принимать  $(2S + 1)$  значений (для электрона  $S = 1/2$ , то есть  $\alpha = 2$ ). Для фотонов определенной частоты и направления движения существуют две возможных поперечных поляризации, поэтому  $\alpha = 2$ .

Число частиц в интервале энергий  $(W, W + dW)$  будет равно произведению числа квантовых состояний  $dN_{\text{сост}}$  в этом интервале на число частиц в этих квантовых состояниях:

$$dN = \alpha f(W) dN_{\text{сост}} = \alpha f(W) g(W) dW. \quad (13.8)$$

### 13.3.2. ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЧАСТИЦ

Рассчитаем функцию плотности состояний (плотности фазовых ячеек) для идеального газа квантовых частиц, находящегося в объеме  $V$  в отсутствие внешнего потенциального поля. В этом случае фазовый объем ячейки составит  $\Delta\Gamma = V\Delta\Gamma_p = h^3$ , что позволяет оценить объем фазовой ячейки в пространстве импульсов  $\Delta\Gamma_p = h^3/V$ .

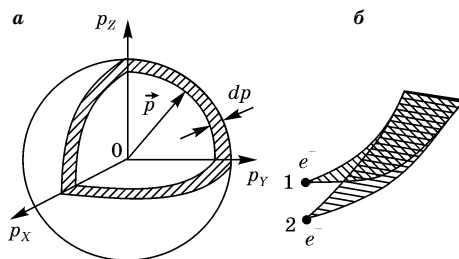


Рис. 13.6

Плотность квантовых состояний  $g(p)$  найдем, разделив объем шарового слоя  $(p, p + dp)$  на объем одной фазовой ячейки (рис. 13.6a)

$$dN_{\text{сост}} = g(p) dp = \frac{4\pi p^2 dp}{\Delta\Gamma_p} = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} \Rightarrow g(p) = \frac{4\pi p^2 dp}{\Delta\Gamma_p} = \frac{4\pi p^2 V}{h^3}. \quad (13.9)$$

Полученная формула применима для любого идеального газа квантовых частиц. Если задать конкретный вид зависимости энергии частицы от ее импульса ( $W = W(p)$ ), то тогда можно получить функцию плотности состояний по энергиям  $g(W)$ . Рассмотрим формулы для функции плотности состояний для конкретных случаев идеального газа частиц.

**1. Газ свободных электронов в металле.** Для газа свободных электронов в металле энергия электронов совпадает с их кинетической энергией:  $W = p^2/(2m)$ , поэтому

$$g(W)dW = g(p)dp \Rightarrow g(W) = g(p)(dp/dW) = g(p)p/m \Rightarrow \\ \Rightarrow g(W) = c\sqrt{W}, \quad c = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}, \quad (13.10)$$

где введена постоянная  $c$ , она не зависит от энергии. В формуле (13.10)  $m$  обозначает массу электрона.

**2. Идеальный газ классических частиц (молекул) в отсутствие внешнего потенциального поля.** Для них, как и для газа свободных электронов, справедлива такая же формула связи между кинетической энергией и импульсом:  $W = p^2/(2m_0)$ . Поэтому формула (13.10) применима и в этом случае:

$$g(W) = c\sqrt{W}, \quad c = \frac{2\pi V}{h^3}(2m_0)^{3/2}, \quad (13.11)$$

где  $m_0$  — масса молекулы.

**3. Идеальный газ фотонов.** Запишем функцию плотности состояний  $g(\nu)$  для газа фотонов в зависимости от их частоты  $\nu$ . Для этого используем известные для фотонов формулы:  $W = h\nu = pc \Rightarrow p = h\nu/c$ .

$$g(\nu)d\nu = g(p)dp \Rightarrow g(\nu) = g(p)(dp/d\nu) = g(p)(h/c) \Rightarrow \\ \Rightarrow g(\nu) = \frac{4\pi V(h\nu/c)^2}{h^2c} = \frac{4\pi V\nu^2}{c^3}. \quad (13.12)$$

**4. Идеальный газ фононов** (о фононах подробнее см. п. 13.3.1). Функцию плотности фононных состояний  $g(W)$  для фононов рассчитаем, используя формулу связи энергии фонона с его импульсом  $W = pu_{\text{зв}}$  ( $u_{\text{зв}}$  — скорость звука в кристалле или усредненная скорость движения фононов):

$$g(W)dW = g(p)dp \Rightarrow g(W) = g(p)(dp/dW) = g(p)u_{\text{зв}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g(W) = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot \frac{W^2}{u_{\text{зв}}^3}. \quad (13.13)$$

### 13.3.3. КВАНТОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ–ДИРАКА И БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Как уже отмечалось (см. п. 10.1.6), поведение коллектива тождественных частиц определяется значением их спина (спинового квантового числа  $S$ ). Здесь возможны два случая. В первом случае это частицы, у которых спин равен полуцелому числу ( $S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ), их называют **фермионами**. Для них справедлив **принцип Паули**, согласно которому в системе тождественных фермионов в одном квантовом состоянии может находиться только один фермион, то есть в системе не может быть двух фермионов с одинаковым набором всех квантовых чисел.

Для фермионов функция распределения, называемая функцией распределения Ферми–Дирака, имеет вид:

$$f(W) = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) + 1}. \quad (13.14)$$

Из принципа Паули вытекает, что числовые значения функции  $f_{\text{ФД}}(W)$  не могут быть больше единицы ( $f_{\text{ФД}}(W) \leq 1$ ), поэтому она имеет вероятностный смысл, дает вероятность нахождения фермиона в квантовом состоянии с энергией  $W$ .

Во втором случае, для **бозонов**, частиц с целым спином ( $S = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ), в одном квантовом состоянии может находиться сколь угодно много бозонов.

Для бозонов функция распределения  $f_{\text{БЭ}}(W)$ , называемая функцией распределения Бозе–Эйнштейна, записывается следующим образом:

$$f_{\text{БЭ}}(W) = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) - 1}. \quad (13.15)$$

Для бозонов принцип Паули не работает, в одном квантовом состоянии может находиться любое число частиц. Поэтому функция распределения  $f_{\text{БЭ}}(W)$  может принимать любые положительные значения. При температурах, близких к абсолютному нулю, это приводит к скоплению бозонов на самом низком энергетическом уровне, и наблюдается так называемая Бозе–Эйнштейновская конденсация, которая объясняет явления сверхтекучести и сверхпроводимости.

Различие в поведении системы тождественных частиц фермионов и бозонов связано с тем, что для фермионов полная волновая функция системы является антисимметричной (она меняет знак при перестановке местами любой пары частиц), а для бозонов — симметричной (она не меняет знак при перестановке любой пары частиц).

Входящий в формулы (13.14) и (13.15) параметр  $\mu$  называется химическим потенциалом (в термодинамике он был введен в п. 12.2.11), его значения определяются из известного полного числа частиц и энергии системы (13.5).

Покажем, что в квантовой механике тождественные частицы являются принципиально неразличимыми, то есть их нельзя пронумеровать. Для этого рассмотрим следующий пример. Пусть в начальный момент времени имеются два электрона с номерами 1 и 2 (см. рис. 13.6). Так как к ним понятие траектории не применимо, то при своем движении они будут находиться с разной степенью вероятности в определенных областях пространства. При перекрытии этих областей нельзя однозначно сказать, где находятся электроны с номерами 1 и 2, что приводит к принципиальной неразличимости частиц в квантовой механике.

#### 13.3.4. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ–ДИРАКА $F_{\text{ФД}}(W)$

Найдем число микросостояний, которые соответствуют данному макросостоянию системы, то есть рассчитаем термодинамическую вероятность (статистический вес) макросостояния  $\Omega$ . Учтем, что для данного макросостояния все микросостояния равновероятны, а также тот факт, что для фермионов любая фазовая ячейка будет или пустой или в ней будет находиться только один фермион.



Отметим, что наличие, например у электронов, спиновых магнитных моментов никак не сказывается на выводе термодинамической вероятности макросостояния. Эти спиновые моменты можно учесть, либо вводя фазовые ячейки половинного объема (для электронов, коэффициент  $\alpha$  в формуле (13.8) равен двум), либо еще одну переменную для фазового пространства, учитывающую проекцию спина.

Пусть на уровне с энергией  $W_K$  находится  $g_K$  фазовых ячеек и  $N_K$  частиц (для фермионов  $g_K \geq N_K$ ). Макросостояние определяет число ячеек, занятых частицами, и число ячеек, оставшихся свободными (номера ячеек не учитываются). Для задания микросостояния необходимо знать номера ячеек, заполненных и незаполненных частицами. Следовательно, число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, можно получить, если из всех перестановок ячеек друг с другом ( $g_K!$ ) исключить перестановки заполненных ячеек ( $N_K!$ ) между собой и незаполненных ячеек  $((g_K - N_K)!)$

$$\Omega_K = \frac{g_K!}{N_K!(g_K - N_K)!}, \quad (13.16)$$

где обозначение  $N_K! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots, N_K$  раскрывается как произведение всех целых чисел от единицы до значения  $N_K$ .

Учет других уровней энергии приводит к необходимости перемножить число микросостояний  $\Omega_K$ , полученных для каждого уровня энергии  $W_K$ . Это связано с тем, что перестановки ячеек в пределах одного уровня энергии не зависят от перестановок в пределах другого уровня. Тогда окончательно получим число микросостояний, которое соответствует данному макросостоянию:

$$\Omega = \prod_{Ki} \Omega_K = \prod_K \frac{g_K!}{N_K!(g_K - N_K)!}. \quad (13.17)$$

Найдем натуральный логарифм от выражения (13.17)

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= \sum_K \ln g_K! - \sum_K \ln N_K! - \sum_K \ln (g_K - N_K)! = \\ &= \sum_K (g_K \ln g_K - g_K - N_K \ln N_K + N_K - (g_K - N_K) \ln (g_K - N_K) + (g_K - N_K)) = \\ &= \sum_K (g_K \ln g_K - N_K \ln N_K - (g_K - N_K) \ln (g_K - N_K)), \end{aligned}$$

где была использована приближенная формула Стирлинга

$$\ln B! = B \ln B - B.$$

Равновесному состоянию соответствует наибольшая термодинамическая вероятность  $\Omega_{\text{макс}}$ . Поэтому для ее отыскания нужно найти производную от  $\ln \Omega$  и затем приравнять ее к нулю. Это необходимо сделать при дополнительных условиях, накладываемых на систему, то есть на число ее частиц и ее полную энергию. Для этого используют метод неопределенных множителей Лангранжа, в котором выбирается функция вида

$$B = \ln \Omega - \gamma \left( \sum_K N_K - N \right) - \beta \left( \sum_K N_K W_K - W \right)$$

(в нее введены постоянные величины  $\gamma$  и  $\beta$ ) и берется производная от нее по числу частиц  $N_K$ , затем она приравняется нулю:

$$\frac{\partial B}{\partial N_K} = -\ln N_K - 1 + \ln(g_K - N_K) + 1 - \gamma - \beta W_K = 0,$$

откуда получается функция распределения Ферми–Дирака

$$N_K = \frac{g_K}{\exp(\beta(W_K - \mu) + 1)} \Rightarrow f(W_K) = \frac{N_K}{g_K} = \frac{1}{\exp(\beta(W_K - \mu) + 1)}. \tag{13.18}$$

Для выяснения физического смысла параметров  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\mu = -\gamma/\beta$  используют формулу связи термодинамической вероятности  $\Omega$  и энтропии системы (12.81), и в итоге получается формула (13.14).

Аналогично можно вывести формулу для распределения Бозе–Эйнштейна. Запишем без вывода формулу для термодинамической вероятности для статистики Бозе–Эйнштейна:

$$\Omega = \prod_{Ki} \Omega_K = \prod_K \frac{(g_K + N_K - 1)!}{N_K! (g_K - 1)!}. \tag{13.19}$$

**13.3.5.**  
**ПРИМЕР РАСЧЕТА**  
**ЧИСЛА СПОСОБОВ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ**  
**ПО ЯЧЕЙКАМ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА**  
**ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СТАТИСТИК**

Возьмем две частицы и три ячейки фазового пространства, находящихся на одном уровне энергии  $W_K$ . Рассмотрим, как могут размещаться частицы по ячейкам фазового пространства в статистиках Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака. Как видно из рис. 13.7, число возможных размещений в статистиках Максвелла–Больцмана, Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака составляют 9, 6 и 3 соответственно. Отметим, что в статистике Максвелла–

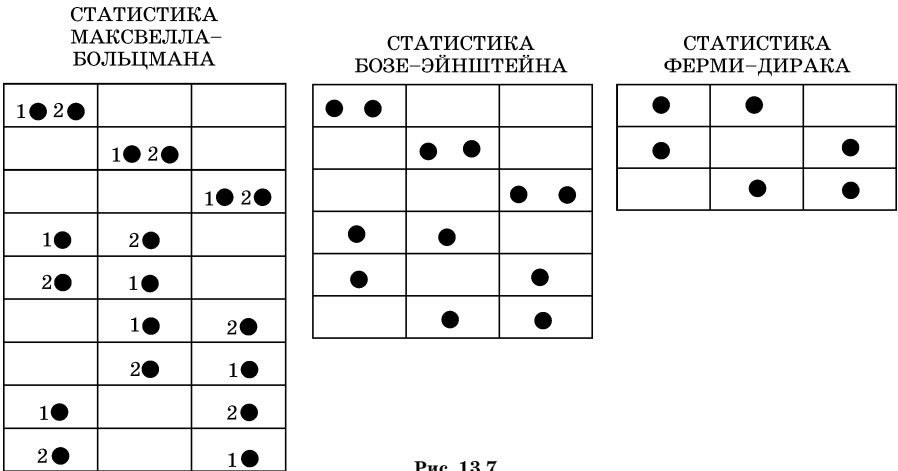


Рис. 13.7

Больцмана тождественные частицы являются различимыми, их можно пронумеровать, что и приводит к дополнительному набору микросостояний в этой статистике.

Рассчитаем количество размещений по формулам, приведенным выше. Учтем, что  $N_K = 2$ ,  $g_K = 3$ . Тогда получим для статистики Ферми–Дирака

$$\Omega_K = \frac{g_K!}{N_K!(g_K - N_K)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3,$$

а для статистики Бозе–Эйнштейна

$$\Omega_K = \frac{(g_K + N_K - 1)!}{N_K!(g_K - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{2!(3 - 1)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

### 13.3.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА. УСЛОВИЕ СНЯТИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ

Систему частиц, описываемую квантовыми статистиками — статистикой Ферми–Дирака или Бозе–Эйнштейна, принято называть **вырожденной системой частиц**. В этом случае нельзя пренебрегать волновыми свойствами частиц.

Если волновыми свойствами можно пренебречь, то тогда система частиц описывается статистикой Максвелла–Больцмана, она называется **невырожденной системой частиц**.

Известно, что в условиях, когда волновыми свойствами частиц можно пренебречь, их поведение можно описывать в рамках классической механики как поведение классических частиц. Поэтому существует условие, при котором квантовые статистики Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна переходят в классическую статистику Максвелла–Больцмана, а именно если единицей в знаменателях формул (13.14) и (13.15) можно пренебречь:

$$\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) \gg 1 \Rightarrow f_{\text{ФД}}(W)f_{\text{БЭ}}(W) \rightarrow f(W) = \exp\left(\frac{\mu - W}{kT}\right) \ll 1. \quad (13.20)$$

Как видно из данной формулы, это возможно, когда число квантовых состояний значительно превышает число частиц в системе — в этом случае не возникает вопроса о заполнении одного квантового состояния двумя частицами и поэтому они не проявляют своих волновых свойств.

$$(N/N_{\text{сост}}) \ll 1. \quad (13.21)$$

Раскроем условие (13.21), которое получило название **условие снятия вырождения**. Неравенство (13.20) будет справедливо для любых значений энергии, то есть и для значения  $W = 0$ . Тогда  $\exp(\mu/(kT)) \ll 1$ . Величину  $\exp(\mu/(kT))$  можно выразить через параметры идеального газа частиц, если оценить значение химического потенциала из формулы (13.6) для полного числа частиц  $N$ . Опуская вывод, можно записать

$$\exp(\mu/(kT)) = \frac{Nh^3}{\alpha V(2\pi m_0 kT)^{3/2}},$$

откуда следует условие применимости статистики Максвелла–Больцмана

$$\frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi m_0 kT} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (13.22)$$

Итак, статистика Максвелла–Больцмана применима для газов малой концентрации ( $N/V$ ), при высоких температурах и для молекул большой массы.

Для концентраций газа  $n = (N/V) \approx 10^{-25} \text{ м}^{-3}$ , массе молекул  $m_0 \approx (10^{-26} \div 10^{-27}) \text{ кг}$  и при нормальном атмосферном давлении для температуры газа можно получить:  $T \gg 0,1 \text{ К}$ . Следовательно, распределение Максвелла–Больцмана применимо для таких газов при достаточно низких температурах (понятно, что она должна быть выше температуры перехода в жидкое состояние). Иное — газ свободных электронов в металлах и фотонный газ, они являются вырожденными.

Поскольку в квантовой теории существуют только две статистики, которые переходят при определенных условиях в статистику Максвелла–Больцмана, постольку нет других частиц, кроме бозонов и фермионов, которые подчиняются классической статистике. Это означает, что существующая принципиальная неразличимость частиц в квантовой механике переносится и в классическую статистику. Следовательно, тождественные частицы нельзя пронумеровать, как это считается в классической статистике.

Однако в условиях применимости классической статистики этот факт является несущественным. Действительно, в разреженном газе частицы находятся в среднем на больших расстояниях друг от друга, поэтому частицы практически не сближаются и их невозможно перепутать (волновыми свойствами частиц можно пренебречь). Поэтому в таких условиях статистические распределения для неотличимых частиц (тождественных частиц) совпадают с распределением для отличимых частиц (частиц, которые можно пронумеровать).

### 13.3.7. ФОТОННЫЙ ГАЗ. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИСПУСКАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Фотоны являются бозонами, они подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Равновесное излучение в замкнутой полости можно представить как идеальный газ фотонов (бозонов). Так как число фотонов не сохраняется, то необходимо взять значение химического потенциала в формуле (13.15) равным нулю. Тогда распределение Бозе–Эйнштейна будет записано в виде

$$f_{\text{БЭ}}(W) = \frac{1}{\exp(W/kT) - 1}.$$

Функция плотности состояний фотонов определяется формулой (13.12):

$$g(\nu) = \frac{4\pi V (h\nu/c)^2}{h^2 c} = \frac{4\pi V \nu^2}{c^3}.$$

Тогда в соответствии с формулой (13.8) запишем

$$dN = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Объемная плотность излучения в полости, соответствующая частоте  $\nu$ , составит

$$w = h\nu \frac{dN}{V d\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (13.23)$$

Учитывая формулу связи между испускательной способностью а. ч. т. и объемной плотностью излучения, можно записать

$$r_{\nu,T}^0 = \frac{c}{4} w(\nu, T) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (13.24)$$

что и требовалось получить.

### 13.3.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА. 6N-МЕРНОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

При обсуждении идеальных газов невзаимодействующих частиц было введено шестимерное фазовое пространство. Если же рассматривать системы взаимодействующих между собой частиц, то для удобства решения задач статистической физики в этом случае вводят 6N-мерное фазовое пространство (введено Гиббсом в 1901 г.). 6N измерений этого пространства соответствуют числу координат и импульсов частиц системы, совокупность этих переменных можно обозначить как  $((p, q) = p_{1X}p_{1Y}p_{1Z} \dots p_{NX}p_{NY}p_{NZ}, q = q_{1X}q_{1Y}q_{1Z} \dots q_{NX}q_{NY}q_{NZ})$ . В этом пространстве состояние системы будет изображаться точкой. Эта точка с течением времени будет перемещаться, и совокупность всех состояний системы (точек) с течением времени будет занимать в этом пространстве определенный объем. Вводится функция распределения состояний  $w(p, q, t)$  системы по координатам и импульсам всех частиц, она определяет вероятность  $w(p, q, t) dp dq$  нахождения системы в элементе объема  $dp dq$  фазового пространства в момент времени  $t$ .

Основным положением статистической физики является утверждение о том, что для систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, можно определить функцию распределения из общих соображений, не решая уравнений движения:  $w(p, q, t) = w(p, q)$ . Следовательно, она не будет зависеть от времени  $t$ . С помощью этой функции можно рассчитать среднее значение любой физической величины, являющейся функцией координат и импульсов частиц системы

$$\langle F \rangle = \int F[p(t), q(t)] w(p, q, t) dp dq = \int F(p, q) w(p, q) dp dq, \quad (13.25)$$

и тем самым решить задачу статистической физики — рассчитать значение макропараметров системы на основе знания ее микроскопических параметров.

Функции распределения  $w(p, q)$  можно дать и другое истолкование, если рассматривать одновременно большое число одинаковых систем и считать,

что каждая точка в фазовом пространстве изображает состояние одной такой системы. Тогда усреднение по времени в формуле (13.25) можно понимать как усреднение по совокупности этих систем, которые называют статистическим ансамблем. Статистический ансамбль — это одно из основных понятий статистической физики (введено Гиббсом в 1901 г.), позволяющее применять к решению физических задач методы теории вероятностей. Для систем, находящихся в различных внешних условиях, Гиббсом были введены следующие виды ансамблей:

1) микроканонический ансамбль — статистический ансамбль для изолированных (не обменивающихся энергией с окружающими телами) макроскопических систем, имеющих постоянный объем и постоянное число частиц;

2) канонический ансамбль — статистический ансамбль для макроскопических систем, находящихся в тепловом равновесии с термостатом при постоянном числе частиц в системе и постоянном объеме. Такие системы можно рассматривать как малые части (подсистемы) статистического ансамбля больших энергетически изолированных систем;

3) большой канонический ансамбль — статистический ансамбль для макроскопических систем постоянного объема в тепловом равновесии с термостатом и в материальном равновесии с резервуаром частиц.

Гиббс также вывел формулы для равновесных распределений вероятностей состояний (функции распределения) для этих статистических ансамблей систем. Они рассматриваются как основные законы статистической физики. Для квантовых статистик эти законы были обобщены Нейманом (1927).

Запишем без вывода функцию распределения для канонического ансамбля квантовых систем (для них считаются постоянными число частиц в системе и объем системы). Из квантовой механики известно, что энергетический спектр системы постоянного объема является дискретным (энергия системы принимает значения  $W_n$ , где число  $n$  принимает значения для всего набора целых чисел). Тогда для вероятности нахождения квантовой системы в состоянии с энергией  $W_n$  можно получить следующую формулу:

$$w_n(W_n) = \exp\left(\frac{F - W_n}{kT}\right). \quad (13.26)$$

Входящая в эту формулу свободная энергия Гельмгольца (см. формулу (12.58)) определяется из условия нормировки для функции распределения  $w_n(W_n)$ :

$$\sum_n w_n = 1; \quad (13.27)$$

$$\exp\left(-\frac{F}{kT}\right) = \Omega = \sum_n \exp\left(-\frac{W_n}{kT}\right) \Rightarrow F = -kT \ln \Omega, \quad (13.28)$$

где  $\Omega$  — статистический вес или термодинамическая вероятность (см. раздел 12.2.9). Сумма в формуле (13.27) берется по всем состояниям системы.

Формула (13.28) позволяет определить из статистической теории свободную энергию Гельмгольца:  $F = -kT \ln \Omega$ .

С помощью функций распределения  $w(W_n)$  можно в рамках статистической физики рассчитать все термодинамические функции, описывающие поведение реальных макроскопических систем. Однако на этом пути сложной математической задачей для каждого конкретного случая является расчет статистического веса (или термодинамической вероятности)  $\Omega$ .

## 13.4. ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛЕ. МОДЕЛЬ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

### 13.4.1. РЕШЕНИЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛЕ. ЭНЕРГИЯ ФЕРМИ. ТЕМПЕРАТУРА ФЕРМИ

В модели свободных электронов металл для валентных электронов представляет собой трехмерную потенциальную яму с плоским дном и вертикальными стенками (куб с длиной ребра  $l$  и объемом  $V$ , рис. 13.8а). Плоское дно означает, что на валентные электроны со стороны кристалла силы не действуют, электроны движутся как свободные частицы, не взаимодействуя друг с другом.

Этот вывод является следствием формулы связи консервативной силы и потенциальной энергии ( $\vec{F}_K = -\text{grad}W_p$ ), в соответствии с которой для постоянной потенциальной энергии ( $U = \text{const}$ )  $\vec{F}_K = -\text{grad}W_p = 0$ . На границе металла на электрон действует бесконечно большая сила, которая препятствует выходу электрона из металла ( $\vec{F}_K = -\text{grad}W_p = \infty$ ).

Для получения спектра энергии и волновых функций для электрона в металле можно использовать решение задачи 2 (см. п. 9.5), обобщая ее на трехмерный случай. Это позволяет записать для собственных значений энергии электрона следующую формулу:

$$W(n_1, n_2, n_3) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2ml^2} (k_X^2 + k_Y^2 + k_Z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad (13.29)$$

где

$$k_X = \frac{\pi}{l} n_1, \quad k_Y = \frac{\pi}{l} n_2, \quad k_Z = \frac{\pi}{l} n_3, \quad n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Собственные волновые функций электрона внутри металла представляют собой плоские бегущие волны де Бройля:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \exp(i\vec{k}\vec{r}). \quad (13.30)$$

Для того чтобы устранить влияние границ металла на поведение электрона (граничные эффекты пренебрежимо малы для электронов в металле),

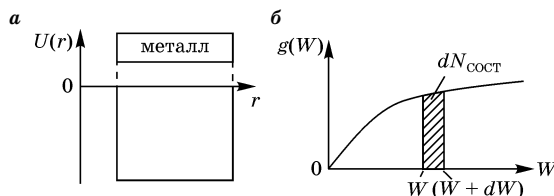


Рис. 13.8

считается, что на границе металла электрон переходит в тот же самый металл, но с противоположной стороны.

Из записанных формул следует, что:

1) энергетический спектр для электронов в металле является квазинепрерывным — он дискретный, но дискретностью можно пренебречь по сравнению с энергией теплового движения электронов (при температуре  $T = 300$  К она составляет  $kT = 0,025$  эВ);

2) энергия электрона определяется набором четырех квантовых чисел ( $n_1, n_2, n_3, m_s = \pm 1/2$ ).

**Функция плотности электронных состояний  $g(W)$**  определяется формулой (13.10):

$$g(W) = c\sqrt{W}, \quad c = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2}. \quad (13.31)$$

График функции плотности состояний приведен на рис. 13.8б. Из него видно, что с увеличением энергии плотность электронных состояний возрастает.

**Функция распределения электронов по квантовым состояниям (функция распределения Ферми–Дирака).** Запишем функцию распределения Ферми–Дирака для электронов в металле:

$$f_{\text{ФД}}(W) = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - W_{\text{Ф}}}{kT}\right) + 1}, \quad (13.32)$$

где входящий в формулу химический потенциал называется энергией Ферми:  $\mu = W_{\text{Ф}}$ . Рассмотрим вид функции в двух случаях.

**Случай температуры  $T = 0$  К. Энергия Ферми.** В этом случае можно получить следующие значения  $f_{\text{ФД}}(W)$ :

$$f_{\text{ФД}}(W) = \begin{cases} 1 & W < W_{\text{Ф}} & \exp(-\infty) \\ 1/2 & W = W_{\text{Ф}} & \exp(0) = 1 \\ 0 & W > W_{\text{Ф}} & \exp(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (13.33)$$

График функции  $f_{\text{ФД}}(W)$  на рис. 13.9а представляет собой прямоугольную ступеньку, которая обрывается при энергии, равной энергии Ферми:  $W = W_{\text{Ф}}$ . Такой график для функции распределения  $f_{\text{ФД}}(W)$  означает, что все электронные состояния от нуля до энергии Ферми заполнены электронами, состояние с энергией, равной энергии Ферми, заполнено наполовину, а состояния с энергиями, превышающими энергию Ферми, являются пустыми. На рис. 13.9б показано заполнение потенциальной ямы электронами при температуре  $T = 0$  К.

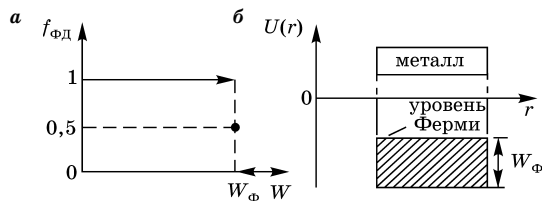


Рис. 13.9



Итак, принцип Паули приводит к тому, что электронный газ при температуре  $T = 0$  К обладает не равной нулю энергией  $W(0)$ .

Вводятся следующие определения:

1) **уровень Ферми** — последний занятый электронами уровень при температуре  $T = 0$  К или это уровень, на котором вероятность заполнения его электронами равна 0,5;

2) **энергия Ферми**  $W_{\Phi}$  — максимальная кинетическая энергия электронов при температуре  $T = 0$  К или энергия электрона на уровне Ферми, отсчитанная от дна потенциальной ямы.

Оценим энергию Ферми для разных металлов. Для этого рассчитаем полное число свободных электронов при температуре  $T = 0$  К. В соответствии с формулами (13.8), (13.31) и (13.33) получим

$$N = \alpha \int_0^{\infty} f_{\Phi D}(W) g(W) dW = \alpha \int_0^{W_{\Phi}} g(W) dW = \alpha \int_0^{W_{\Phi}} c \sqrt{W} dW = \alpha \frac{2}{3} c W_{\Phi}^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\Phi} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}, \quad (13.34)$$

где  $n$  — концентрация свободных электронов в металле. Коэффициент  $\alpha$  в формуле (13.8) равен двум, он учитывает магнитное спиновое квантовое число, принимающее два значения.

Оценки энергии Ферми из известной концентрации свободных электронов для различных металлов ( $n \approx (10^{28} \div 10^{29}) \text{ м}^{-3}$ ) показывают, что энергия Ферми принимает значения в пределах  $W_{\Phi} = (2 \div 10)$  эВ, что существенно превышает значение энергии теплового движения при комнатной температуре ( $kT \approx 0,025$  эВ).

**Случай  $T > 0$  К. Температура Ферми.** Вследствие того, что энергия Ферми существенно превышает энергию теплового движения ( $W_{\Phi} \gg kT$ ), в нем будет принимать участие лишь малая часть электронов в интервале  $(W_{\Phi} - kT, W_{\Phi} + kT)$  вблизи уровня Ферми. Эти электроны могут принимать энергию теплового движения и переходить на свободные вышележащие уровни энергии.

Большая часть электронов будет «заморожена» в своих квантовых состояниях — для них в интервале  $(\pm kT)$  все уровни энергии полностью заполнены другими электронами. Поэтому большая часть электронов не может принять энергию теплового движения и перейти на вышележащие уровни энергии.

Итак, в тепловом движении принимает участие малая часть электронов вблизи уровня Ферми. Это означает, что «ступенька» размывается в малом

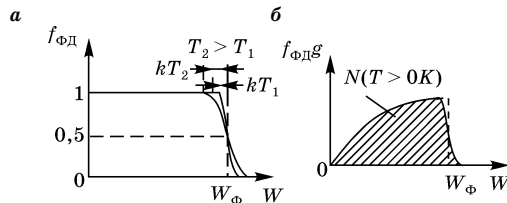


Рис. 13.10

интервале  $(W_{\Phi} - kT, W_{\Phi} + kT)$  около уровня Ферми (рис. 13.10а), и чем больше температура, тем больше размывается ступенька, то есть в тепловом движении начинают принимать участие все большее число электронов.

Записать точную формулу для энергии Ферми в этом случае не удастся, но с достаточной степенью точности можно использовать приближенную формулу

$$W_{\Phi}(T) = W_{\Phi}(0) \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \cdot \left( \frac{kT}{W_{\Phi}(0)} \right)^2 \right]. \quad (13.35)$$

Из нее следует, что зависимость энергии Ферми от температуры является незначительной, так как  $W_{\Phi} \gg kT$ , и с повышением температуры металла энергия Ферми будет уменьшаться.

Вводится **температура Ферми**  $T_{\Phi}$  — это температура, при которой в тепловом движении начинают принимать участие все электроны. При этой температуре «ступенька» размывается полностью во всем интервале энергий от нуля до  $W_{\Phi}$ . Для этой температуры можно записать

$$kT_{\Phi} = W_{\Phi} \Rightarrow T_{\Phi} = W_{\Phi}/k. \quad (13.36)$$

При температурах  $T \ll T_{\Phi}$  электронный газ является вырожденным, то есть подчиняется статистике Ферми–Дирака, в тепловом движении принимает участие малая часть электронов вблизи уровня Ферми.

При температурах  $T \gg T_{\Phi}$  электронный газ становится невырожденным, он подчиняется статистике Максвелла–Больцмана, в тепловом движении принимают участие все электроны.

Учитывая числовые значения энергии Ферми для металлов, можно привести следующую оценку для температуры Ферми:  $T_{\Phi} \approx 10^4$  К. Это означает, что при всех температурах существования металла в твердом состоянии электронный газ является вырожденным.

Иначе обстоит дело для полупроводников, для которых концентрация свободных электронов по сравнению с металлом убывает примерно в  $10^6$  раз, что соответствует уменьшению температуры Ферми в  $10^4$ :  $W_{\Phi} \sim n^{2/3} \Rightarrow T_{\Phi} \approx 1$  К. Следовательно, электронный газ в полупроводниках является невырожденным, он подчиняется статистике Максвелла–Больцмана.

В заключение покажем, как можно представить графически полное число  $N$  свободных электронов в металле при температуре  $T$ , отличной от нуля ( $T > 0$  К, рис. 13.10б). Для этого необходимо использовать формулу (13.8) и учесть графический смысл интеграла ( $N$  равно площади под графиком стоящей под знаком интеграла функции  $f_{\Phi D}(W)g(W)$ ).

#### 13.4.2. ЭЛЕКТРОННЫЙ ВКЛАД В ТЕПЛОЕМКОСТЬ МЕТАЛЛОВ

Оценим вклад электронного газа в теплоемкость металла, для этого рассчитаем молярную теплоемкость электронного газа при постоянном объеме ( $N = N_A$ ). В этом случае в соответствии с формулой (12.70 б) можно записать

$$c_{V_{эл}} = dU/dT,$$

где в формулу входит внутренняя энергия электронного газа, зависящая от температуры  $U(T)$ :

$$U(T) = \langle W \rangle \Delta N = \frac{3}{2} kT \cdot \Delta N.$$

Число электронов  $\Delta N$ , принимающих участие в тепловом движении, можно оценить, учитывая следующие пропорции. Число валентных электронов  $N$  занимают состояния в интервале энергий от нуля до энергии Ферми  $(0, W_{\Phi})$ , а электроны, участвующие в тепловом движении, приходятся на интервал  $2kT$  вблизи уровня Ферми

$$N \rightarrow (0 \div W_{\Phi}), \Delta N \rightarrow ((W_{\Phi} - kT) \div (W_{\Phi} + kT)),$$

что приводит к формуле для  $c_{V\text{эл}}$

$$\Delta N \approx N(2kT / W_{\Phi}) \Rightarrow c_{V\text{эл}} = dU / dT = \frac{6kR}{W_{\Phi}(0)} T.$$

Более точные расчеты, основанные на зависимости средней энергии электронов от температуры

$$\langle W(T) \rangle = \langle W(0) \rangle \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \cdot \left( \frac{kT}{W_{\Phi}(0)} \right)^2 \right] = \frac{3}{5} W_{\Phi}(0) \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \cdot \left( \frac{kT}{W_{\Phi}(0)} \right)^2 \right], \quad (13.37)$$

приводят к формуле

$$c_{V\text{эл}} = dU / dT = N \frac{dW(T)}{dT} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{kR}{W_{\Phi}(0)} T. \quad (13.38)$$

Отсюда

$$c_V = \gamma \cdot T, \quad (13.39)$$

где коэффициент  $\gamma$  составит

$$\gamma = \frac{\pi^2 kR}{2W_{\Phi}(0)}. \quad (13.40)$$

Оценим коэффициент  $\gamma$  для энергии Ферми  $W_{\Phi}$ , равной  $W_{\Phi} = 5$  эВ,

$$\gamma = 9,87 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} R / (2 \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 8,51 \cdot 10^{-4} R \ll R.$$

Итак, вклад электронного газа в теплоемкость металла является малым (по сравнению с  $R$ ) и линейно зависит от температуры.

## 13.5. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 13.5.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ. ФОНОННЫЙ ГАЗ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Тепловые свойства твердых тел связаны с тепловыми колебаниями сильно связанных атомов в узлах кристаллической решетки. Поэтому задача расчета этих свойств является многочастичной задачей, и она не имеет точного решения.

Рассмотрим два подхода к решению такой задачи, приводящие к одному и тому же результату.

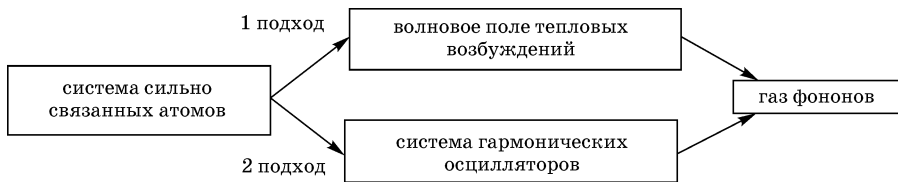


Рис. 13.11

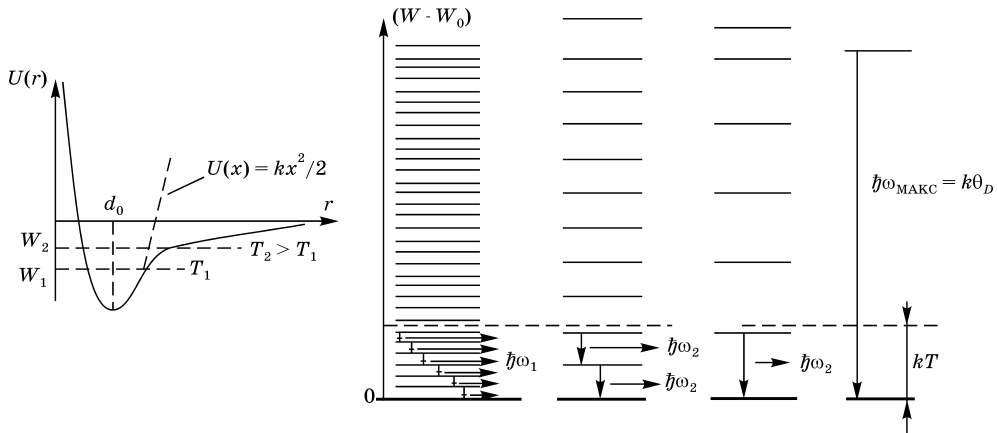


Рис. 13.12

1. Тепловые колебания атомов за счет их взаимодействия распространяются в кристалле, и поэтому в нем возникает волновое поле тепловых возбуждений, возникают стоячие упругие волны разной амплитуды и частоты (за счет отражения от границ кристалла возникают стоячие волны). Поэтому переходят от системы сильно связанных атомов к волновому полю тепловых возбуждений (рис. 13.11).

Каждая стоячая волна частоты  $\omega$  называется нормальным колебанием решетки, и для определения спектра частот нормальных колебаний кристаллической решетки, связанных с тепловыми колебаниями атомов, можно использовать формулу (5.92).

В данном случае вводят понятие фононов. Подобно квантованию электромагнитного поля, введению фотонов, проводят квантование поля тепловых возбуждений, вводят фононы. Фонон — это квант поля тепловых возбуждений, квазичастица, она существует внутри твердого тела и вводится для удобства описания тепловых свойств твердых тел. Фонон обладает всеми свойствами частицы (энергия, импульс, частота и т. д.).

Каждой волне частоты  $\omega$  соответствует фонон с энергией

$$W_{\text{фон}} = \hbar\omega, \quad (13.41)$$

и число таких фононов определяется амплитудой этой стоячей волны.

Следовательно, при описании тепловых свойств кристалла система сильно связанных атомов заменяется газом фононов. Известно, что модель идеального газа частиц является достаточно хорошо разработанной, для нее по-

лучены точные формулы для различных свойств (см., например, п. 12.2.7), что позволяет применять их и в этом случае.

Итак, по отношению к тепловым свойствам кристалл можно представить как ящик, содержащий газ фононов.

2. Во втором подходе учитывается вид потенциального поля (потенциальной ямы), в котором совершают колебания атомы кристалла в узлах кристаллической решетки. При низких температурах она является параболической ( $U(x) = kx^2/2$ , рис. 13.12а), это означает, что атом в таком потенциальном поле совершает колебания как гармонический осциллятор. Поэтому можно вместо системы колеблющихся атомов  $N$  перейти к набору гармонических осцилляторов  $3N$ .

Решение задачи на гармонический осциллятор (задача 6 квантовой механики из 9.9) приводит к эквидистантному спектру энергий, причем возможны переходы только между соседними уровнями энергии ( $\Delta n = n_2 - n_1 = \pm 1$ , рис. 13.12б):

$$W_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

При переходах между соседними уровнями энергии происходит излучение квантов энергии и излучение фононов. Итак, снова происходит переход от системы сильно связанных колеблющихся атомов к газу фононов.

**Рассмотрим теперь, что происходит с газом фононов при изменении температуры кристалла.**

**$T = 0$  К.** Тепловые колебания атомов отсутствуют, фононов нет, существуют только нулевые колебания атомов ( $W_0 = \hbar\omega_0/2 \neq 0$ ). Они связаны с волновой природой атомов, это квантовый эффект. Нулевые колебания находят свое подтверждение в опытах по рассеянию света на кристаллах. При низких температурах интенсивность рассеянного света не исчезает до нуля при стремлении  $T \rightarrow 0$  К, а стремится к определенному значению. Также можно отметить тот факт, что большая амплитуда нулевых колебаний в жидких гелии  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  не позволяет им при атмосферном давлении перейти к твердому состоянию вплоть до температур, равных  $T = 0$  К.

**Низкие температуры ( $T \ll \theta_D$ ).** Число фононов мало, они образуют идеальный газ. Присутствуют фононы с энергиями  $W_{\text{фон}} \approx (0 \div kT)$ . Основным механизмом рассеяния фононов является их взаимодействие с примесными атомами и дефектами решетки. Поэтому средняя длина свободного пробега фононов в этом температурном интервале остается постоянной ( $\langle \lambda \rangle = \text{const}$ ).

**Температура Дебая  $\theta_D$ .** Температура кристалла равна температуре Дебая, при которой впервые появляются фононы с максимально возможной энергией. При этом (рис. 13.12б)

$$W_{\text{фон макс}} = \hbar\omega_{\text{макс}} = \hbar\theta_D \Rightarrow \theta_D = \hbar\omega_{\text{макс}}/k. \quad (13.42)$$

Температура Дебая для каждого твердого тела отделяет низкотемпературную область ( $T < \theta_D$ ), где проявляются квантовые эффекты, становится существенным квантование энергии колебаний от высокотемпературной области, в которой этими эффектами можно пренебречь. Так, например, для

свинца, натрия, железа и алмаза  $\theta_D$  составляет 94,5 К, 160 К, 467 К и 1850 К соответственно.

**Высокие температуры  $T \gg \theta_D$ .** Существуют фононы со всевозможными энергиями. Их число растет, так как каждый осциллятор испускает все больше и больше фононов. Газ фононов становится неидеальным, необходимо учитывать взаимодействие между фононами. Это приводит к ангармонизму колебаний атомов, то есть к необходимости при большой амплитуде колебаний атомов учитывать отклонения потенциальной ямы от параболического вида ( $U(x) = kx^2/2 - gx^3/3 + \dots$ ).

Основным механизмом рассеяния фононов при таких температурах является рассеяние фононов друг на друге, и поэтому средняя длина свободного пробега фононов из-за возрастания числа фононов будет изменяться обратно пропорционально температуре ( $\langle \lambda \rangle \sim 1/T$ ). Поясним, почему для фононов существует максимальная частота. Это связано с тем, что для стоячих волн в кристалле существует минимальная длина волны, равная удвоенному расстоянию ( $d_0$ ) между соседними атомами в кристалле ( $\lambda = 2d_0, 4d_0, 6d_0, 8d_0, \dots, \lambda_{\min} = 2d_0$ , рис. 13.13а). В этом случае нельзя пренебречь дискретностью строения кристалла и рассматривать его как сплошную среду.

Известно, что упругие волны в кристалле распространяются со скоростями (их называют скоростью звука), которые практически не зависят от температуры. Следовательно, и фононы в кристалле движутся со скоростью звука, которая, например, для меди составляет  $u_{\text{изв}} = 3650$  м/с.

Зная скорость звука в кристалле, можно оценить максимальную частоту фононов:

$$\omega_{\max} = 2\pi \frac{u_{\text{изв}}}{\lambda_{\min}} = 2\pi \frac{u_{\text{зв}}}{2d_0} = \pi \frac{u_{\text{зв}}}{d_0}. \quad (13.43)$$

Забегая вперед, можно отметить, что в теории Дебая максимальная частота фононов в кристалле определяется из условия (13.48), что дает другую оценку для минимальной длины упругой волны в кристалле с простой кубической решеткой ( $n = N/V = N_{\text{уп}}/d_0^3 = 1/d_0^3$ ):

$$\omega_{\max} = u_{\text{зв}} (6\pi^2 n)^{1/3} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{2\pi u_{\text{зв}}}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi}{(6\pi^2 m)^{1/3}} = d_0 \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \approx 1,61d_0, \quad (13.44)$$

где  $n$  — концентрация атомов в кристалле ( $n = N/V$ ). Значение  $\lambda_{\min} \approx 1,61d_0$ , полученное для простой кубической решетки, достаточно удовлетворительно согласуется со значением  $\lambda_{\min} = 2d_0$ .

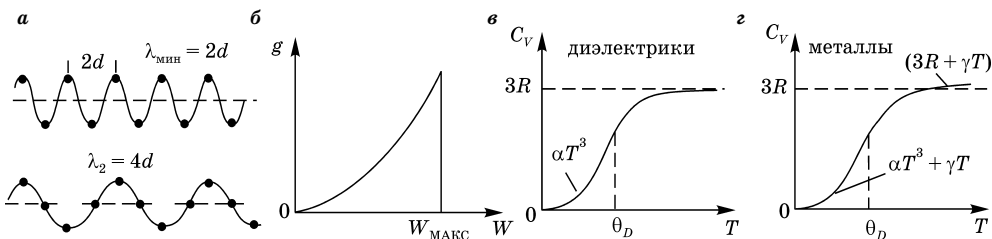


Рис. 13.13

### 13.5.2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ (ТЕОРИЯ ДЕБАЯ)

Внутреннюю энергию кристалла, связанную с тепловыми колебаниями атомов, можно представить как полную энергию газа фононов и записать ее в виде

$$W_{\text{реш}}(T) = W_{\text{фон.газ}}(T) = 3 \int_0^{\infty} f_{\text{БЭ}}(W) g(W) W dW, \quad (13.45)$$

где учтено, что коэффициент  $\alpha$  для фононов равен трем. Это связано с тем, что в кристалле могут распространяться одна продольная и две поперечные упругие волны, которым соответствуют три возможных поляризации фононов. Скорости движения таких фононов немного отличаются друг от друга, поэтому здесь выбирается средняя скорость  $u_{\text{зв}}$  их движения.

Фононы являются бозонами, и для них необходимо использовать функцию распределения Бозе–Эйнштейна  $f_{\text{БЭ}}(W)$ . При этом химический потенциал фононного газа следует считать равным нулю, так как полное число фононов не фиксировано — фононы непрерывно поглощаются и излучаются гармоническими осцилляторами:

$$f_{\text{БЭ}}(W) = 1/(\exp(W/(kT)) - 1). \quad (13.46)$$

Функция плотности состояний фононов определяется формулой (13.13):

$$g(W) = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot \frac{W^2}{u_{\text{зв}}^3}. \quad (13.47)$$

Согласно Дебаю, число различных состояний для фононов с учетом их поляризации равно  $3N_A$ . Это связано с тем, что в одном моле вещества содержится  $N_A$  атомов, что соответствует набору  $3N_A$  гармонических осцилляторов и соответственно  $3N_A$  различным состояниям по энергии для них и для фононов (каждый гармонический осциллятор испускает фононы определенной энергии). Поэтому

$$3 \int_0^{W_{\text{макс}}} g(W) dW = 3N_A. \quad (13.48)$$

Учитывая формулу (13.43), получим

$$g(W) = 3N_A \frac{W^2}{W_{\text{макс}}^3}. \quad (13.49)$$

График функции плотности состояний для фононов приведен на рис. 13.13б.

Можно отметить, что в общих чертах такой вид функции плотности фононных состояний подтверждается в опытах по рассеянию нейтронов кристаллами.

Учитывая формулы (13.45) и (13.49) для полной энергии фононного газа, можно записать

$$W_{\text{реш}}(T) = 3 \int_0^{\infty} f_{\text{БЭ}}(W) g(W) W dW = \dots = 9R\theta_D \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^4 D(\theta_D/T), \quad (13.50)$$

где интеграл

$$D(\theta_D/T) = \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (13.51)$$

называется интегралом Дебая.

Дифференцируя формулу (13.50) по температуре для молярной теплоемкости кристаллической решетки, можно записать следующее выражение:

$$c_V(T) = \frac{dW_{\text{реш}}}{dT} = 9R \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}. \quad (13.52)$$

Полученная формула (13.52) позволяет оценить теплоемкость кристаллической решетки при различных температурах. Рассмотрим две области температур; при этом будем использовать формулы (13.50) и (13.51).

**Высокие температуры ( $T \gg \theta_D$ ).** В этом случае отношение  $\theta_D/T$  будет значительно меньше единицы ( $\theta_D/T \ll 1$ ), что позволяет разложить экспоненту под знаком интеграла (13.51) в ряд и оставить только два первых члена ряда:

$$\theta_D/T \ll 1 \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow e^x \approx 1 + x \Rightarrow D(\theta_D/T) = \int_0^{\theta_D/T} x^2 dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^3.$$

Тогда для полной энергии фононного газа и для молярной теплоемкости решетки при постоянном объеме можно записать

$$W_{\text{реш}}(T) = 3RT, \quad c_V = 3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}). \quad (13.53)$$

Формула (13.53) получила название **закона Дюлонга и Пти**. Согласно этому закону, молярная теплоемкость кристаллической решетки при постоянном объеме при высоких температурах является постоянной величиной, равной 25 Дж/(моль · К).

Эту формулу можно было также получить, если представить внутреннюю энергию кристалла, связанную с тепловыми колебаниями атомов, как сумму энергий гармонических осцилляторов

$$U(T) = \sum_{i=1}^{3N_A} \langle \varepsilon_i \rangle, \quad (13.54)$$

где под знаком суммы обозначена средняя энергия гармонических осцилляторов.

При высоких температурах квантованием энергии гармонических осцилляторов можно пренебречь и считать их энергию равной  $kT$ , что и приводит к закону Дюлонга и Пти.

**Низкие температуры ( $T \ll \theta_D$ ).** В этом случае отношение  $\theta_D/T$  будет значительно больше единицы ( $\theta_D/T \gg 1$ ), что позволяет заменить верхний предел в интеграле Дебая на бесконечно большое значение и получить для интеграла значение, равное  $D(\infty) = \pi^4/15$ . Следовательно,

$$W_{\text{реш}}(T) = \frac{3\pi^4 R}{5\theta_D^3} T^4; \quad (13.55)$$

$$c_V = \alpha T^3, \quad (13.56)$$

где  $\alpha = 12\pi^4 R/(5\theta_D^3)$ .



Формула (13.56) получила название закона кубов Дебая. Согласно этому закону, молярная теплоемкость  $c_V$  кристаллической решетки при постоянном объеме при низких температурах изменяется в зависимости от температуры по закону  $T^3$ .

На рис. 13.13в приведен усредненный по многим экспериментам график зависимости  $c_V$  от температуры  $T$ , этот график подтверждает сделанные в теории Дебая выводы о теплоемкости кристаллической решетки.

**Теплоемкость металлов.** Теория Дебая применима к диэлектрикам, а для металлов, помимо вклада от кристаллической решетки, необходимо учесть также вклад от электронного газа:

$$c_{V\text{мет}}(T) = c_V + c_{V\text{эл}} = c_V + \gamma T. \quad (13.57)$$

Рассмотрим, какие изменения в зависимости  $c_{V\text{мет}}(T)$  наблюдаются для металлов.

**Очень низкие температуры ( $T \leq 10\text{ K}$ ):**  $c_{V\text{мет}}(T) = \alpha T^3 + \gamma T \approx \gamma T$ . При таких температурах линейная зависимость преобладает над кубической зависимостью.

**Низкие температуры ( $T \ll \theta_D$ ):**  $c_{V\text{мет}}(T) = \alpha T^3 + \gamma T \approx \alpha T^3$ , выполняется закон кубов Дебая.

**Высокие температуры ( $T \gg \theta_D$ ):**  $c_{V\text{мет}}(T) = 3R + \gamma T$ , наблюдается незначительная линейная зависимость теплоемкости от температуры (учтено, что  $\gamma \ll R$ ). Ее числовые значения превышают значение, равное  $3R$ .

Усредненный график зависимости молярной теплоемкости металла от температуры приведен на рис. 13.13г; на нем отмечены особенности, которые отличают поведение  $c_V$  от температуры  $T$  для металлов от поведения  $c_V$  для диэлектриков.

Отметим, что теория Дебая хорошо объясняет зависимость теплоемкости от температуры (формула (13.52)) для кристаллов с простыми кристаллическими структурами, для более сложных структур она дает существенные расхождения из-за сложного энергетического спектра фононов.

### 13.5.3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Напомним, что под теплопроводностью понимают пространственный направленный перенос тепла на основе теплового движения молекул (см. п. 12.2.6). Пусть две противоположные грани кристалла поддерживаются при разных температурах ( $T_2 > T_1$ ). Тогда за счет тепловых колебаний атомов в кристалле возникнет направленный перенос тепла от более нагретой грани к другой менее нагретой грани кристалла (см. рис. 13.14а). Для количества теплоты  $dQ$ , переносимого через площадку площади  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно направлению переноса, за время  $dt$  можно записать уравнение Фурье

$$dQ = -K \frac{dT}{dr} dS_{\perp} dt,$$

где  $(dT/dr)$  — модуль вектора градиента температуры,  $K$  — коэффициент теплопроводности.

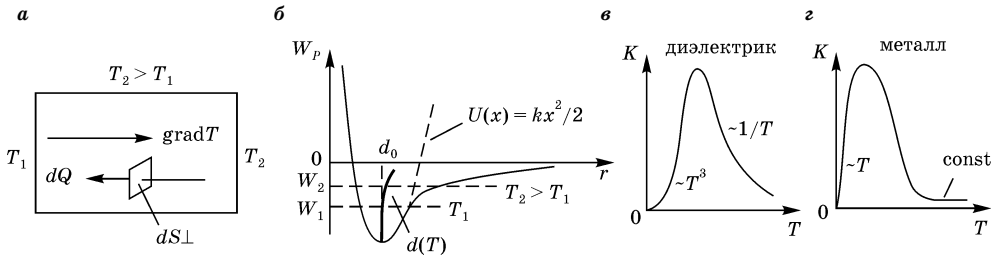


Рис. 13.14

Изучение экспериментальных зависимостей коэффициента теплопроводности от различных внешних параметров позволяет определять наиболее адекватные реальному кристаллу теоретические модели и тем самым создавать кристаллы с наперед заданными свойствами.

Рассмотрим зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для диэлектриков (для них существует только вклад от кристаллической решетки атомов). Для этого учтем, что кристалл по отношению к тепловым свойствам можно представить как ящик, содержащий газ фононов, которые и переносят тепло.

Рассматривая процесс переноса тепла в модели идеального газа для коэффициента теплопроводности можно записать (см. формулу (12.93))

$$K = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle u \rangle c'_V, \quad (13.58)$$

где  $\langle \lambda \rangle$  — средняя длина свободного пробега фононов;  $\langle u \rangle$  — средняя арифметическая скорость фононов;  $c'_V$  — теплоемкость единицы объема фононного газа при постоянном объеме ( $c'_V = \rho \cdot c_V$ ).

В случае низких температур ( $T \ll \theta_D$ ) фононы рассеиваются на примесных атомах и дефектах решетки. Поэтому

$$T \ll \theta_D : \langle \lambda \rangle = \text{const}, \langle u \rangle = u_{\text{зв}} = \text{const}, c'_V \sim T^3 \Rightarrow K \sim T^3. \quad (13.59 \text{ а})$$

В случае высоких температур ( $T \gg \theta_D$ ) фононы рассеиваются друг на друге и, следовательно:

$$T \gg \theta_D : \langle \lambda \rangle \sim 1/T, \langle u \rangle = u_{\text{зв}} = \text{const}, c'_V = \text{const} \Rightarrow K \sim 1/T. \quad (13.59 \text{ б})$$

Полученные зависимости подтверждаются экспериментально.

Оказывается, что в случае металлов наибольший вклад в их теплопроводность дает газ свободных электронов (вкладом от кристаллической решетки ионов можно пренебречь), поэтому

$$K_{\text{мет}} = K_{\text{реш}} + K_{\text{эл г}} \approx K_{\text{эл г}} = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle u_{\text{Ф}} c'_{V \text{ эл г}},$$

что дает следующие зависимости  $K_{\text{мет}}$  от температуры:

$$T \ll \theta_D : \langle \lambda \rangle = \text{const}, \langle u \rangle = u_{\text{зв}} = \text{const}, c'_V \sim T \Rightarrow K_{\text{мет}} \sim T; \quad (13.60 \text{ а})$$

$$T \gg \theta_D : \langle \lambda \rangle \sim 1/T, \langle u \rangle = u_{\text{зв}} = \text{const}, c'_V \sim T \Rightarrow K_{\text{мет}} = \text{const}. \quad (13.60 \text{ б})$$

Эксперимент также подтверждает полученные в формулах (13.60 а) и (13.60 б) зависимости. Качественный вид зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры для диэлектриков и металлов приведен на рис. 13.14в, г.

#### 13.5.4. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Для количественного описания теплового расширения твердых тел вводятся температурные коэффициенты линейного  $\alpha_l$  и объемного  $\alpha_v$  расширения. Так, например, температурный коэффициент линейного расширения равен относительному изменению линейных размеров образца ( $dl/l_0$ ) при повышении его температуры на 1 К:

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{dl}{dT}, \quad (13.61)$$

где  $l_0$  — первоначальная длина тела при температуре  $T_0$ ;  $dl$  — изменение длины тела при его нагревании на  $dT$  градусов.

Для объяснения расширения кристаллов при повышении их температуры можно отметить следующие факты.

1. При повышении температуры возрастает амплитуда тепловых колебаний атомов в узлах кристаллической решетки.

2. Потенциальные ямы, в которых совершают колебания атомы, не являются симметричными, они являются более пологими для расстояний, больших расстояния  $d_0$  (значение  $d$ , равное  $d_0$ , соответствует дну потенциальной ямы (рис. 13.14б)). Этот факт можно учесть, если записать для потенциальной энергии частицы следующую формулу:

$$U(x) = kx^2/2 - gx^3/3, \quad (13.62)$$

где второе слагаемое учитывает асимметрию потенциальной ямы, в которой совершают колебания частица, а координата  $x$  определяет расстояние от дна потенциальной ямы (рис. 13.14б).

Формула (13.62) позволяет получить выражение для силы, действующей на атом в такой потенциальной яме:

$$F_x = -dU/dx = kx - gx^2. \quad (13.63)$$

3. Равновесное положение колеблющейся частицы определяется как ее средняя координата  $\langle x \rangle$  ( $\langle x \rangle = d - d_0$ ), качественный график зависимости ее от температуры  $\langle x(T) \rangle$  приведен на рис. 13.14б.

Так как среднее значение силы, действующей на атом в кристалле, будет равно нулю (при колебаниях атома его среднее положение не смещается), поэтому

$$\langle F_x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x \rangle = g\langle x^2 \rangle/k \Rightarrow \langle x \rangle \sim \langle x^2 \rangle. \quad (13.64)$$

Величина  $\langle x \rangle$  определяет длину  $l$  нагретого тела ( $l \sim N\langle x \rangle$ ), а  $\langle x^2 \rangle$  — энергию тепловых колебаний кристалла:

$$\langle W_{\text{AT}} \rangle = 2\langle U(x) \rangle = k\langle x^2 \rangle \Rightarrow W_{\text{реш}}(T) \sim N \cdot \langle W_{\text{AT}} \rangle \sim N\langle x^2 \rangle.$$

Поэтому пропорциональность  $\langle x \rangle$  и  $\langle x^2 \rangle$ , которая выражается формулой (13.64), позволяет сделать вывод о том, что зависимости от температуры  $W_{\text{реш}}(T)$  и  $\mathcal{U}(T)$  совпадают; в соответствии с формулами (13.61) и (13.52) приводит к одинаковой зависимости от температуры  $\alpha_l$  и  $c_V$ :

$$\alpha_l = \text{const} \cdot c_V, \tag{13.65}$$

этот факт подтверждается экспериментально.

Для большинства тел  $\alpha_l$  имеет порядок величины  $(10^{-5} \div 10^{-6}) \text{ K}^{-1}$ .

В области высоких температур ( $T \gg \theta_D$ )  $\alpha_l \sim c_V \approx \text{const}$ , что позволяет оценивать изменение линейных размеров тела с помощью приближенной формулы:  $l = l_0(1 + \alpha_l t)$ , где  $t$  — температура тела в градусах Цельсия, а  $l_0$  для большинства случаев — длина тела при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ .

13.6.

ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

ПРИБЛИЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОЙ СВЯЗИ.

ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА ЭЛЕКТРОНА

В модели свободных электронов металл представляет для электронов потенциальную яму с плоским дном и вертикальными стенками. Следовательно, внутри металла потенциальное поле во всех точках будет одинаковым, не будет зависеть от координаты электрона внутри металла (рис. 13.15а).

Такая модель не может объяснить существование полупроводников и диэлектриков. Это связано с тем, что в этой модели не учитывается периодичность потенциального поля кристалла, его повторяемость при смещении на один период решетки кристалла (рис. 13.15б)

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{d}_0), \tag{13.66}$$

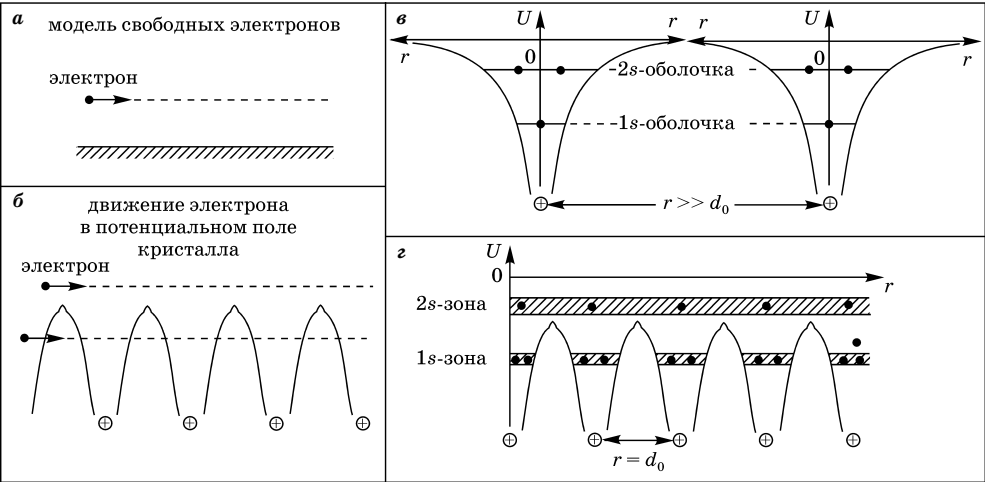


Рис. 13.15

где  $\vec{d}_0$  — вектор, определяющий расположение соседних атомов в кристалле.

Задача квантовой механики о поведении электрона в периодическом потенциальном поле кристалла точно не решается, применяются различные методы ее приближенного решения. Рассмотрим некоторые из них.

**Приближение сильной связи.** За основу рассмотрения энергетического спектра электронов в кристалле берется картина уровней энергии электронов изолированного атома. На примере кристалла лития (Li) рассмотрим, как изменяется картина уровней энергии электронов при образовании кристалла (атом лития имеет три электрона, электронная конфигурация  $1s^2 2s^1$ ).

Если взять  $N$  атомов лития, расположенных на больших расстояниях друг от друга, то энергетический спектр электронов такой системы атомов представляет собой  $N$  одинаковых картин уровней энергии изолированного атома (рис. 13.15а).

При сближении атомов до расстояний, соответствующих расстоянию между атомами в кристалле, за счет их взаимодействия вместо  $N$  одинаковых уровней энергии атома появляется  $N$  близкорасположенных уровней энергии, появляется зона разрешенных энергий. Зоны разрешенных энергий разделяются зонами запрещенных энергий. Наблюдается зонный характер энергетического спектра электронов в кристалле (рис. 13.15б). При этом потенциальные барьеры между соседними атомами уменьшаются как по высоте, так и по ширине, что способствует переходам электронов между соседними атомами (в ряде случаев за счет туннельного эффекта) в кристалле, появлению энергетических зон.

Отметим основные особенности энергетического спектра для электронов в кристалле:

- 1) при увеличении энергии ширина зон разрешенных энергий возрастает, а ширина зон запрещенных энергий уменьшается;
- 2) энергетический спектр электронов в зоне разрешенных энергий будет квазинепрерывным — он дискретный, но его дискретностью можно пренебречь по сравнению с энергией теплового движения  $kT$ ;
- 3) число состояний в зоне разрешенных энергий конечно и равно произведению числа атомов в кристалле на число электронов, содержащихся в электронной оболочке атома, из которой была получена эта зона;
- 4) обозначение зон разрешенных энергий соответствует обозначению электронных оболочек атома, из которых они были получены.

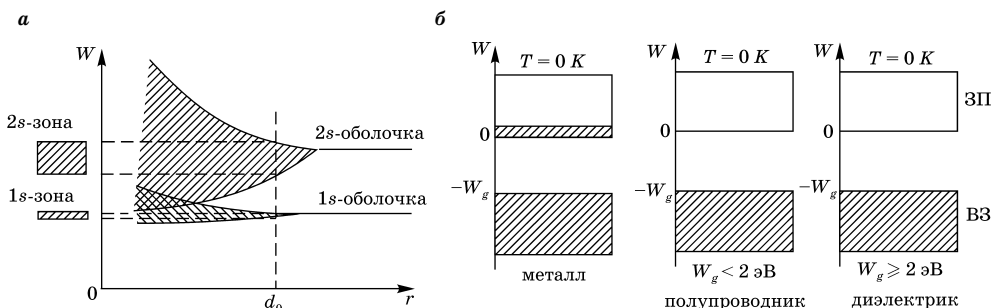


Рис. 13.16

На рис. 13.16а приведен график, показывающий, как происходит расщепление уровней энергии атома в зоны разрешенных энергий в зависимости от расстояния между атомами. Из него следует, что для 2s-оболочки атома заметное расщепление в 2s-зону происходит раньше (на больших расстояниях  $r$ ), чем для 1s-оболочки атома. Это связано с тем, что 2s-оболочка расположена дальше от ядра атома, чем 1s-оболочка, и поэтому электроны этой оболочки испытывают более существенное влияние потенциального поля кристалла.

Как следует из графика, приведенного на рис. 13.16а, сжатие кристалла ( $d < d_0$ ) может привести к заметному изменению энергетического спектра электронов кристалла.

**Классификация твердых тел с точки зрения их зонного строения.** Из всех зон разрешенных энергий обычно выделяют две — зону проводимости и валентную зону. **Зона проводимости** — это самая нижняя из незаполненных зон при температуре  $T = 0$  К. **Валентная зона** — это самая верхняя полностью заполненная зона при температуре  $T = 0$  К.

Такие определения приводят к тому, что эти зоны располагаются одна под другой и разделены зоной запрещенных энергий (см. рис. 13.16б).

Рассмотрим, как можно провести классификацию веществ на разные группы с точки зрения зонной теории. **Металлы** — это вещества, для которых при температуре  $T = 0$  К зона проводимости частично заполнена электронами (см. рис. 13.16б). **Полупроводники** — вещества, для которых при температуре  $T = 0$  К зона проводимости пустая, а валентная зона полностью заполнена электронами. Причем ширина  $W_g$  запрещенной зоны для полупроводников должна быть меньше значения в 2 эВ ( $W_g < 2$  эВ). **Диэлектрики** — вещества, для которых при температуре  $T = 0$  К в зоне проводимости нет электронов, а валентная зона полностью заполнена электронами. Причем ширина запрещенной зоны  $W_g$  должна быть больше значения в 2 эВ ( $W_g \geq 2$  эВ).

Как видно из такой классификации, между полупроводниками и диэлектриками нет качественного различия, они отличаются по числовому значению ширины запрещенной зоны.

Металлы при стремлении температуры к  $T = 0$  К могут проводить электрический ток, а полупроводники и диэлектрики — нет. Это связано с тем, что ширина запрещенной зоны  $W_g$  существенно превышает энергию  $W_{эл}$  ( $W_{эл} \ll W_g$ ), которую должен получить электрон от внешнего электрического поля для того, чтобы участвовать в создании электрического тока. В свою очередь  $W_{эл}$  значительно превосходит расстояние ( $\Delta W_{n,n+1} \ll W_{эл}$ ) между соседними уровнями энергии в зоне проводимости и валентной зоне.

Поэтому для металла электроны в зоне проводимости могут принять энергию от внешнего электрического поля и перейти на свободные вышележащие уровни энергии зоны проводимости (они тем самым могут участвовать в создании электрического тока). В полупроводнике и диэлектрике электроны валентной зоны не могут принять энергию от внешнего электрического поля, так как на расстоянии  $W_{эл}$  от потолка валентной зоны нет разрешенных уровней энергии для электронов.

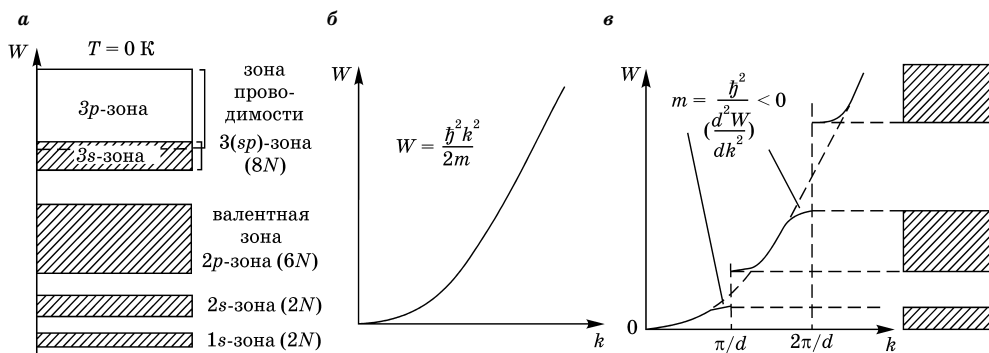


Рис. 13.17

В заключение рассмотрим зонную схему металла магния  $^{12}\text{Mg}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ ), представленную на рис. 13.17а. Из нее следует, что зона проводимости магния будет представлять собой результат наложения (перекрывтия)  $3s$ - и  $3p$ -зон, она является единой  $3(sp)$ -зоной, и поэтому в соответствии с приведенной выше классификацией магний будет представлять собой металл.

**Приближение слабой связи. Эффективная масса электронов.** В этой модели за основу берут модель свободных электронов. Напомним, что в модели свободных электронов потенциальная энергия электрона в кристалле является постоянной величиной. Это приводит к тому, что полная энергия электрона будет равна его кинетической энергии  $W$ , то есть зависимость полной энергии  $W = \hbar^2 k^2 / (2m)$  от модуля волнового вектора  $k$  ( $k = 2\pi/\lambda_0$ ) является параболой (рис. 13.17б).

Для массы электрона в модели свободных электронов можно записать выражение, которое является тождеством:

$$m = \hbar^2 / (d^2 W / dk^2), \quad (13.67)$$

так как взятие второй производной от полной энергии приводит к тому, что левая и правая части выражения (13.63) совпадают ( $m = m$  — тождество).

В приближении слабой связи электроны при своем движении встречают низкие потенциальные барьеры, отстоящие на расстоянии  $d_0$  друг от друга (эта модель наиболее приспособлена для  $2s$ -электронов атома лития, см. рис. 13.15г).

Электроны движутся в кристалле, как волны, эти волны испытывают отражения от границ потенциальных барьеров. Наибольшее отражение будет наблюдаться для волн, длина волн которых удовлетворяет условию Брэгга–Вульфа (см. формулу (7.38))

$$2d_0 \sin \theta = n\lambda_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.68)$$

Возьмем в выражении (13.68) угол  $\theta$ , равный  $\theta = 90^\circ$ , и вместо длины волн  $\lambda_0$  введем в формулу модуль волнового вектора  $k$  ( $\lambda_0 = 2\pi/k$ ). Тогда

$$k = \frac{\pi}{d_0} n = \frac{\pi}{d_0}, 2 \frac{\pi}{d_0}, 3 \frac{\pi}{d_0}, 4 \frac{\pi}{d_0}, \dots \quad (13.69)$$

Приведенные в данной формуле значения модуля волнового вектора запрещены в кристалле, так как они соответствуют максимальному отражению электронной волны от границ потенциальных барьеров, то есть электронная волна в этом случае не может распространяться в кристалле. Это означает, что электронов с энергиями, соответствующими таким значениям  $k$ , в кристалле не существует. При таких значениях  $k$  зависимость  $W = W(k)$  претерпевает разрывы и возникает зонный характер энергетического спектра электронов в кристалле (см. рис. 13.17*а*).

Обращает на себя внимание тот факт, что формула (13.63) в этой модели уже не является простым тождеством, она вводит эффективную массу электрона  $m^*$ , которая описывает влияние потенциального поля кристалла на движение электрона

$$m^* = \hbar^2 / (d^2W / dk^2). \quad (13.70)$$

В соответствии с формулой (13.70) эффективная масса электрона будет зависеть от энергии электрона и, следовательно, от степени заполнения зоны. Так, например, для электронов, находящихся вблизи потолка зоны разрешенной энергии, эффективная масса электрона будет меньше нуля ( $(d^2W / dk^2) < 0 \Rightarrow m^* < 0$ , см. рис. 13.17*б*).

## 13.7. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ

### 13.7.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

В соответствии с классической теорией внешние валентные электроны отрываются от атомов, что приводит в металлах к существованию двух подсистем — газа свободных электронов и кристаллической решетки, в узлах которой располагаются ионы.

Электронный газ подчиняется статистике Максвелла–Больцмана, то есть в тепловом движении принимают участие все электроны, среднюю арифметическую скорость которых можно рассчитать по формуле

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Из-за хаотичности теплового движения электронов электрический ток не возникает ( $\vec{j} = 0$ ), так как через поперечное сечение проводника в обе стороны проходит одинаковое число электронов, и поэтому суммарный перенос заряда равен нулю.

При включении электрического поля у электронов появляется добавочная скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  — это скорость направленного движения под действием сил электрического поля; она по модулю примерно равна  $\sim 1$  мм/с, что существенно меньше модуля скорости  $\langle \vec{u} \rangle$ . Но именно  $\langle \vec{v} \rangle$  обеспечивает наличие тока в проводнике. Образно говоря, при включении электрического поля в металле появляется электрический ветер, смещающий все хаотически движущиеся электроны в одном направлении.



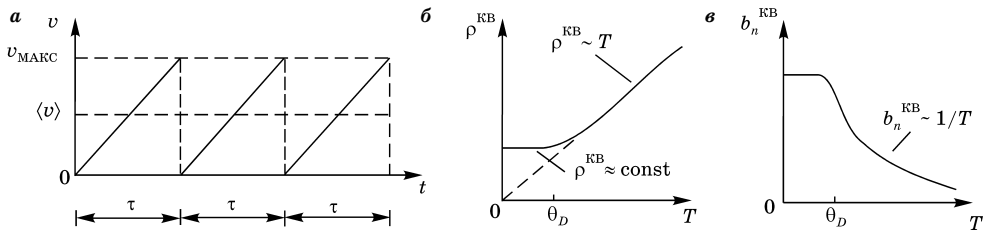


Рис. 13.18

Учитывая формулу (3.2) для плотности тока и закон Ома в дифференциальной форме (3.28), можно ввести понятие подвижности  $b_n$  носителей заряда

$$\begin{aligned} \vec{j} &= q_0 n \langle \vec{v} \rangle, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma &= |q_0| n b, \quad b = \langle v \rangle / E, \end{aligned} \quad (13.71)$$

согласно которой подвижность носителя заряда численно равна средней скорости направленного движения носителя заряда при напряженности  $\vec{E}$  внешнего электрического поля,  $E = 1$  В/м.

Выведем формулы для подвижности и удельной тепловой мощности. Для этого учтем, что в классической теории механизм рассеяния электронов будет следующим: электроны сталкиваются с ионами и при столкновении полностью теряют скорость направленного движения, а скорость их теплового движения остается без изменений. При таком механизме рассеяния средняя длина свободного пробега электронов  $\langle \lambda \rangle$  равна расстоянию между ионами металла, то есть периоду  $d_0$  кристаллической решетки ( $\langle \lambda \rangle = d_0$ ).

Оценим среднюю скорость направленного движения электронов в металле. Из графика зависимости скорости направленного движения от времени (рис. 13.18а) следует, что

$$\langle v \rangle = v_{\text{макс}} / 2 = a\tau / 2 = \frac{F_K \tau}{2m} = \frac{|q_0| E \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle + \langle v \rangle} = \frac{|q_0| E \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (13.72)$$

где  $\tau$  — среднее время свободного пробега электрона. Полученная формула позволяет для подвижности носителей заряда, удельной проводимости и удельной тепловой мощности записать, в рамках классической теории электронного газа, следующие выражения:

$$b_n = \frac{|q_0| \tau}{2m} = \frac{|q_0| \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad \sigma_n = \frac{q_0^2 n \tau}{2m} = \frac{q_0^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (13.73)$$

$$w = \sigma_n E^2 = \frac{q_0^2 n \tau}{2m} E^2 = \frac{q_0^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2. \quad (13.74)$$

В формулах (13.73) и (13.74) учтено, что  $\langle u \rangle \gg \langle v \rangle$ .

Расчеты, проведенные по полученным формулам, свидетельствуют о том, что выводы классической теории электропроводности металлов (КЭТ) во многих случаях не согласуются с экспериментом. Приведем ряд фактов.

1. Из опыта известно, что при низких температурах средняя длина свободного пробега электронов составляет от десяти до ста межатомных расстояний —  $\langle \lambda \rangle = (10 \div 100 d_0)$ . В КЭТ  $\langle \lambda \rangle$  составляет одно межатомное расстояние:  $\langle \lambda \rangle = d$ .

2. На опыте наблюдается обратно пропорциональная зависимость удельной проводимости от температуры ( $\sigma \approx 1/T$ ), а в рамках КЭТ в соответствии с формулами (13.73) удельная проводимость изменяется обратно пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры

$$\sigma_n = \frac{q_0^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{T}}. \quad (13.75)$$

Отметим, что классическая теория электропроводности металлов не объясняет явления сверхпроводимости и контактных явлений.

### 13.7.2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

В квантовой теории электрон движется в кристалле, как волна, и поэтому в идеальном кристалле, при стремлении температуры к абсолютному нулю температур, электропроводность кристалла будет стремиться к бесконечности. Однако в действительности всегда имеются дефекты кристалла и тепловое движение атомов, что приводит к рассеянию электронной волны и к конечным значениям электропроводности кристалла.

В квантовой теории электропроводности получаются в основном такие же формулы, как и в классической теории. Отличия здесь сводятся к следующему.

1. В тепловом движении принимает участие лишь малая часть электронов, расположенных в интервале  $(W_{\text{Ф}} \pm kT)$  вблизи уровня Ферми, поэтому можно заменить среднюю скорость  $\langle u \rangle$  теплового движения электронов на скорость  $u_{\text{Ф}}$  движения электронов вблизи уровня Ферми (она не зависит от температуры металла,  $u_{\text{Ф}} = \text{const}$ ).

2. Механизм рассеяния электронов при высоких и низких температурах отличается от классического механизма рассеяния.

3. Кристаллическое поле влияет на массу движущегося в нем электрона, то есть вводится эффективная масса  $m^*$  электрона.

4. Скорость направленного движения электронов  $\langle \vec{v} \rangle$  (ее также называют **скоростью дрейфа**  $v_{\text{Д}}$ ) устанавливается за счет действия на электроны кулоновской силы ( $\vec{F}_K = q_0 \vec{E}$ ) со стороны внешнего электрического поля и силы сопротивления со стороны кристаллической решетки ( $\vec{F}_C = -m \vec{v}_{\text{Д}} / \tau$ ):

$$m^* \frac{d\vec{v}_{\text{Д}}}{dt} = \vec{F}_K + \vec{F}_C. \quad (13.76)$$

При установившейся скорости дрейфа ( $\vec{F}_K + \vec{F}_C = 0$ ), для дрейфовой скорости  $v_{\text{Д}}$  и подвижности заряда можно записать

$$v_{\text{Д}} = \frac{|q_0| \tau}{m^*} E, \quad b_n^{\text{КВ}} = \frac{v_{\text{Д}}}{E} = \frac{|q_0| \tau}{m^*}. \quad (13.77)$$

Если раньше  $\tau$  являлось средним временем свободного пробега, то теперь оно называется **временем релаксации**. При выключении электрического поля

( $t = 0, \vec{F}_K = 0$ ) в проводнике дрейфовая скорость  $v_d$  в соответствии с уравнением (13.76) будет уменьшаться по экспоненте

$$v_d = v_d(0)\exp(-t/\tau).$$

Поэтому  $\tau$  — это время, за которое скорость направленного движения электронов убывает в  $e$  ( $e \approx 2,7$ ) раз при выключении внешнего электрического поля в проводнике.

Как показывают расчеты, необходимо несколько рассеяний (их число обозначают  $\nu$ ) для того, чтобы исчезла скорость направленного движения электронов. Расстояние  $\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle$ , которое при этом пройдет электрон, называют средней транспортной длиной свободного пробега электрона; она рассчитывается по формуле:

$$\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle = \langle u \rangle \tau = \lambda \nu. \quad (13.78)$$

Запишем формулы в квантовой теории и сопоставим их с экспериментом:

$$b_n^{\text{КВ}} = \frac{|q_0| \tau}{m^*} = \frac{|q_0| \langle \lambda_{\text{тр}} \rangle}{m^* u_{\text{Ф}}}, \quad \sigma^{\text{КВ}} = |q_0| n b_n^{\text{КВ}} = \frac{q_0^2 n \tau}{m^* u_{\text{Ф}}} = \frac{q_0^2 n \langle \lambda_{\text{тр}} \rangle}{m^* u_{\text{Ф}}}. \quad (13.79)$$

В области низких температур ( $T \ll \theta_D$ ) электроны рассеиваются на дефектах решетки и примесных атомах, поэтому средняя длина их свободного пробега  $\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle$  не будет зависеть от температуры и составит:  $\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle = (10 \div 100)d_0$ , что соответствует экспериментальным значениям. В этой области температур удельная проводимость и удельное сопротивление будут оставаться постоянными:

$$T \ll \theta_D: \sigma^{\text{КВ}} \approx \text{const}, \quad \rho^{\text{КВ}} = 1/\sigma^{\text{КВ}} \approx \text{const}. \quad (13.80)$$

В области высоких температур ( $T \gg \theta_D$ ) электроны рассеиваются на фонах, поэтому средняя длина их свободного пробега  $\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle$  изменяется обратно пропорционально температуре ( $\langle \lambda_{\text{тр}} \rangle \approx 1/T$ ). В этой области температур удельная проводимость и удельное сопротивление будут изменяться с температурой следующим образом:

$$T \gg \theta_D: \sigma^{\text{КВ}} \sim 1/T, \quad \rho^{\text{КВ}} \sim T. \quad (13.81)$$

Полученные в квантовой теории зависимости подвижности электронов, удельной проводимости и удельного сопротивления от температуры хорошо согласуются с экспериментом во всей области температур (см. рис. 13.18б, в).

Тот факт, что электроны в металле одновременно участвуют в переносе тепла и электрического заряда, находит свое отражение в законе Видемана–Франца, который устанавливает взаимосвязь между коэффициентом теплопроводности  $K$  и удельной проводимостью металла  $\sigma$ :

$$\left( \frac{K}{\sigma} \right) = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k}{e} \right)^2 T, \quad (13.82)$$

где  $e$  — заряд электрона. При выводе этого закона нужно использовать формулы (13.60) и (13.79).

### 13.7.3. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

**1. Зонная и валентная схемы.** Собственный полупроводник — это химически чистый полупроводник без примесей. К ним относят кристаллы таких элементов, как кремний — Si, германий — Ge, теллур — Te, а также химические соединения — арсенид галлия — GaAs и антимонид индия — InSb. Рассмотрим валентную и зонную схемы таких полупроводников при различных температурах.

**$T = 0$  К.** Все валентные электроны находятся в ковалентной связи, свободных электронов нет, энергия электронов в ковалентной связи равна  $W_g$  (рис. 13.19а). На языке зонной схемы это означает, что валентная зона полностью заполнена электронами, а зона проводимости пустая. Ширина запрещенной зоны равна  $W_g$  (рис. 13.19б).

**$T > 0$  К.** За счет энергии теплового движения часть электронов покидает место в ковалентной связи, образуется пара свободных носителей заряда — свободный электрон и дырка (рис. 13.19в). Этот процесс называется генерацией свободных носителей заряда.

Дырка — это вакантное место в ковалентной связи, она перемещается как положительно заряженная частица по кристаллу из-за того, что в это вакантное место переходят электроны из других ковалентных связей. Поэтому рассматривается как квазичастица с положительным зарядом, моделируя перемещение электронов по ковалентным связям.

На языке зонной схемы за счет энергии теплового движения электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости (рис. 13.19г). Возникают два свободных носителя заряда — это электрон в зоне проводимости и дырка — вакантное место в ковалентной связи.

У электронов вблизи потолка валентной зоны эффективная масса будет меньше нуля (см. формулу (13.70)), поэтому движение электрона в почти заполненной зоне можно моделировать как движение положительно заряженной квазичастицы с положительной массой, то есть дырки.

Наряду с процессами генерации свободных носителей заряда протекают процессы рекомбинации, при которых свободный электрон занимает вакантное место в ковалентной связи, при этом происходит исчезновение пары свободных носителей заряда — свободного электрона и дырки.

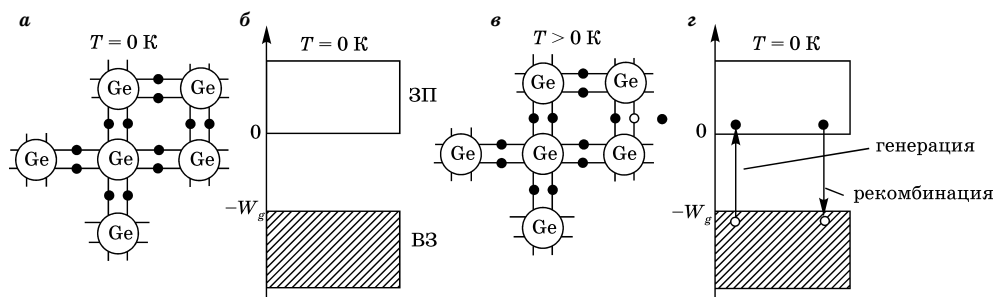


Рис. 13.19

За счет протекания процессов генерации и рекомбинации свободных носителей заряда в полупроводнике устанавливается равновесная концентрация свободных электронов и дырок. Причем концентрации свободных носителей заряда — электронов  $n_n$  и дырок  $n_p$ , будут одинаковы:  $n_n = n_p$ .

**2. Равновесная концентрация электронов и дырок. Положение уровня Ферми.** Рассчитаем равновесную концентрацию электронов и дырок в собственном полупроводнике. Для концентрации свободных электронов в зоне проводимости можно записать:

$$n_n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} f_{\Phi Д}(W) g(W) dW; \quad (13.83)$$

$$g(W) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} \sqrt{W}, \quad f_{\Phi Д}(W) = \exp\left(\frac{W_{\Phi} - W}{kT}\right). \quad (13.84)$$

В этих формулах учтено, что концентрация свободных электронов в зоне проводимости является малой, что позволяет перейти от функции распределения Ферми–Дирака к функции распределения Максвелла–Больцмана и заменить в верхнем пределе интеграла энергию, соответствующую потолку зоны проводимости, на значение, стремящееся к бесконечности.

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \sqrt{W} \exp(-W/(kT)) dW = \sqrt{\pi(kT)^3} / 2,$$

для концентрации свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне (для них формула выводится по аналогии с выводом для свободных электронов) можно записать

$$n_n = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n^* kT)^{3/2} \exp(W_{\Phi} / (kT)); \quad (13.85 \text{ а})$$

$$n_p = \frac{2}{h^3} (2\pi m_p^* kT)^{3/2} \exp(-(W_{\Phi} + W_g) / (kT)). \quad (13.85 \text{ б})$$

Учитывая, что  $n_n = n_p = n = \sqrt{n_n n_p}$ , получим

$$n = \frac{2}{h^3} (2\pi kT)^{3/2} (m_n^* m_p^*)^{3/4} \exp(-W_g / (2kT)) \Rightarrow n \sim T^{3/2} \exp(-W_g / (2kT)). \quad (13.86)$$

Положение уровня Ферми можно найти из равенства  $n_n = n_p$ :

$$W_{\Phi} = -\frac{W_g}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right). \quad (13.87)$$

Известно, что ширина запрещенной зоны существенно больше энергии теплового движения электронов ( $W_g \gg kT$ ) и эффективная масса дырки больше эффективной массы свободного электрона в зоне проводимости ( $m_p^* > m_n^*$ ). Поэтому из формулы (13.87) следует, что в собственном полупроводнике уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, незначительно смещаясь ко дну зоны проводимости (см. рис. 13.20а).

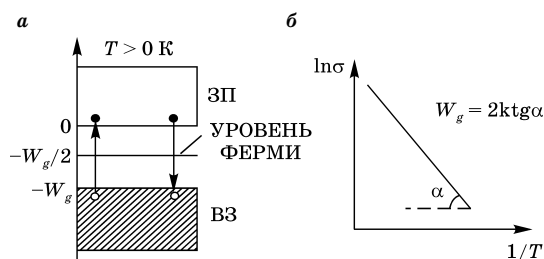


Рис. 13.20

**3. Электропроводность собственного полупроводника.** Выведем формулу для зависимости удельной проводимости собственного полупроводника от температуры. Учитывая два типа носителей заряда, можно записать

$$\sigma = qn_n b_n + qn_p b_p = qn(b_n + b_p).$$

В случае высоких температур ( $T \gg \theta_D$ ), которые соответствуют рабочим температурам для полупроводника, для подвижности свободных носителей заряда из формулы (13.76) запишем:

$$b_{n,p} = \frac{|q_0| \langle \lambda_{тр} \rangle}{m_{n,p} \langle u \rangle} \approx \frac{1/T}{\sqrt{T}} \approx T^{-3/2}, \quad (13.88)$$

что приводит к следующей формуле:

$$\sigma = qn(b_n + b_p) = \sigma_0 \exp(-W_g/(2kT)), \quad (13.89)$$

то есть удельная проводимость собственного полупроводника зависит от температуры по экспоненциальному закону. На рис. 13.20б приведен график зависимости  $\ln \sigma$  от температуры; эта зависимость является линейной, причем по углу наклона  $\alpha$  прямой можно оценить ширину запрещенной зоны:  $W_g = 2ktg\alpha$ .

#### 13.7.4. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Для получения примесного полупроводника в собственный полупроводник вводят небольшое количество атомов (примесей) элементов, валентность которых отличается от валентности атомов полупроводника — либо валентность примесных атомов будет больше (донорная примесь), либо меньше (акцепторная примесь) валентности атомов собственного полупроводника. Рассмотрим каждый случай отдельно.

**1. Примесный полупроводник *n*-типа (донорная примесь).** В собственный полупроводник вводят малые добавки атомов, валентность которых больше валентности атомов собственного полупроводника, например примесь фосфора (валентность равна пяти) в германий (валентность равна четырем).

Атом фосфора отдает четыре электрона для образования ковалентной связи с соседними атомами германия. «Лишний», пятый, электрон атома фосфора участия в ковалентной связи не принимает, он слабо связан с атомом

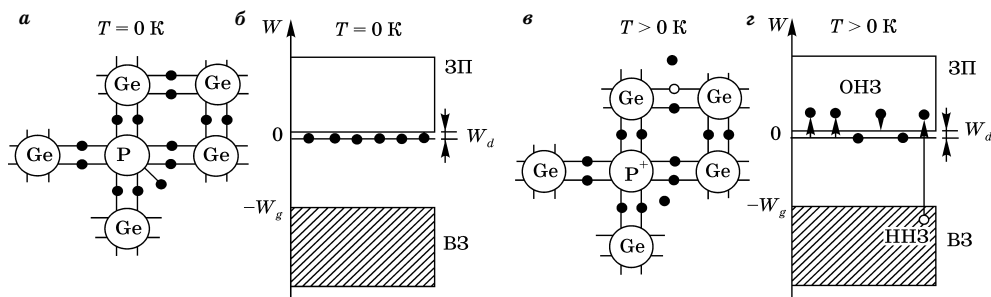


Рис. 13.21

фосфора — энергия связи  $W_d$  этого электрона с атомом существенно меньше энергии  $W_g$  электрона в ковалентной связи ( $W_d \approx 0,01 \text{ эВ} \ll W_g$ ).

Валентная и зонная схемы, соответствующие температуре полупроводника, равной нулю ( $T = 0 \text{ К}$ ), приведены на рис. 13.21а, б. Отличием зонной схемы примесного полупроводника  $n$ -типа от собственного полупроводника является появление в запрещенной зоне вблизи дна зоны проводимости примесного уровня, на котором располагаются «лишние» (пятые) электроны атома фосфора. Расстояние от примесного уровня до дна зоны проводимости равно  $W_d$ .

При температуре, отличной от нуля ( $T > 0 \text{ К}$ ), «лишние» электроны атомов фосфора за счет энергии теплового движения отрываются от атома и становятся свободными. На языке зонной схемы это означает переход электрона с примесного уровня в зону проводимости (рис. 13.21в, г). Для такого перехода требуется энергия  $W_d$ . При этом примесный атом превращается в положительно заряженный ион.

Появляются также и свободные заряды — дырки, они возникают за счет перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости (рис. 13.21в, г). Количество дырок будет существенно меньше числа свободных электронов, так как для образования дырки необходима значительно большая энергия, чем для отрыва «лишнего» электрона от примесного атома ( $W_d \approx 0,01 \text{ эВ} \ll W_g$ ). Поэтому концентрация свободных электронов в таком полупроводнике будет значительно больше концентрации дырок ( $n_n \gg n_p$ ), такой полупроводник называют примесным полупроводником  $n$ -типа.

Отметим, что  $W_d$  также можно назвать энергией ионизации примесных атомов, энергией активации примесных носителей заряда, расстоянием по энергиям от примесного уровня до дна зоны проводимости.

**2. Примесный полупроводник  $p$ -типа (акцепторная примесь).** В собственный полупроводник добавляются примесные атомы, валентность которых меньше валентности атомов полупроводника, например примесь бора (валентность равна трем) в германий (валентность равна четырем).

У атома бора для образования полной схемы ковалентной связи с соседними атомами германия не хватает одного электрона. Этот недостающий электрон атом бора может получить из ковалентной связи двух атомов германия (см. рис. 13.22а). Причем такой переход требует энергии  $W_a$ , существенно меньшей энергии  $W_g$  электрона в ковалентной связи ( $W_a \approx 0,01 \text{ эВ} \ll W_g$ ).

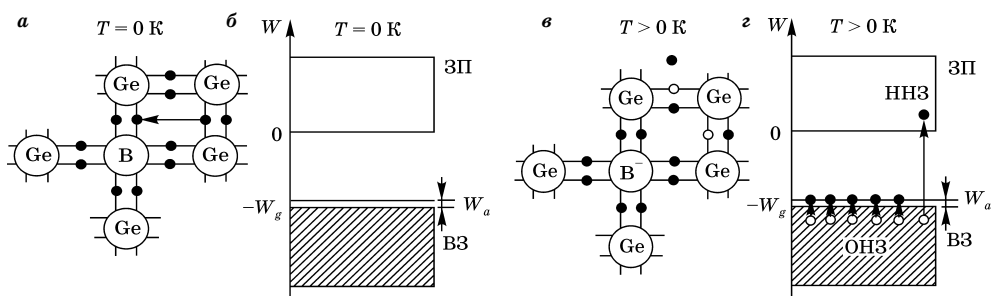


Рис. 13.22

Валентная и зонная схемы, соответствующие температуре полупроводника, равной нулю ( $T = 0 \text{ К}$ ), приведены на рис. 13.22а, б. Отличием зонной схемы примесного полупроводника  $p$ -типа от собственного полупроводника является появление в запрещенной зоне вблизи потолка валентной зоны примесного уровня, на который могут перейти электроны из ковалентных связей двух атомов германия. Расстояние от примесного уровня до потолка валентной зоны равно  $W_a$ .

При температуре, отличной от нуля, электроны из ковалентной связи между двумя атомами германия за счет энергии теплового движения переходят в ковалентную связь атома бора и заполняют ее. При этом образуется свободный носитель заряда — дырка. Ее образование не сопровождается появлением свободного электрона в зоне проводимости (рис. 13.22в). На языке зонной схемы это означает переход электрона из валентной зоны на примесный уровень (рис. 13.22г). Для этого необходима энергия  $W_a$ . При этом примесный атом (атом бора) превращается в отрицательно заряженный ион.

Появляются также и свободные электроны, они возникают за счет перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости (рис. 13.22г). Количество дырок будет существенно больше числа свободных электронов, так как для образования дырки (переход электрона из валентной зоны на примесный уровень) необходима значительно меньшая энергия, чем для перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости ( $W_a \approx 0,01 \text{ эВ} \ll W_g$ ). Поэтому концентрация дырок в таком полупроводнике будет значительно больше концентрации свободных электронов ( $n_p \gg n_n$ ), такой полупроводник называют примесным полупроводником  $p$ -типа.

**3. Зависимость электропроводности примесного полупроводника от температуры.** При анализе зависимости электропроводности примесного полупроводника от температуры необходимо учитывать два вклада — от примесных носителей заряда и от собственных носителей заряда

$$\sigma = \sigma_{\text{примесная}} + \sigma_{\text{собств}} = A \exp(-W_{d(a)}/(2kT)) + B \exp(-W_g/(2kT)). \quad (13.90)$$

Рассмотрим три диапазона температур.

1.  $T < T_s$ . В случае низких температур концентрация примесных носителей заряда возрастает — за счет энергии теплового движения все больше и больше примесных атомов превращаются в ионы. Число собственных носителей заряда существенно меньше примесных носителей заряда, так как пе-



переходы электронов из валентной зоны в зону проводимости требуют значительно большей энергии и при таких температурах являются неэффективными. Поэтому

$$\sigma = \sigma_{\text{примесная}} = A \exp(-W_{d(a)}/(2kT)) \Rightarrow \ln \sigma = -W_{d(a)}/(2kT).$$

Зависимость  $\ln \sigma$  от температуры будет линейной, по углу наклона этой зависимости можно найти энергию активации примесных носителей заряда:  $W_{d(a)} = 2ktg \beta$  (рис. 13.23а).

2.  $T = T_S$ . При этой температуре (она называется температурой истощения примесей) происходит истощение примесей, то есть все примесные атомы превращаются в ионы, концентрация примесных носителей заряда достигает максимального значения и при дальнейшем повышении температуры не изменяется.

3.  $T_S < T < T_i$ . В этой области температур концентрация примесных носителей заряда не изменяется, а концентрация собственных носителей заряда будет существенно меньше концентрации примесных носителей заряда. Следовательно,  $\sigma = \sigma_{\text{примесная}} \approx \text{const}$ . График будет представлять собой горизонтальный прямолинейный участок. Можно отметить, что в этой области температур наблюдается незначительное понижение электропроводности (пунктирная линия на рис. 13.23а) за счет уменьшения подвижности свободных носителей заряда при повышении температуры (см. формулу (13.88)).

4.  $T = T_i$ . При этой температуре становятся эффективными переходы электронов из валентной зоны в зону проводимости, начинает резко возрастать концентрация собственных носителей заряда. Она называется температурой перехода к собственной проводимости примесного полупроводника.

5.  $T > T_i$ . В этой области температур концентрация собственных носителей заряда значительно превышает концентрацию примесных носителей заряда, примесный полупроводник становится собственным:

$$\sigma = \sigma_{\text{собств.}} = B \exp(-W_g/(2kT)) \Rightarrow \ln \sigma = -W_g/(2kT).$$

Зависимость  $\ln \sigma$  от температуры в этой области температур будет линейной, по углу наклона этой зависимости можно найти ширину запрещенной зоны полупроводника:  $W_g = 2ktg \alpha$  (рис. 13.23а).

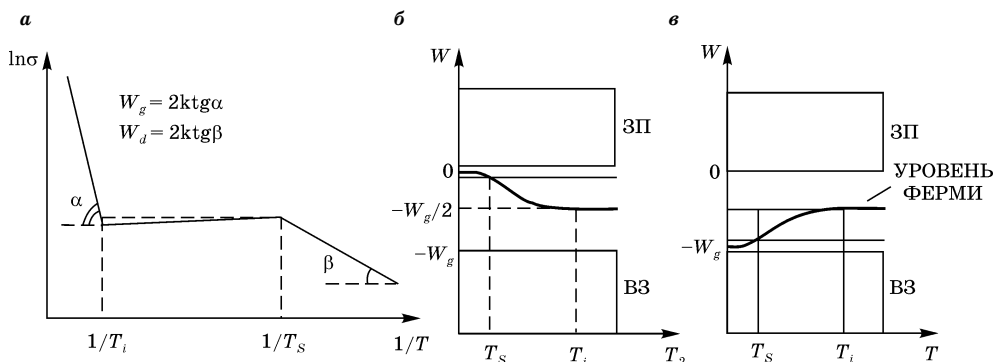


Рис. 13.23

Область температур  $T_s < T < T_i$  является рабочей областью примесного полупроводника. Для германия при концентрации примесей  $n \approx 10^{22} \text{ м}^{-3}$  можно привести следующие оценки для температур  $T_s$  и  $T_i$  — 30 К и 450 К соответственно.

На рис. 13.22б, в приведены зависимости положения уровня Ферми от температуры для примесного полупроводника. При температуре, близкой к температуре  $T = 0 \text{ К}$ , уровень Ферми разделяет состояния, занятые электронами и свободные от них. Затем его положение с повышением температуры изменяется, и он при температуре перехода к собственной проводимости полупроводника ( $T = T_i$ ) занимает положение, соответствующее середине запрещенной зоны.

### 13.7.5. ФОТОПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Для полупроводников появление свободных носителей заряда возможно не только за счет теплового движения электронов, но также и за счет поглощения электронами падающего на полупроводник электромагнитного излучения. Это явление получило название **внутреннего фотоэффекта**. Для полупроводника  $n$ -типа электроны с примесного уровня при поглощении фотонов, энергия которых удовлетворяет условию  $h\nu \geq W_d$ , переходят на свободные уровни энергии в зоне проводимости. При этом возникают примесные носители заряда — свободные электроны (см. рис. 13.21з). В таком полупроводнике можно создать и собственные свободные носители заряда за счет поглощения электронами валентной зоны фотонов, энергия которых превышает ширину запрещенной зоны:  $h\nu \geq W_g$ , при этом возникают переходы электронов из валентной зоны в зону проводимости (см. рис. 13.21з).

Для полупроводника  $p$ -типа примесные носители заряда (дырки) образуются за счет перехода электронов из валентной зоны на примесный уровень при поглощении ими фотонов с энергией  $h\nu \geq W_a$  (см. рис. 13.22з), а собственные носители заряда возникают при переходах электронов из валентной зоны в зону проводимости при поглощении фотонов с энергией фотонов  $h\nu \geq W_g$ .

Следовательно, для примесных полупроводников характерны две красные границы внутреннего фотоэффекта — одна для примесной проводимости ( $\nu_{K1} \geq W_d/h$ ), а другая — для собственной проводимости ( $\nu_{K2} \geq W_g/h$ ) полупроводника. Учитывая порядок величин  $W_d \approx 0,01 \text{ эВ}$  и  $W_g \leq 2 \text{ эВ}$ , можно оценить числовые значения красной границы фотоэффекта для примесной и собственной проводимости:  $\nu_{K1} \approx 2,4 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$  (инфракрасная часть спектра) и  $\nu_{K2} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$  (красный цвет, видимая часть спектра электромагнитных волн).

В отличие от внешнего фотоэффекта, внутренний фотоэффект является инерционным, так как наряду с процессами образования свободных носителей заряда одновременно протекают и процессы рекомбинации.

Фотопроводимость полупроводников, например, используется при изготовлении фоторезисторов, которые существенно изменяют свое сопротивление в зависимости от освещенности полупроводника.

### 13.8. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ. *p-n*-ПЕРЕХОД. ТРАНЗИСТОР

**Контакт двух металлов.** Рассмотрим, что происходит при контакте двух металлов. При этом будем описывать металл в рамках модели свободных электронов. В этом случае металл будет характеризоваться двумя параметрами — энергией Ферми  $W_\Phi$  и работой  $A_B$  выхода электрона из металла (рис. 13.24а). Энергия Ферми определяет положение уровня Ферми относительно дна потенциальной ямы. Работа выхода при температурах, стремящихся к нулю, дает минимальную энергию, которую необходимо сообщить электрону, чтобы выбить его из металла. Работа выхода определяет положение уровня Ферми относительно нулевого уровня энергии. Для определенности будем считать, что выполняются следующие неравенства:  $A_{B1} > A_{B2}$  и  $W_{\Phi 1} > W_{\Phi 2}$  (см. рис. 13.23а).

При контакте этих металлов (контакт означает, что металлы могут обмениваться электронами) электроны из металла 2 будут переходить на свободные нижележащие уровни энергии металла 1. При этом металл 2 получает отрицательный заряд, а металл 1 — положительный, вследствие чего уровни энергии металла 1 поднимаются вверх, а металла 2 опускаются вниз. Это происходит до тех пор, пока их уровни Ферми не окажутся на одной высоте, то есть положение уровней Ферми металлов будет соответствовать одному и тому же значению энергии (рис. 13.24б).

В условиях равновесия возникают две контактные разности потенциалов (рис. 13.24б). Одна из них соответствует разности нулевых уровней энергии контактирующих металлов и называется внешней контактной разностью потенциалов  $U_1$ . Она определяется разностью работ выхода контактирующих металлов

$$eU_1 = A_{B1} - A_{B2}. \quad (13.91)$$

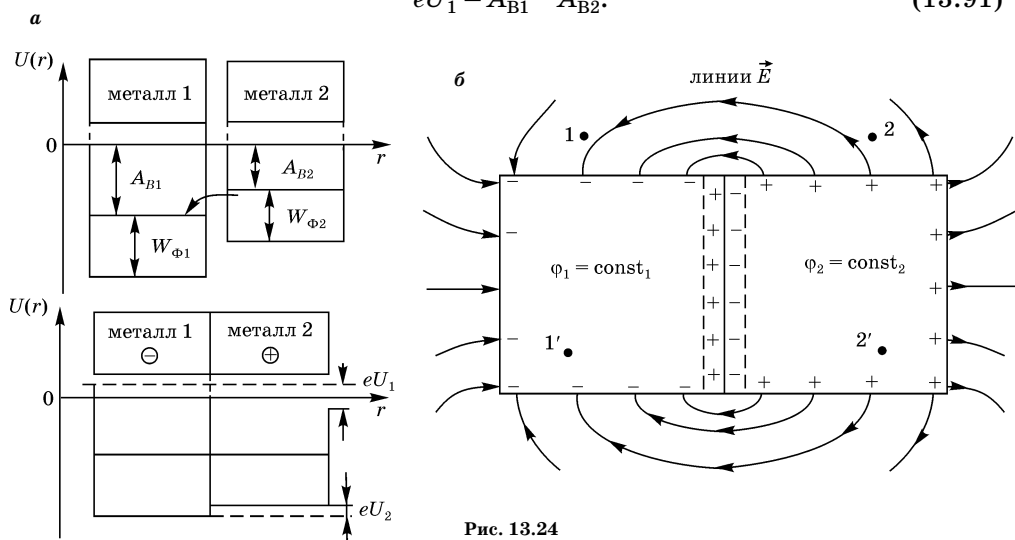


Рис. 13.24

Эта разность потенциалов связана с тем, что металлы получают избыточный заряд, который будет находиться на поверхности металла, что приводит к возникновению внешнего электрического поля за пределами металлов (см. рис. 13.24а). Причем, можно оценить эту разность потенциалов, выбирая точки 1 и 2 вблизи металлов:  $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$  (см. рис. 13.24а). Оценки дают для  $U_1$  значения, равные  $U_1 = (0,01 \div 0,1)$  В.

Вторая контактная разность потенциалов определяется разностью энергий Ферми контактирующих металлов

$$eU_2 = W_{\Phi 1} - W_{\Phi 2} \quad (13.92)$$

и называется внутренней контактной разностью потенциалов.

Известно, что энергия Ферми пропорциональна концентрации свободных электронов в металле ( $W_{\Phi} \sim n^{2/3}$ ), поэтому на границе двух металлов появляется направленная диффузия электронов из металла 1 в металл 2 ( $W_{\Phi 1} > W_{\Phi 2} \Rightarrow n_1 > n_2$ ). Это приводит к тому, что на границе двух металлов возникает двойной электрический слой, который препятствует движению электронов. На этом слое происходит падение потенциала, что и приводит к внутренней контактной разности потенциалов:  $U_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$  (рис. 13.24а). Эта разность потенциалов принимает значения, равные  $U_2 = (10^{-3} \div 10^{-4})$  В.

Возникновение двойного электрического слоя на границе двух металлов не влияет на протекание электрического тока. Это связано с тем, что толщина двойного электрического слоя будет меньше средней длины свободного пробега электрона, и падение концентрации на этом слое не превышает двух процентов ( $\Delta n/n = 0,02$ ).

Аналогичные выводы можно сделать относительно контактов примесных полупроводников одного и того же типа — ( $n - n$ ) и ( $p - p$ ).

***R-n-переход.*** Рассмотрим теперь, что происходит при контакте двух полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа. На рис. 13.25а приведена схема контакта двух полупроводников в начальный момент времени, на ней показано расположение свободных электронов ( $\bullet$ ), дырок ( $\circ$ ) и ионов примесных атомов ( $\oplus$ ,  $\ominus$ ) на границе двух полупроводников. На рис. 13.25б приведена зонная картина для полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа в области контакта в начальный момент времени. Видно, что уровни Ферми контактирующих полупроводников расположены на разных уровнях.

На границе двух полупроводников за счет различия в концентрациях свободных электронов и дырок с течением времени наблюдается направленная диффузия свободных электронов и дырок; при их встрече протекают процессы рекомбинации, в результате чего на границе двух полупроводников образуется  $p$ - $n$ -переход — область на границе двух полупроводников, обедненная свободными носителями заряда. Электрическое поле  $p$ - $n$ -перехода создается нескомпенсированными зарядами ионов примесей (рис. 13.25в).

В условиях равновесия через  $p$ - $n$ -переход протекают два электрических тока (рис. 13.25в). Во-первых, это ток основных носителей заряда (ОНЗ), складывающийся из движения свободных электронов из полупроводника  $n$ -типа в полупроводник  $p$ -типа и дырок из полупроводника  $p$ -типа в полу-

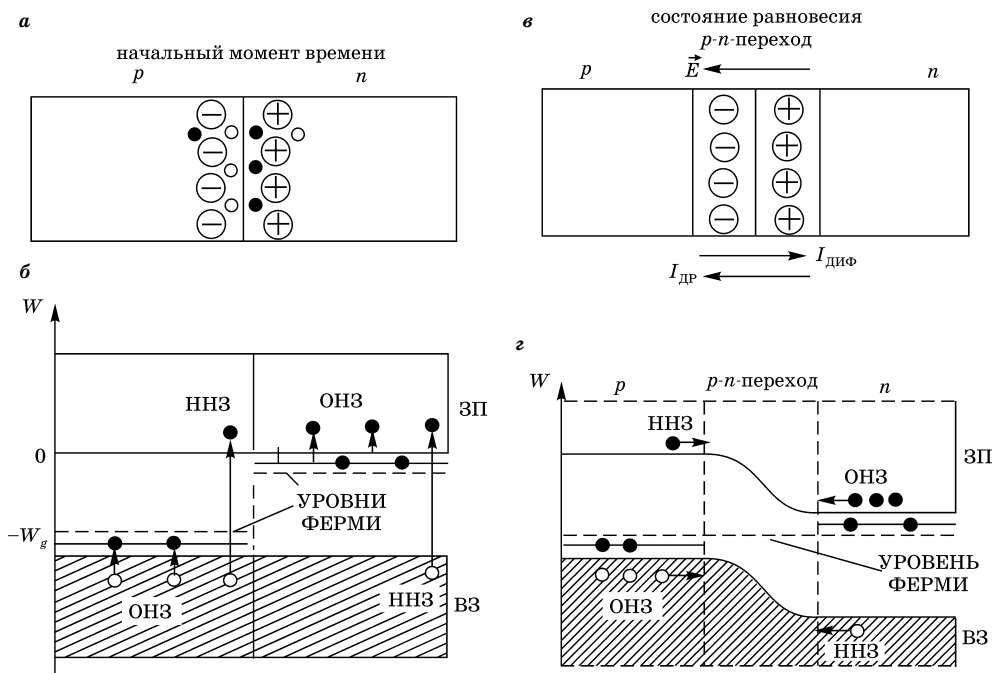


Рис. 13.25

проводник  $n$ -типа. Этот ток (его также называют диффузионным) будет малым по величине, так как  $p$ - $n$ -переход представляет собой препятствие (потенциальный барьер) для ОНЗ. Во-вторых, протекает ток неосновных носителей заряда (ННЗ), для них  $p$ - $n$ -переход не является препятствием; но этот ток (его еще называют дрейфовым) также является малым по величине, так как число ННЗ является малым по сравнению с ОНЗ. В условиях равновесия суммарный ток через  $p$ - $n$ -переход не протекает:  $I_{ОНЗ} + I_{ННЗ} = 0$ .

При образовании  $p$ - $n$ -перехода происходит движение картины уровней энергии полупроводника  $p$ -типа вверх, а полупроводника  $n$ -типа вниз до тех пор, пока уровни Ферми полупроводников не будут находиться на одной высоте, то есть их положение будет соответствовать одному и тому же значению энергии (рис. 13.25в). При этом дно зоны проводимости в области  $p$ - $n$ -перехода видоизменяется, оно будет представлять собой потенциальный барьер для ОНЗ-свободных электронов, которые движутся из полупроводника  $n$ -типа в полупроводник  $p$ -типа, и не будет препятствовать движению ННЗ — свободных электронов, которые движутся из полупроводника  $p$ -типа в полупроводник  $n$ -типа (см. рис. 13.26а).

Изгиб потолка валентной зоны в области  $p$ - $n$ -перехода представляет собой препятствие для ОНЗ-дырок, движущихся из полупроводника  $p$ -типа в полупроводник  $n$ -типа (если моделировать дырки как пузырьки воздуха в жидкости, то в области  $p$ - $n$ -перехода они должны опуститься на большую глубину, что сделать достаточно трудно), а для ННЗ изгиб потолка валентной зоны препятствия не представляет, так как пузырьки воздуха,

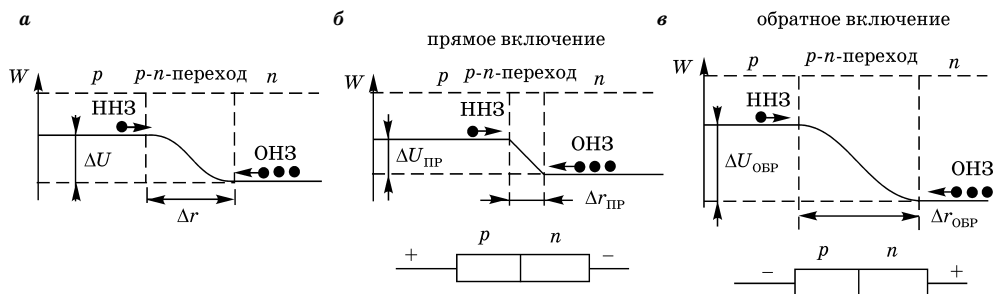


Рис. 13.26

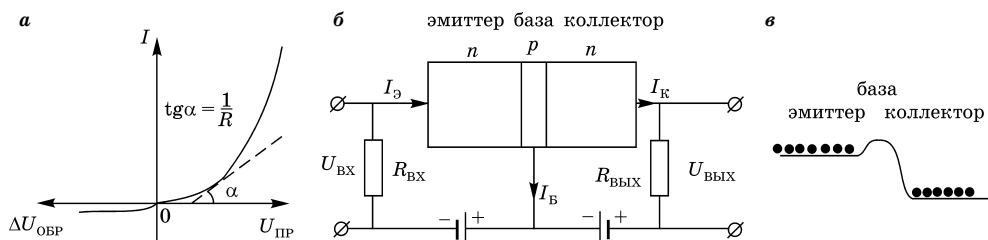


Рис. 13.27

двигаясь из полупроводника  $n$ -типа в полупроводник  $p$ -типа, будут легко всплывать (см. рис. 13.25г).

**Вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода.** При прямом включении  $p$ - $n$ -перехода положительный полюс источника тока подсоединяют к полупроводнику  $p$ -типа, а отрицательный — к полупроводнику  $n$ -типа. Поэтому свободные носители заряда подходят из источника тока к  $p$ - $n$ -переходу, его ширина  $\Delta r_{\text{пр}}$  и высота  $\Delta U_{\text{пр}}$  уменьшаются (рис. 13.26б), сопротивление  $p$ - $n$ -перехода также уменьшается, вследствие этого ток ОНЗ возрастает, а ННЗ остается без изменения, в итоге через  $p$ - $n$ -переход будет протекать отличный от нуля ток:  $I = I_{\text{ОНЗ}} + I_{\text{ННЗ}} = I_{\text{ОНЗ}}$ . Зависимость силы тока от напряжения будет нелинейной, так как с увеличением напряжения сопротивление  $p$ - $n$ -перехода уменьшается (рис. 13.27а).

При обратном включении  $p$ - $n$ -перехода положительный полюс источника тока подсоединяют к полупроводнику  $n$ -типа, а отрицательный — к полупроводнику  $p$ -типа. В этом случае ширина  $\Delta r_{\text{обр}}$  и высота  $\Delta U_{\text{обр}}$   $p$ - $n$ -перехода возрастают (рис. 13.26в), сила тока ОНЗ уменьшается, а ННЗ остается постоянной. В итоге через  $p$ - $n$ -переход будет протекать только ток ННЗ. В этом случае сила тока не будет зависеть от приложенного к переходу напряжения, число ННЗ определяется только температурой полупроводника, и для ННЗ  $p$ - $n$ -переход не представляет собой препятствия.

Нужно отметить, что сила тока, протекающего через  $p$ - $n$ -переход при прямом и обратном включении, будет отличаться примерно в тысячу раз, что подтверждает вентильные свойства  $p$ - $n$ -перехода, то есть его одностороннюю проводимость, способность пропускать ток в одном направлении.

**Транзистор с общей базой.** Транзистор содержит два  $p$ - $n$ -перехода (рис. 13.27б), один из которых включен в прямом направлении ( $n$ - $p$ -переход между эмиттером и базой), а другой — в обратном ( $p$ - $n$ -переход между базой и коллектором). На рис. 13.27в показан вид потенциального поля, в котором движутся электроны при переходе из эмиттера в коллектор. При переходе из эмиттера в базу практически все электроны преодолевают низкий потенциальный барьер (этот переход включен в прямом направлении) и попадают в базу. В базе протекают процессы рекомбинации электронов и дырок, поэтому число свободных электронов будет уменьшаться. Толщина базы выбирается достаточно малой, чтобы убыль числа свободных электронов в базе за счет процессов рекомбинации была незначительной (на рис. 13.26в для наглядности показано, что из семи свободных электронов из эмиттера в коллектор проходит шесть из них). Так, ток базы составляет всего 2% от тока эмиттера ( $I_B = 0,02I_E$ ).

Затем свободные электроны подходят ко второму  $p$ - $n$ -переходу — он для них не представляет препятствия — и практически все проходят в коллектор. Поэтому ток коллектора примерно равен току эмиттера ( $I_K = 0,98I_E$ ).

Так как сопротивление второго  $p$ - $n$ -перехода между базой и коллектором велико (этот переход включен в обратном направлении), то влияние числового значения выходного сопротивления на протекание тока по транзистору будет малым и поэтому можно включить на выходе достаточно большое сопротивление. Это приводит к тому, что такой транзистор будет работать как усилитель напряжения. Действительно, так как  $R_{\text{вых}} \gg R_{\text{вх}}$ , то  $U_{\text{вых}} = I_K R_{\text{вых}} \gg U_{\text{вх}} = I_E R_{\text{вх}}$ .

### 13.9. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Под **термоэлектрическими явлениями** понимают совокупность физических явлений, обусловленных взаимосвязью между тепловыми и электрическими процессами в твердых проводниках. К ним относятся эффекты Зеебека (1823), Пельтье (1834) и Томсона (1856).

Кратко рассмотрим суть этих эффектов. Возьмем замкнутую цепь, состоящую из двух разных металлов. Если места контактов (спаев) этих металлов поддерживать при разных температурах, то в цепи возникнет электрический ток (термоток), в цепи появится термоЭДС  $\varepsilon_T$  (эффект Зеебека, см. рис. 13.28а).

При малых перепадах температур ( $\Delta T = T_A - T_B$ ) спаев термоЭДС будет прямо пропорциональна разности температур:  $\varepsilon_T = \alpha \Delta T$ , где коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называют коэффициентом термоЭДС (или удельной термоЭДС), он зависит от материала проводников и средней температуры  $T = (T_A + T_B)/2$  двух контактов (спаев).

Если же пропустить по цепи электрический ток  $I$ , то в местах контактов проводников, кроме джоулевой теплоты ( $Q = I^2 R t$ ), будет выделяться или поглощаться (в зависимости от направления тока) дополнительная теплота, вызывающая в первом случае нагревание, а во втором — охлаждение

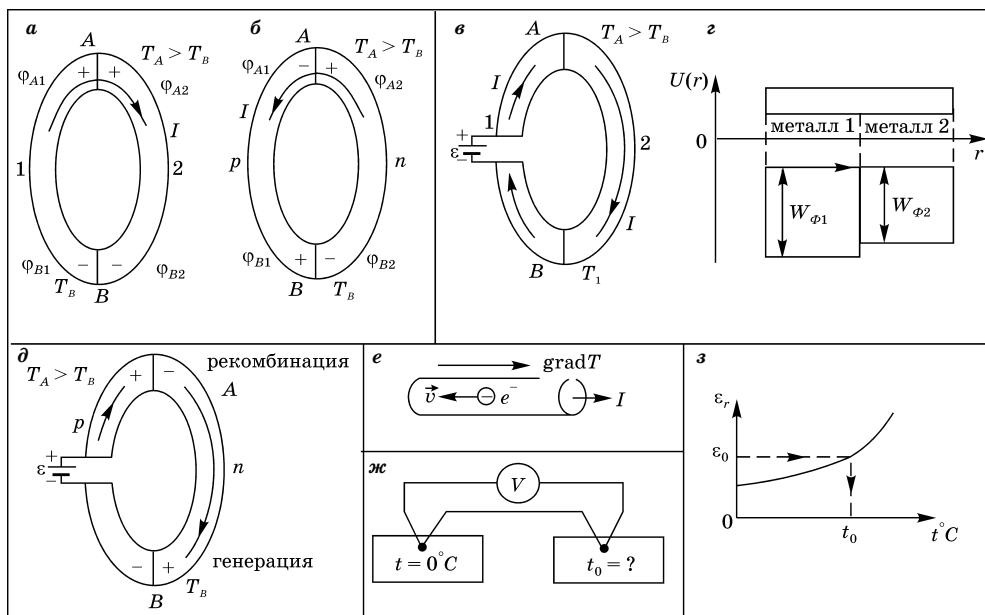


Рис. 13.28

контакта (эффект Пельтье, рис. 13.28в). Количество теплоты Пельтье определяется формулой

$$Q = \Pi It, \quad (13.93)$$

где  $\Pi$  — коэффициент Пельтье, он зависит от природы соприкасающихся проводников и средней температуры контактов;  $t$  — время протекания тока.

К термоэлектрическим явлениям также относят эффект Томсона — в проводнике, вдоль которого создан градиент температуры, кроме джоулевой теплоты, будет выделяться или поглощаться (в зависимости от направления тока) дополнительная теплота (рис. 13.28е).

Между эффектами Зеебека и Пельтье существует непосредственная связь: разность температур на контактах цепи, состоящей из разнородных проводников, вызывает в ней электрический ток ( $\pm \Delta T \rightarrow \pm I$ ), а ток, проходящий через такую цепь, создает разность температур на ее контактах ( $\pm I \rightarrow \pm \Delta T$ ). Согласно количественной теории термоэлектрических явлений, развитой Томсоном, эта взаимосвязь находит свое выражение в формуле, связывающей коэффициент Пельтье и коэффициент термоЭДС:

$$\Pi = \alpha T, \quad (13.94)$$

где под абсолютной температурой  $T$  понимают среднюю температуру двух контактов  $T = (T_A + T_B)/2$ .

Эффекты Пельтье и Томсона дополняют друг друга — дополнительная теплота, возникающая при протекании тока, связана с изменением условий протекания зарядов в проводнике (эффект Томсона) и на границе двух разнородных металлов (эффект Пельтье).



**Объяснение термоэлектрических явлений.** В эффекте Зеебека выделяют три вклада в термоЭДС  $\varepsilon_T$ , возникающей в цепи. Зависимость энергии Ферми от температуры приводит к разным значениям контактной разности потенциалов спаев  $A$  и  $B$ , что в результате дает первый вклад в термоЭДС. Вторым вкладом связан с тем, что направленная диффузия электронов с повышенными скоростями от горячего спае к холодному приводит к их накоплению вблизи спае с более низкой температурой (спае  $B$ , рис. 13.28а). Третий вклад обусловлен тем, что при движении фононов от горячего спае к холодному они за счет столкновений увлекают за собой электроны и приводят к накоплению электронов на холодном спае (образно говоря, в металле дует фононный ветер и увлекает за собой электроны).

Можно отметить, что второй и третий вклады в термоЭДС — это вклады одного знака, причем, как видно из рис. 13.28а, разность потенциалов от этих вкладов будет иметь разный знак для контактирующих металлов:  $(\varphi_{B2} - \varphi_{A2}) < 0$ , а  $(\varphi_{A1} - \varphi_{B1}) > 0$ . Относительно первого вклада можно сказать, что знак первого вклада в термоЭДС определяется разностью уровней Ферми контактирующих металлов.

В качестве примера приведем значение коэффициента термоЭДС  $\alpha$  и направление протекания тока в цепи, составленной из свинца (металл 1) и кадмия (металл 2) —  $\alpha = 4,6$  мкВ/К, ток направлен от свинца к кадмию через более нагретый спае (рис. 13.28а). Для цепи, составленной из свинца (металл 1) и висмута (металл 2) —  $\alpha = 68,0$  мкВ/К, ток направлен от свинца к кадмию через холодный спае (направление тока в этом случае будет противоположным направлению тока, указанному на рис. 13.28а).

Аналогичное объяснение возникновению термоЭДС в замкнутой цепи можно предложить для контакта полупроводников одинакового типа — ( $n$ - $n$ ) и ( $p$ - $p$ ). Если же взять полупроводники с разным типом проводимости ( $p$ - $n$ ), то тогда ситуация изменится, так как в этом случае разности потенциалов, обусловленные вторым и третьим вкладом, будут складываться так:  $(\varphi_{B2} - \varphi_{A2}) < 0$ ,  $(\varphi_{A1} - \varphi_{B1}) < 0$ , что приводит к увеличению термоЭДС на порядок (рис. 13.28б).

Эффект Пельтье объясняется тем, что средняя энергия носителей тока зависит от их энергетического спектра, концентрации и механизмов их рассеяния и поэтому в разных проводниках различна. Как уже отмечалось, металл в модели свободных электронов представляет собой потенциальную яму с плоским дном и вертикальными стенками. В тепловом движении и в создании тока участвуют электроны вблизи уровня Ферми. Если по цепи протекает электрический ток, то электрон под действием внешнего электрического поля переходит из одного металла в другой. При переходе электрона из металла 1 в металл 2 (контакт  $A$ , рис. 13.28в) он должен уменьшить свою энергию от  $W_{\varphi 1}$  до  $W_{\varphi 2}$ . Это означает, что он передает «лишнюю» энергию решетке металла и поэтому в месте контакта происходит выделение тепла Пельтье.

Аналогичные рассуждения для контакта  $B$  (переход из металла 2 в металл 1) приводят к тому, что электрон должен получить добавочную энергию от решетки, что приводит к поглощению теплоты и уменьшению температуры контакта.

Такое же объяснение можно предложить для контакта полупроводников с одинаковым типом проводимости ( $n-n$ ) и ( $p-p$ ). Для полупроводников с разным типом проводимости ( $p-n$ ) ситуация несколько иная. При протекании тока на контакте  $A$  возникает избыток свободных носителей заряда (дырок в полупроводнике  $p$ -типа и свободных электронов в полупроводнике  $n$ -типа), а на другом контакте  $B$  — их недостаток (см. рис. 13.28*д*). Протекание процессов рекомбинации и генерации приводит к нагреванию контакта  $A$  и охлаждению контакта  $B$ .

В эффекте Томсона выделение добавочной теплоты происходит в том случае, когда направленное движение носителей заряда происходит в направлении уменьшения температуры проводника — тогда при переходе из более нагретого участка в более холодный электроны тормозятся и передают избыточную энергию окружающим атомам (выделяется теплота, рис. 13.28*е*). При обратном направлении тока электроны будут переходить из более холодного участка проводника в более нагретый участок. Это будет сопровождаться ускорением электронов полем термоЭДС, они будут увеличивать свою энергию за счет энергии окружающих атомов (теплота поглощается).

**Применение термоэлектрических явлений.** Широкое применение находят термопары (термоэлементы), под ними понимают электрическую цепь, состоящую из двух различных проводников. Их действие основано на эффекте Зеебека. Один контакт термопары поддерживают при известной температуре (например  $t = 0^\circ\text{C}$ , рис. 13.28*ж*), а другой контакт помещают в исследуемое вещество. Измеряя термоЭДС  $\varepsilon_T$ , возникающую в термопаре, можно определить температуру  $t_0$  второго контакта. Для этого используют градуировочную кривую, которая при известной термоЭДС ( $\varepsilon_0$ ) позволяет установить температуру  $t_0$  исследуемого вещества (см. рис. 13.27*з*).

Коэффициент термоЭДС  $\alpha$  для термопары из металлических проводников обычно составляет ( $5 \div 60$ ) мкВ/К (коэффициент  $\alpha$  для термопары из полупроводников может быть на порядок выше). Точность определения температуры с помощью термопары составляет, как правило, несколько градусов, а у некоторых термопар может достигать 0,01 К. Термопары используются в самых различных диапазонах температуры (от нескольких градусов кельвина до 2800 К), они находят широкое применение в различных автоматизированных системах управления и контроля.

Эффект Пельтье используется для охлаждения в холодильных установках и в некоторых электронных приборах.

### 13.10. ПАРАМАГНЕТИЗМ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ (ЩЕЛОЧНЫЕ И ЩЕЛОЧНОЗЕМЕЛЬНЫЕ МЕТАЛЛЫ)

В разделе 4.3.4.2 была рассмотрена группа парамагнетиков, которая хорошо описывается теорией Ланжевена. Однако к парамагнетикам относятся также щелочные и щелочноземельные металлы, магнетизм которых не находит своего объяснения в теории Ланжевена. В частности, эта теория не

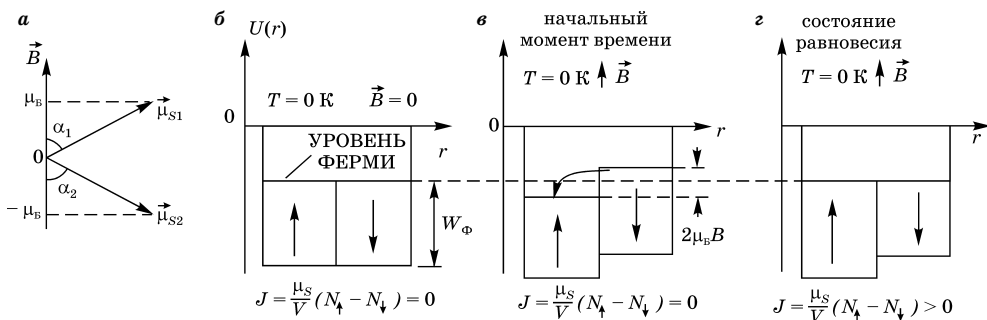


Рис. 13.29

объясняет малых значений их магнитной восприимчивости, а также ее слабую зависимость от температуры.

Рассмотрим другой подход к объяснению парамагнетизма таких металлов. К ним хорошо применима модель свободных электронов, согласно которой в металлах имеются две подсистемы — это газ свободных электронов и решетка ионов.

Так как у ионов все оболочки полностью заполнены электронами, то магнитный момент ионов будет равен нулю, следовательно, решетка ионов не дает вклад в намагниченность этих металлов. Вклад от орбитальных магнитных моментов свободных электронов отсутствует, так как свободные электроны не совершают орбитального движения внутри атомов.

Следовательно, парамагнетизм таких металлов обусловлен спиновыми магнитными моментами свободных электронов.

В отсутствие внешнего магнитного поля все свободные электроны заполняют электронные состояния от дна потенциальной ямы до уровня Ферми. В одном квантовом состоянии могут находиться электроны с разными значениями спинового квантового числа  $m_s$  ( $m_s = \pm 1/2$ ). У этих электронов в отсутствие внешнего магнитного поля энергии одинаковы, а спиновые магнитные моменты  $\vec{\mu}_S$  направлены в противоположные стороны. На рис. 13.29б приведена картина заполнения электронных состояний при температуре  $T = 0 \text{ K}$ . Как видно, число электронов с разной ориентацией спина одинаково, поэтому намагниченность металла в отсутствие внешнего магнитного поля равна нулю:

$$J = \frac{\mu_S}{V}(N_\uparrow - N_\downarrow) = 0.$$

Во внешнем магнитном поле наблюдаются две ориентации спинового магнитного момента электрона относительно направления внешнего магнитного поля (рис. 13.29а). Этим ориентациям спиновых моментов соответствует добавочная энергия (см. формулу (4.30)):

$$W_1 = -(\vec{\mu}_{S1} \vec{B}) = -\mu_{S1} B \cos \alpha_1 = -\mu_B B < 0,$$

$$W_2 = -(\vec{\mu}_{S2} \vec{B}) = -\mu_{S2} B \cos \alpha_2 = \mu_B B > 0.$$

Рассчитаем порядок ее величины. Пусть модуль вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции равен  $B = 1 \text{ Тл}$  (достаточно сильное магнитное поле). Тогда

$$W_{1(2)} = \mu B = 0923 \cdot 10^{-23} \text{ (Дж/Тл)} \cdot 1 \text{ Тл} / (1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ},$$

что существенно меньше энергии Ферми для металлов ( $W_{\Phi} = (2 \div 10) \text{ эВ}$ ).

Итак, во внешнем магнитном поле электроны с магнитным спиновым моментом, направленным в сторону магнитного поля, уменьшают свою энергию, а электроны с магнитным спиновым моментом, направленным в сторону, противоположную направлению магнитного поля, увеличивают ее (см. рис. 13.29а), причем числовые значения добавочной энергии существенно меньше энергии Ферми.

При включении магнитного поля различным ориентациям спиновых магнитных моментов электронов будет соответствовать разная энергия. Вследствие этого уровень Ферми для электронов со спиновым магнитным моментом, направленным в сторону магнитного поля, понижается, для другого направления спинового магнитного момента — повышается, и уровни Ферми для этих электронов будут не совпадать (см. рис. 13.29б). Вследствие этого начинаются переходы электронов со спиновыми магнитными моментами, направленными против направления внешнего магнитного поля на свободные нижележащие по энергии состояния с переворотом спина. В условиях равновесия для всех электронов уровень Ферми будет находиться при одинаковом значении энергии. Как следует из рис. 13.29г, намагниченность металла не будет равна нулю:  $J = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})/V \neq 0$ .

Такой подход к магнетизму щелочных и щелочноземельных металлов позволяет объяснить отмеченные выше особенности их парамагнетизма.

Действительно, намагниченность металла создается малым количеством электронов, находящихся в интервале ( $W_{\Phi} \pm kT$ ) вблизи уровня Ферми. Поэтому магнитная восприимчивость металлов будет малой по сравнению с теорией Ланжевена, а также она будет слабо зависеть от температуры.

### 13.11. ЯВЛЕНИЕ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ. ЯВЛЕНИЕ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

**История открытия.** Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 г. Камерлинг-Оннесом. Он впервые смог получить жидкий гелий и с его помощью охладил ртуть до низких температур. Полученная им зависимость удельного сопротивления ртути от температуры приведена на рис. 13.30. Из нее видно, что при температуре  $T_c$ , равной 4,15 К, сопротивление ртути скачком обращается в ноль ( $R = 0$ ), несмотря на наличие в металле дефектов решетки и примесных атомов. Температура  $T_c$  получила название температуры перехода в сверхпроводящее состояние.

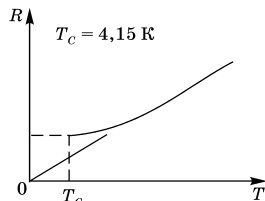


Рис. 13.30

В одном из опытов по кольцу, изготовленному из сверхпроводника, пропускался в течение двух лет электрический ток. Оказалось, что при этом сила тока не изменилась. Это подтверждает тот факт, что в сверхпроводящем состоянии сопротивление проводника точно равно нулю.

В связи с большими перспективами, открывающимися при использовании такого состояния вещества в науке и технике, начался поиск веществ, которые бы совершали переход в сверхпроводящее состояние при наибольшей температуре. На этом пути были изучены чистые металлы (из 76 металлов это явление наблюдалось в 42 из них, наибольшая температура  $T_C$  составила 9,2 К), сплавы и соединения металлов (наибольшая температура была достигнута в 1963 г. для соединения  $\text{Nb}_3\text{Ge}$ , равная  $T_C = 23,2$  К).

В 1986 г. для металлооксидных соединений (МОС) были получены температуры  $T_C$ , которые составляли  $T_C = (60 \div 100)$  К. Столь большой скачок в температурах  $T_C$  был назван явлением высокотемпературной сверхпроводимости.

К группе МОС относится, например, соединение  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , для которого  $T_C = (92 \div 98)$  К, а для соединения  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_3\text{O}_{18}$   $T_C = 125$  К. Эти соединения можно поддерживать при температурах ниже  $T_C$ , используя для охлаждения жидкий азот (температура кипения которого равна 77 К), что делает возможным их практическое применение.

**Объяснение сверхпроводимости.** В металле в тепловом движении принимает участие малая часть свободных электронов, находящихся в интервале  $(W_F \pm kT)$  вблизи уровня Ферми. При температуре  $T > T_C$  свободные электроны в металле движутся независимо друг от друга и рассеиваются на дефектах решетки и примесных атомах, сопротивление металла отлично от нуля.

При температуре  $T < T_C$  между электронами с антипараллельными спинами через кристаллическую решетку (через электрон-фононное взаимодействие) возникает взаимодействие в виде притяжения (рис. 13.31а). При этом возникает устойчивое объединение двух электронов, которое получило название куперовской пары, при ее образовании выделяется энергия.

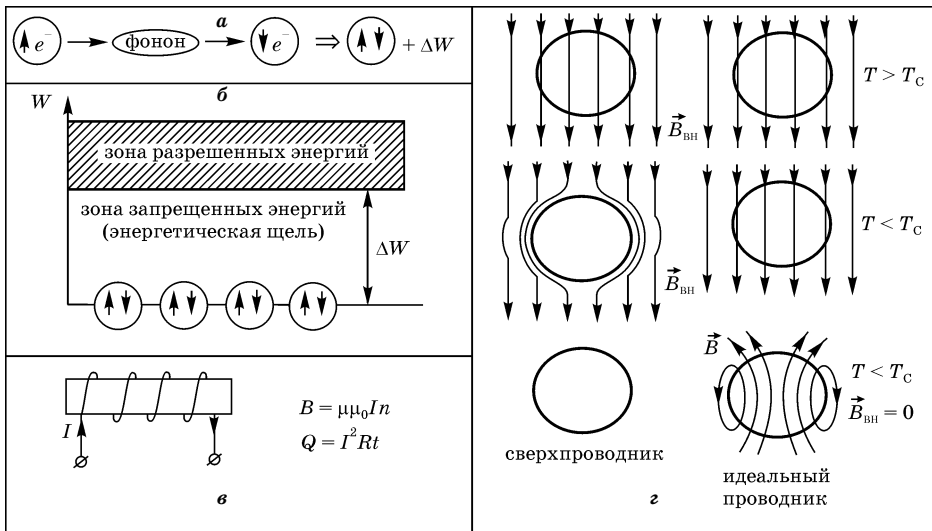


Рис. 13.31

Электроны в куперовской паре находятся на расстояниях порядка  $\sim 10^{-6}$  м, что значительно превышает межатомное расстояние  $d_0$ .

Куперовские пары являются бозонами, и поэтому при таких температурах возникает энергетический спектр для куперовских пар, для бозонов, он приведен на рис. 13.31б. В этом спектре нижний энергетический уровень на котором могут скапливаться куперовские пары, отделен от зоны разрешенных энергий энергетической щелью, ширина которой равна энергии образования куперовской пары  $\Delta W$ .

Поэтому в металле имеются два вида электронного газа. Одна часть электронов составляет газ обычных электронов, которые рассеиваются и движутся независимо друг от друга. Другая часть электронов, объединенных в куперовские пары, взаимодействует с дефектом решетки или примесным атомом только в том случае, если энергия их взаимодействия будет больше ширины энергетической щели (они в этом случае могут поглотить энергию взаимодействия и перейти на вышележащие свободные уровни энергии). В противном случае они не смогут поглощать такую энергию и перейти на вышележащие свободные уровни энергии. Поэтому куперовские пары движутся без рассеяния, и они ответственны за явление сверхпроводимости.

При повышении температуры ширина энергетической щели уменьшается, и при достижении температуры перехода  $T_c$  энергетическая щель исчезает и исчезает сверхпроводящее состояние.

### **Практическое применение.**

**1. Получение сверхсильных магнитных полей.** При пропускании по соленоиду постоянного тока в нем создается магнитное поле, модуль вектора магнитной индукции которого прямо пропорционален силе тока. Если поместить в соленоид железный сердечник, то индукция магнитного поля возрастает в тысячи раз (см. рис. 13.31в). Данная схема создания сверхсильных магнитных полей требует достаточно большого охлаждения соленоида, так как, согласно закону Джоуля–Ленца, при протекании большого тока будет выделяться значительное количество теплоты. Этот недостаток отсутствует у сверхпроводников, для которых сопротивление проводника равно нулю, поэтому для них  $Q = I^2 R t = 0$ .

Но на этом пути также имеются трудности, связанные с тем, что для каждого вещества существует критический ток, выше которого сверхпроводящее состояние разрушается. В настоящее время создаются материалы, для которых критические токи достигают большой величины.

Явление сверхпроводимости позволяет увеличить плотность упаковки логических элементов больших интегральных схем и тем самым позволяет увеличить их быстродействие. Это связано с тем, что протекание электрического тока при работе этих схем в условиях, когда  $R \neq 0$ , приводит к выделению джоулевой теплоты, которая способна их разрушить. В сверхпроводящем состоянии  $R = 0$  и теплота не выделяется.

**2. Эффект Мейснера.** Оказывается, что сверхпроводник является идеальным диамагнетиком, то есть он полностью выталкивает внешнее магнитное поле за свои пределы. Этот эффект получил название эффекта Мейснера.

Известно, что диамагнетики в неоднородном магнитном поле выталкиваются в область более слабого поля. При этом возникает сила выталкивания, которая составляет  $F \approx 4 \cdot 10^5$  Н на  $1 \text{ м}^2$  поверхности сверхпроводника. Это позволяет создавать поезда на магнитной подушке, центрифуги без трения, возможно и другое применение указанного эффекта. Можно также использовать сверхпроводящие оболочки для экранировки приборов от влияния внешних магнитных полей.

Сравним поведение идеального металла (для него при всех температурах сопротивление  $R$  равно нулю ( $R = 0$ )) и сверхпроводника. На рис. 13.31г показано, как ведут себя эти материалы во внешнем магнитном поле при температурах  $T > T_C$  и  $T < T_C$ . Как видно из рисунка, уменьшение температуры в сверхпроводнике ниже  $T_C$  приводит к возникновению вблизи поверхности электрического тока, который компенсирует внешнее магнитное поле внутри сверхпроводника. Этот ток не исчезает, так как сопротивление сверхпроводника будет равным нулю. Для идеального металла понижение температуры ниже  $T_C$  не изменяет его состояния (для температур выше и ниже  $T_C$   $R = 0$ ), и поэтому дополнительного тока вблизи его поверхности не возникает. Если затем убрать внешнее магнитное поле, то идеальный проводник будет захватывать пронизывающий его магнитный поток, и он будет отличен от нуля и в дальнейшем, так как вблизи поверхности идеального проводника возникает незатухающий электрический ток. В случае сверхпроводника магнитное поле будет отсутствовать (см. рис. 13.31г).

Существуют сверхпроводники первого и второго рода. Качественное различие в их поведении наиболее наглядно можно показать на примере образца, изготовленного в виде длинного цилиндра. Во внешнем магнитном поле этот образец располагают так, чтобы линии магнитной индукции внешнего магнитного поля были параллельны образующей цилиндра.

Магнитное поле внутрь сверхпроводников первого и второго рода не проникает. Но для них существует критическое значение внешнего магнитного поля, превышение которого приводит к тому, что поверхностный ток не может компенсировать внешнее магнитное поле внутри проводника, происходит разрушение сверхпроводящего состояния.

Для сверхпроводника первого рода при достижении критического значения магнитного поля ( $B \geq B_K$ ) происходит полная потеря сверхпроводящего состояния, он во всем объеме сразу переходит в нормальное состояние. Для сверхпроводника второго рода разрушение сверхпроводимости магнитным полем является более сложным. При достижении первого критического значения ( $B = B_{K1}$ ) в нем зарождаются области нормального состояния в форме нитей, пронизывающих образец и имеющих толщину, сравнимую с глубиной проникновения магнитного поля. При увеличении внешнего магнитного поля концентрация нитей возрастает, что приводит к постепенному уменьшению областей сверхпроводящего состояния. При достижении второго критического значения ( $B = B_{K2}$ ) сверхпроводящее состояние полностью разрушается. Причем наблюдается следующее неравенство —  $B_{K2} \gg B_{K1}$ , что позволяет использовать сверхпроводники второго рода для получения сверхсильных магнитных полей.

Если взять произвольную форму образца, то тогда процесс перехода в нормальное состояние для проводников первого рода затягивается, он переходит в смешанное состояние. В нем внешнее магнитное поле будет проникать внутрь сверхпроводника, он расслаивается на чередующиеся области нормальной и сверхпроводящей фаз.

**3. СКВИД** (сверхпроводящий квантовый интерференционный детектор). Этот прибор позволяет измерять чрезвычайно малые значения модуля вектора индукции магнитного поля ( $B \approx 10^{-15}$  Тл), силы тока ( $I \approx 10^{-10}$  А) и напряжения ( $U \approx 10^{-18}$  В). Его работа основана на следующих явлениях.

1. Замораживание магнитного потока. Пусть проводящий контур из сверхпроводника находится во внешнем магнитном поле при температуре  $T$ , большей  $T_C$  ( $T > T_C$ ), магнитный поток через плоскость кольца обозначим как  $\Phi_{\text{внутр}}$ . При охлаждении проводника до температуры ниже  $T_C$  ( $T < T_C$ ) магнитный поток через плоскость контура будет оставаться неизменным при любых изменениях внешнего магнитного поля, то есть «замороженным». Это связано с возникновением в проводнике индукционного тока, магнитный поток  $\Phi_I$  которого будет компенсировать любые внешние изменения магнитного потока через плоскость контура. При этом индукционный ток со временем не исчезает из-за равенства сопротивления металла нулю

$$\Phi'_{\text{внутр}} = \Phi_{\text{внутр}} + (\Phi_{\text{внеш}} + \Phi_I) = \Phi_{\text{внутр}} = \text{const.}$$

2. Квантование магнитного потока. Обычные электроны движутся в проводнике, рассеиваясь на дефектах решетки и примесных атомах. При таком взаимодействии фаза волны де Бройля, соответствующая их движению, изменяется случайным образом, и поэтому отсутствует точное числовое значение изменения фазы волны при полном обороте по проводящему контуру.

Электроны, объединенные в куперовские пары, движутся в сверхпроводнике без рассеяния, и поэтому за один оборот фаза их волн де Бройля изменяется на значение, равное  $\Delta\varphi = 2\pi$ . Из этого условия следует, что магнитный поток через плоскость сверхпроводящего кольцевого тока изменяется не непрерывно, а квантуется (рис. 13.32а), принимая значения

$$\Phi_{\text{внутр}} = n\Phi_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (13.95)$$

где минимальное значение (квант) магнитного потока

$$\Phi_0 = \pi\hbar/|e| = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}. \quad (13.96)$$

3. Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона (1963). Если в замкнутый контур из сверхпроводящего металла вставить небольшой участок из диэлектрика (контакт Джозефсона, рис. 13.32б), то в этом случае по контуру будет также протекать электрический ток. Электроны, объединенные в куперовские пары, будут проходить этот участок за счет туннельного эффекта, при этом падения напряжения на контакте не возникает ( $U = 0$ ).

Оказывается, что наличие участка из диэлектрика ослабляет сверхпроводящее состояние, а именно: существует такое значение силы тока  $I_0$ , при котором магнитный поток через плоскость контура «размораживается» и может изменить свое числовое значение. При этом на контакте для значе-



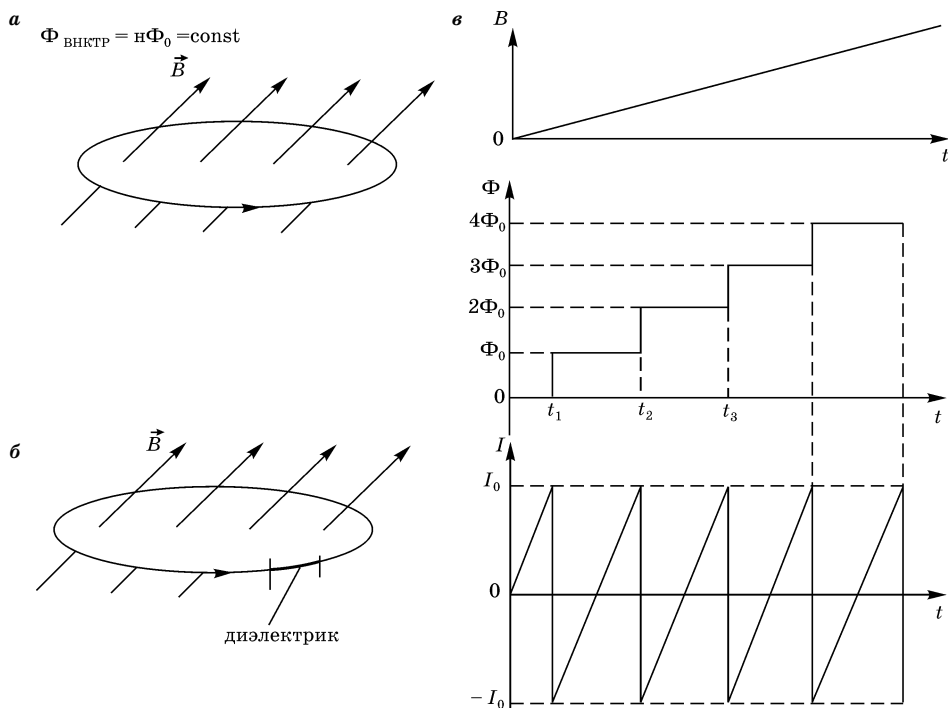


Рис. 13.32

ний силы тока  $I > I_0$  возникает падение напряжения, что приводит к излучению электромагнитных волн (нестационарный эффект Джозефсона). Это связано с тем, что куперовские пары при переходе через область контакта при значении силы тока  $I > I_0$  получают дополнительную энергию  $2eU$ , которую они должны отдать, попадая снова в область сверхпроводника, что происходит в виде излучения куперовской парой фотона частоты  $\nu$ , равной  $\nu = 2eU/h$ .

Обсудим теперь работу СКВИДа. Будем считать, что в начальном состоянии магнитный поток через плоскость контура будет равным нулю (рис. 13.32в). При включении внешнего магнитного поля в проводящем контуре возникает индукционный ток  $I$ , который компенсирует изменение магнитного потока, возникающего от внешнего магнитного поля, и поэтому в моменты времени  $t = (0 \div t_1)$  магнитный поток через плоскость кольца заморожен ( $\Phi_{\text{внутр}} = 0$ ).

При увеличении внешнего магнитного поля будет возрастать сила тока, текущего по кольцу. Достигнув значения силы тока  $I$ , равной  $I_0$  (момент времени  $t = t_1$ ), магнитный поток «размораживается» и изменяется скачком от нуля до  $\Phi_{\text{внутр}} = \Phi_0$ . Согласно правилу Ленца, индукционный ток будет препятствовать такому изменению магнитного потока, что приводит к скачку силы тока от значения  $I_0$  до  $-I_0$  (рис. 13.32в). После этого магнитный поток через проводящий контур в моменты времени ( $t = (t_1 \div t_2)$ ) не изменяется, он

при изменении силы тока в контуре от значений  $(-I_0)$  до  $I_0$  будет «заморожен». При достижении значения  $I = I_0$  ( $t = t_2$ ) магнитный поток в контуре снова «размораживается» ( $t = t_2$ ) и скачком изменяется от значения  $I_0$  до значения  $(-I_0)$ .

Описанные процессы с течением времени будут повторяться. Значения силы тока  $I_0$  составляют порядка  $I \approx 10^{-10}$  А, современные приборы такие значения не могут измерить. Однако при малой силе тока резкие скачки  $(dI/dt)$  силы тока приводят к большим значениям ЭДС самоиндукции ( $\varepsilon = -L(dI/dt)$ ), наводимой в измерительной катушке, связанной с проводящим контуром.

Этот прибор используют для определения малых изменений силы тока, магнитного поля и напряжения. Такие приборы позволяют получать, например, магнитные диаграммы работы сердца и других органов человека, обнаруживать малое количество магнитоактивных веществ в различных средах.

**4. Явление сверхтекучести.** Сверхтекучесть — это такое состояние квантовой жидкости, при котором она проникает через узкие щели и капилляры без трения, а если опустить в сосуд с такой квантовой жидкостью предмет, то она покрывает части предмета, не находящиеся в жидкости, пленкой. По этой пленке жидкость может двигаться без трения (или вверх, или вниз, в зависимости от условий опыта). Сверхтекучим становится жидкий гелий  $^4\text{He}$  при температурах ниже  $T_\lambda = 2,17$  К при давлении насыщенных паров  $p_s = 5,2$  кПа. Такой жидкий гелий называется  $\text{He II}$ , в отличие от обычного жидкого гелия ( $\text{He I}$ ).

Явление сверхтекучести объясняется следующим образом. При температурах ниже  $T_\lambda$  в гелии существуют одновременно две взаимно проникающие компоненты — нормальная и сверхтекучая. Так как атомы гелия  $^4\text{He}$  являются бозонами (их спин равен нулю), то часть из них может переходить в состояние с нулевым импульсом. Это явление называют **Бозе–Эйнштейновской конденсацией**, а совокупность перешедших в это состояние атомов — **Бозе-конденсатом**. Их движение является взаимосвязанным, когерентным, и этот конденсат движется, не испытывая сопротивления со стороны обтекаемых им предметов и стенок канала или сосуда, он не обладает вязкостью и свободно протекает через узкие щели и капилляры. Нормальная компонента  $\text{He II}$  проявляет себя в том, что если поместить диск на подвесе в  $\text{He II}$ , то его свободные крутильные колебания будут затухать, то есть вязкость гелия в этом случае отлична от нуля. В этом состоит своеобразие проявления вязких свойств  $\text{He II}$ . Было установлено, что при определенных условиях сверхтекучим также становится и  $^3\text{He}$ , хотя его атомы являются фермионами (спин равен  $1/2$ ). Сверхтекучесть в этом случае связана также с образованием Бозе-конденсата, в который переходят куперовские пары (они являются бозонами).

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ КУРСА ФИЗИКИ

**1. Графический смысл производной** от функции  $y(x)$  по аргументу  $x$  и интеграла от  $y(x)$  в пределах значений аргумента от  $x_1$  до  $x_2$ .

Для определения производной функции  $y$  по аргументу  $x$  при каком-либо значении  $x = x_0$  необходимо взять конечные приращения аргумента  $x$  ( $\Delta x = x_1 - x_2$ ) и функции  $y$  ( $\Delta y = y_1 - y_2$ ) и затем устремить  $\Delta x$  к нулю, т. е. взять бесконечно малые приращения  $dx$  и  $dy$  (их также называют элементарными приращениями). Тогда

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (\text{П.1.1})$$

и графически производная  $y'$  представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке (рис. П.1.1а).

Графически интеграл от функции  $y$  в пределах значений аргумента от  $x_1$  до  $x_2$  представляет собой площадь под графиком функции в пределах от  $x_1$  до  $x_2$  (рис. П.1.1б). Для ее расчета разбивают интервал  $(x_1, x_2)$  на малые участки  $\Delta x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), определяют площади прямоугольных полосок ( $y_i \Delta x_i$ ) и затем их суммируют.

Точное значение площади под графиком функции получают при стремлении  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow dx$ , бесконечная сумма бесконечно малых величин ( $ydx$ ) обозначается в виде интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \left( \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=2}^N y_i \Delta x_i \right). \quad (\text{П.1.2})$$

Так, в частности, для прямолинейной зависимости  $y = bx$  интеграл будет равен площади трапеции (рис. П.1.1в), поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} bxdx = \frac{bx_1 + bx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{bx_2^2 - bx_1^2}{2}.$$

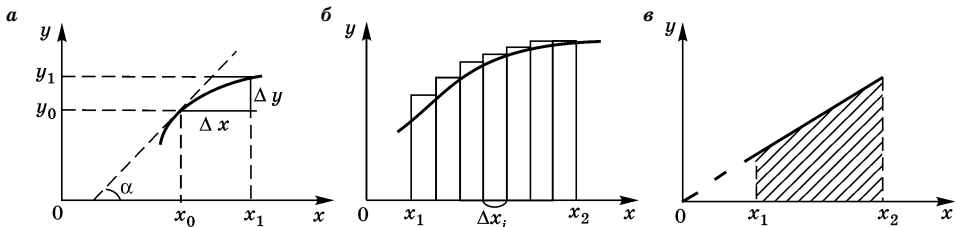


Рис. П.1.1

Приведем необходимые для дальнейшего изложения материала ряд формул табличных интегралов:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1; \quad (\text{П.1.3})$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_a^b = \ln \left| \frac{b}{a} \right|; \quad (\text{П.1.4})$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1; \quad (\text{П.1.5})$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2. \quad (\text{П.1.6})$$

**2. Скалярное произведение двух векторов**  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — это скалярная величина, равная произведению модулей векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , умноженному на косинус угла  $\alpha$  между ними:

$$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a}) = ab \cos \alpha = b_a a,$$

где в формулу введена проекция вектора  $\vec{b}$  на направление вектора  $\vec{a}$  ( $b_a = b \cos \alpha$ , рис. П.1.2а).

Скалярное произведение произвольного вектора  $\vec{c}$  на его вектор элементарного приращения  $d\vec{c}$  можно записать в следующем виде (рис. П.1.2б):

$$\vec{c} d\vec{c} = c |dc| \cos \alpha = c dc,$$

где  $dc$  — элементарное приращение модуля вектора  $\vec{c}$ , которое может принимать как положительные, отрицательные, так и нулевые значения. В частности, это относится к элементарным приращениям модулей радиус-вектора  $\vec{r}$  ( $dr$ ), линейной скорости  $\vec{v}$  ( $dv$ ), угловой скорости  $\vec{\omega}$  ( $d\omega$ ) и т. д. Для вектора же элементарного углового перемещения  $d\vec{\phi}$  по определению  $d\phi$  всегда больше нуля.

**3. Векторное произведение векторов**  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — это вектор  $\vec{c}$ , равный по модулю произведению модулей векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на синус угла  $\alpha$  между ними (рис. П.1.2в).

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}], \quad c = ab \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , его направление можно найти по трем эквивалентным правилам.

**Правило правого буравчика** — вращательное движение буравчика должно совпадать с направлением кратчайшего поворота от  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , тогда его поступательное движение дает направление  $\vec{c}$ .

**Правило левой руки** — четыре пальца нужно расположить по направлению вектора  $\vec{a}$ , вектор  $\vec{b}$  должен входить в ладонь, тогда отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление  $\vec{c}$ .

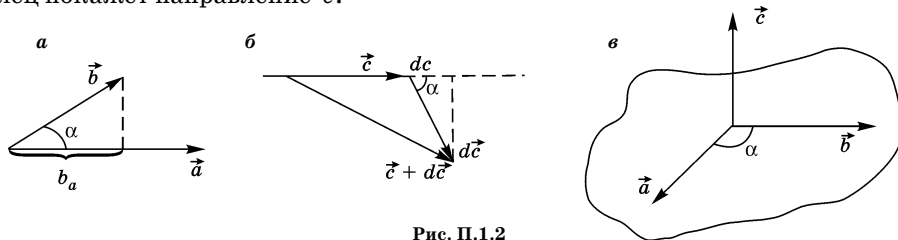


Рис. П.1.2

**Правило векторного произведения** — если смотреть с конца вектора  $\vec{c}$  на плоскость векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то тогда кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  будет направлен против часовой стрелки.

**4. Двойное векторное произведение векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$**  раскрывается следующим образом:

$$[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \quad (\text{П.1.7})$$

**5. Градиент скалярной величины  $a$ .** Пусть в пространстве каким-либо образом распределена скалярная величина  $a$  (существует поле скалярной величины  $a$ ) — это может быть поле температуры ( $a = T$ ), плотности вещества ( $a = \rho$ ), потенциальной энергии ( $a = W_p$ ) и т. д. Такое поле можно охарактеризовать максимальным и минимальным значением  $a$ , средним значением  $a$ , а также градиентом  $a$ . Под градиентом скалярной величины понимают вектор, который в каждой точке пространства направлен в сторону наиболее быстрого возрастания  $a$  и численно равен приращению величины  $a$  на единицу длины этого направления

$$\text{gr}a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{k}, \quad |\text{gr}a| = \frac{da}{dl}, \quad (\text{П.1.8})$$

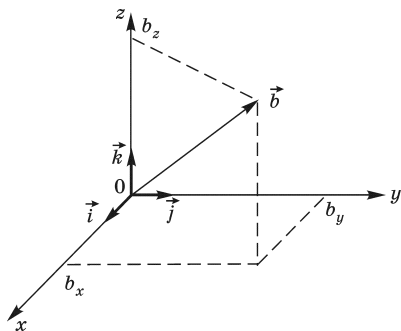


Рис. П.1.3

где  $\vec{l}$  — направление  $\text{gr}a$  в данной точке пространства; векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — векторы единичной длины ( $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$ ), указывающие направления осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  в пространстве (рис. П.1.3). Они позволяют представить произвольный вектор  $\vec{b}$  в виде суммы его проекции на оси (рис. П.1.3):

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}. \quad (\text{П.1.9})$$

При вычислении производной величины  $a$  по координате  $x$  в формуле (П.1.8) считается, что координаты  $y$  и  $z$  остаются постоянными — такая производная называется частной производной по координате  $x$ :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{dx} \quad (y = \text{const}, z = \text{const}).$$

Аналогичные предположения принимаются при расчете частных производных по координатам  $y$  и  $z$ .

Выражение (П.1.8) можно записать в более компактном виде, если ввести оператор Гамильтона или оператор Набла:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (\text{П.1.10})$$

Действие этого оператора на скалярную величину  $a$  приводит к выражению (П.1.8), то есть  $\text{gr}a = \nabla a$ .

## 6. Математическое описание векторных полей.

**6.1. Линии вектора  $\vec{a}$ .** Однородные и неоднородные поля. Пусть в пространстве существует поле вектора  $\vec{a}$ , то есть в каждой точке пространства задан вектор  $\vec{a}$ . Это может быть поле вектора скорости  $\vec{v}$  течения жидкости, вектора напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля, вектора напряженности  $\vec{E}_B$  вихревого электрического поля, вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного поля и т. д.

Для описания векторного поля вводят понятие линий вектора  $\vec{a}$  — они проводятся так, чтобы в каждой точке линии вектор  $\vec{a}$  был направлен по касательной

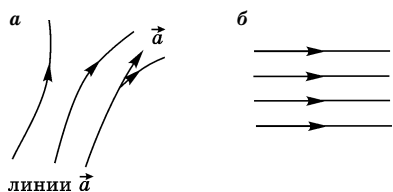


Рис. П.1.4

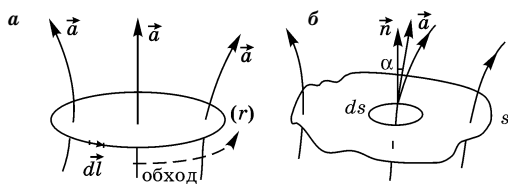


Рис. П.1.5

к ним (рис. П.1.4а). Они нигде не пересекаются, их проводят так, чтобы густота линий  $\vec{a}$  в данной точке поля (число линий  $\vec{a}$ , пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную к линиям  $\vec{a}$ , в каждой точке поля равнялось модулю  $\vec{a}$ ).

В общем случае векторное поле является неоднородным — направление и модуль  $\vec{a}$  изменяются. Для однородного поля в каждой его точке вектор  $\vec{a}$  одинаков ( $\vec{a} = \text{const}$ ). Линии  $\vec{a}$  такого поля — это параллельные прямые, соседние линии отстоят на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. П.1.4б.)

**6.2. Циркуляция и поток вектора  $\vec{a}$ .** Возьмем в неоднородном поле воображаемый замкнутый контур  $\Gamma$ , укажем произвольно направление его обхода и введем вектор  $d\vec{l}$ , равный по модулю элементарной длине  $dl$  контура. В каждой точке вектор  $d\vec{l}$  совпадает с касательной к контуру и направлен по обходу контура (рис. П.1.5а).

Тогда **циркуляцией вектора  $\vec{a}$**  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  называют интеграл следующего вида:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} a dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{a}, d\vec{l}). \quad (\text{П.1.11})$$

Можно утверждать, что если для поля вектора  $\vec{a}$  циркуляция  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  равна нулю, то это поле является потенциальным (например поле силы тяжести  $m\vec{g}$ , электростатическое поле вектора  $\vec{E}$  и т. д.):

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l} = 0. \quad (\text{П.1.12})$$

Поэтому формула (П.1.12) является признаком потенциальности векторного поля. Если же циркуляция  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  отлична от нуля, то поле вектора  $\vec{a}$  не является потенциальным, его называют вихревым полем.

Введем понятие потока  $\Phi$  вектора  $\vec{a}$ . Возьмем в неоднородном поле вектора  $\vec{a}$  произвольную поверхность  $S$ , выделим на ней элементарную площадку  $dS$  и введем вектор  $d\vec{S}$ , направленный вдоль вектора нормали  $\vec{n}$  к площадке (рис. П.1.5б). Модуль  $d\vec{S}$  равен площади  $dS$  элементарной площадки.

Тогда **элементарным потоком  $d\Phi$  вектора  $\vec{a}$**  через площадку  $dS$  называют величину

$$d\Phi = \vec{a} d\vec{S} = a dS \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{a}, \vec{n}). \quad (\text{П.1.13})$$

Суммируя потоки  $d\Phi$  через все площадки  $dS$  поверхности  $S$ , найдем поток вектора  $\vec{a}$  через поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S a dS \cos \alpha. \quad (\text{П.1.14})$$

Если учесть, что густота линий  $\vec{a}$  определяет модуль вектора  $\vec{a}$  в данной точке поля, то тогда поток вектора  $\vec{a}$  численно равен количеству  $N$  линий  $\vec{a}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

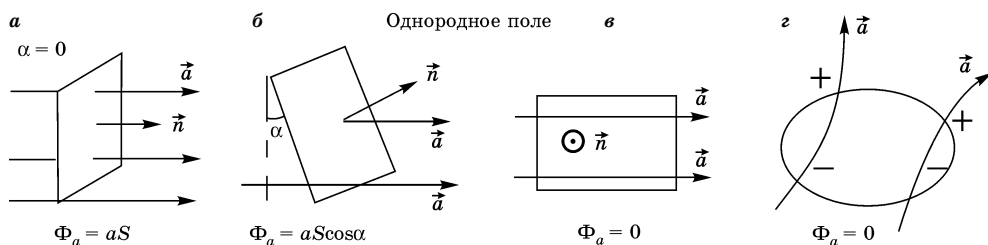


Рис. П.1.6

На рис. П.1.6 приведен ряд примеров расчета потока вектора  $\vec{a}$  через различные поверхности  $S$  (а, б, в — плоская поверхность, г — замкнутая поверхность).

Поток вектора  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность (рис. П.1.6г) равен нулю, так как количество линий, входящих ( $N-$ ) и выходящих ( $N+$ ) из поверхности, одинаково, но они берутся с противоположными знаками из-за косинуса угла  $\alpha$ .

Названия «циркуляция» и «поток вектора»  $\vec{a}$  были заимствованы из гидростатики, где рассматривается векторное поле скорости  $\vec{v}$  течения жидкости. Так, отличие от нуля циркуляции  $\vec{v}$  по взятому внутри жидкости замкнутому контуру означает, что жидкость будет двигаться (циркулировать) вдоль него. Отличие же от нуля потока  $\vec{v}$  через какую-либо поверхность, взятую внутри жидкости, означает, что существует поток жидкости через нее, т. е. линии  $\vec{v}$  пересекают эту поверхность.

**6.3 Источники векторных полей.** Оказывается, что введенные выше понятия потока и циркуляции вектора  $\vec{a}$  связаны с наличием в пространстве двух источников этого поля. Точечный источник векторного поля первого типа — это источник, в котором начинаются или заканчиваются линии  $\vec{a}$ . Так, например, в случае электростатического поля такими источниками являются точечные положительные и отрицательные заряды (рис. П.1.7а): в случае поля вектора скорости  $\vec{v}$  жидкости — это точки, где жидкость втекает или уходит из данного объема (рис. П.1.7б).

Если взять произвольную замкнутую поверхность, охватывающую такие источники, то тогда поток  $\Phi$  вектора  $\vec{a}$  через нее будет в общем случае отличен от нуля и будет характеризовать наличие источников в объеме  $V$ , ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \text{const} \cdot \text{источник 1) } = \text{const} \cdot \int_V \rho dV, \quad (\text{П.1.15})$$

где введена объемная плотность  $\rho$  источников первого типа.

Для поля вектора, где имеются только такие источники, циркуляция по произвольному замкнутому контуру  $\Gamma$  будет равна нулю, то есть такое поле будет потенциальным.

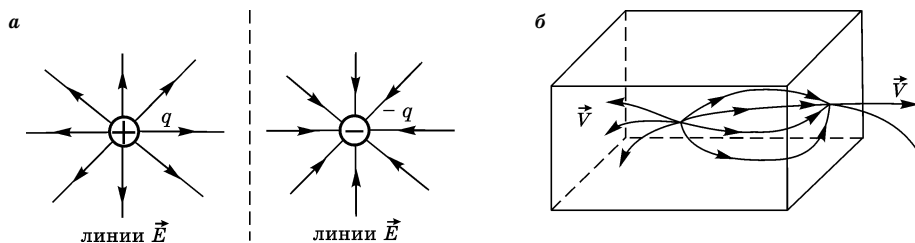


Рис. П.1.7



Точечный источник поля вектора  $\vec{a}$  второго типа создает вокруг себя вихрь, который приводит к возникновению замкнутых линий  $\vec{a}$ . Это могут быть линии  $\vec{B}$  магнитного поля, линии  $\vec{E}_B$  вихревого электрического поля, линии  $\vec{v}$  скорости течения жидкости. В случае жидкости точечный источник второго типа можно получить, если в данную точку поместить вертушку, которая будет вызывать вращение жидкости вокруг этой точки.

Если взять произвольный замкнутый контур  $\Gamma$ , то наличие в его плоскости вихрей приведет к тому, что циркуляция  $\vec{a}$  по этому контуру будет отличной от нуля, то есть будет характеризовать наличие вихрей в плоскости контура:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l} = \text{const} \cdot (\text{источник 2}) = \text{const} \cdot \oint_{\Gamma} \vec{j} d\vec{S}, \quad (\text{П.1.16})$$

где введен вектор  $\vec{j}$ , описывающий поверхностную плотность источников второго типа в плоскости контура.

Для поля только с источником второго типа поток вектора  $\vec{a}$  через произвольную поверхность будет равен нулю, так как при замкнутых линиях вектора  $\vec{a}$  количество линий, входящих и выходящих из такой поверхности, будет одинаково.

Обычно существуют векторные поля, в которых имеется только один из двух источников. Можно привести пример поля, в котором присутствуют одновременно оба источника — это поле скорости  $\vec{v}$  течения жидкости, в котором в какой-то одной точке она вливается в данный объем жидкости, и в ней же находится вертушка.

**6.4. Дивергенция и ротор вектора  $\vec{a}$ .** Для решения большинства практических задач необходимо применять математический аппарат, позволяющий учитывать наличие источников векторных полей не только в большом объеме пространства, но и в малой окрестности какой-либо точки. Для этого вводятся понятия дивергенции ( $\text{div} \vec{a}$ ) и ротора ( $\text{rot} \vec{a}$ ) вектора  $\vec{a}$ . Возьмем объем поля  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , и будем стягивать поверхность в малую окрестность точки  $A$  (рис. П.1.8а).

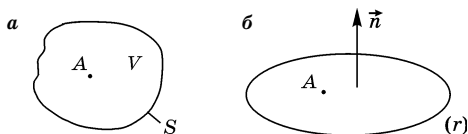


Рис. П.1.8

Тогда дивергенцией вектора  $\vec{a}$  называют предел

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{a} d\vec{S}. \quad (\text{П.1.17})$$

Дивергенция (или расхождение)  $\vec{a}$  характеризует наличие источников первого типа в малой окрестности точки  $A$ :

$$\text{div} \vec{a} = \text{const} \cdot \rho. \quad (\text{П.1.18})$$

В математике для  $\text{div} \vec{a}$  можно записать следующее выражение:

$$\text{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{П.1.19})$$

Введем понятие ротора вектора  $\vec{a}$ . Возьмем замкнутый контур  $\Gamma$ , ограничивающий поверхность  $S$ , и будем стягивать контур в малую окрестность точки  $A$  (рис. П.1.8б). Тогда **ротором вектора**  $\vec{a}$  называют предел

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{(\Gamma)} \vec{a} d\vec{l}. \quad (\text{П.1.20})$$

Ротор (вихрь)  $\vec{a}$  характеризует наличие источников второго типа в малой окрестности точки  $A$ . С учетом формулы (П.1.16) и постоянства  $\vec{j}$  в малой окрестности точки  $A$  получим

$$\text{rot} \vec{a} = \text{const} \cdot \vec{j}. \quad (\text{П.1.21})$$

В математике для  $\text{rot} \vec{a}$  можно записать следующее выражение:

$$\text{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (\text{П.1.22})$$

## МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

Как известно, физика является экспериментальной наукой. Любая вводимая в ней величина наполняется конкретным содержанием тогда, когда указан способ ее измерения. Измерить физическую величину — значит сопоставить ее с другой однородной ей величиной, принятой за единицу измерения. В связи с чем важным в физике является указание единиц измерения различных величин и способов их экспериментального определения.

Развитие физики как науки приводит к определенной взаимосвязи физических величин, описывающих разные явления. Можно подобрать, построить такую последовательность физических формул, в которой в каждую новую формулу входит только одна новая величина. Подобранная таким образом последовательность формул приводит к конкретной системе единиц измерения физических величин. В ней выделяют **основные физические величины**, единицы измерения которых выбирают произвольно с помощью соответствующих договоренностей на основе различных эталонов или специальных опытов, обладающих наибольшей точностью измерений при данном развитии науки и техники. Остальные величины называют **производными величинами**, для них единицы измерения получают из формул — определений этих величин, формул, в которые, помимо данной величины, входят другие с уже известными единицами измерения.

В настоящее время широкое распространение получила **Международная система единиц (СИ)**. В ней имеются семь основных единиц измерения. К ним относятся единицы длины (метр), времени (секунда), массы (килограмм), количества вещества (моль), температуры (кельвин), силы тока (ампер) и силы света (кандела). В курсе общей физики эта система единиц является основной, хотя в научных статьях применяются и другие системы единиц, например СГС (секунда, грамм, сантиметр).

Рассмотрим подробнее международную систему единиц (СИ). Приведем сначала определение основных единиц измерения этой системы:

**1. Длина,  $l$ : метр (м)** — длина, равная  $1\,650\,763,73$  длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона — 86.

**2. Масса,  $m$ : килограмм (кг)** — масса международного прототипа, сделанного из платино-иридиевого сплава в виде цилиндрической гири (хранится в Севре, близ Парижа).

**3. Время,  $t$ : секунда (с)** — время, равное  $9\,192\,631\,770$  периода излучения, соответствующего энергетическому переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия — 133.

**4. Термодинамическая температура, *T*: кельвин (К)** — это термодинамическая температура, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

**5. Количество вещества, *μ* (н): моль (моль)** — количество вещества, содержащее столько молекул, сколько атомов содержится в 0,012 кг в углероде — 12.

**6. Сила тока, *I*: ампер (А)** — равен силе не изменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  н.

**7. Сила света, *J*: кандела (кд)** — сила света, испускаемого с площади 1/600 000 м<sup>2</sup> сечения полного излучателя в перпендикулярном к этому сечению направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины (2042 К), и давлении 101 325 Па.

В качестве дополнительных единиц измерения в СИ используются **единицы измерения плоского угла — радиан** (1 рад = 57°17'44,8") и **телесного угла — стерадиан** (1 ср = 7,96 · 10<sup>-2</sup> полного телесного угла).

Ниже в таблице приводятся единицы измерения различных физических величин в международной системе единиц (СИ), их обозначения (русское и международное) и формулы, по которым можно экспериментально определить эти единицы измерения.

Таблица П 1

Единицы измерения физических величин (система СИ)

| Наименование<br>физической величины | Формулы-<br>определения         | Единицы измерения                                |                        |
|-------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------|
|                                     |                                 | наименование                                     | обозначение            |
| Механика                            |                                 |                                                  |                        |
| Длина, $l, S$                       |                                 | Метр                                             | м                      |
| Масса, $m$                          |                                 | Килограмм                                        | кг                     |
| Время, $t$                          |                                 | Секунда                                          | с                      |
| Скорость, $v$                       | $v = dS/dt$                     | Метр в секунду                                   | м/с                    |
| Ускорение, $a$                      | $a = d^2S/dt^2$                 | Метр на секунду в квадрате                       | м/с <sup>2</sup>       |
| Период обращения, $T$               |                                 | Секунда                                          | с                      |
| Частота обращения, $n$              | $n = 1/T$                       | Секунда в минус первой степени                   | с <sup>-1</sup>        |
| Угол поворота, $\varphi$            | —                               | РадIAN                                           | рад                    |
| Угловая скорость, $\omega$          | $\omega = d\varphi/dt$          | РадIAN в секунду                                 | рад/с                  |
| Угловое ускорение, $\varepsilon$    | $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ | РадIAN на секунду в квадрате                     | рад/с <sup>2</sup>     |
| Плотность, $\rho$                   | $\rho = m/V$                    | Килограмм на кубический метр                     | кг/м <sup>3</sup>      |
| Момент инерции, $I$                 | $I = mr^2$                      | Килограмм-метр в квадрате                        | кг · м <sup>2</sup>    |
| Импульс, $p$                        | $p = mv$                        | Килограмм-метр в секунду                         | кг · м/с               |
| Момент импульса, $L$                | $L = I\omega$                   | Килограмм-метр в квадрате<br>в секунду           | кг · м <sup>2</sup> /с |
| Сила, $F$                           | $F = ma$                        | Ньютон (килограмм-метр<br>на секунду в квадрате) | Н                      |

| Наименование<br>физической величины                                       | Формулы-<br>определения                     | Единицы измерения                      |                     |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------|
|                                                                           |                                             | наименование                           | обозначение         |
| Момент силы, $M$                                                          | $M = Fd$                                    | Ньютон-метр                            | Н · м               |
| Импульс силы, $F\Delta t$                                                 | $F\Delta t$                                 | Ньютон-секунда                         | Н · с               |
| Работа, энергия $A, W$                                                    | $dA = \vec{F}d\vec{r}$                      | Джоуль-Н                               | Дж                  |
| Мощность, $N$                                                             | $N = dA/dt$                                 | Ватт (Джоуль на секунду)               | Вт                  |
| Давление силы, $P$                                                        | $P = F/S$                                   | Паскаль<br>(ньютон на метр в квадрате) | Па                  |
| Жесткость, $k$                                                            | $k = F/\Delta l$                            | Ньютон на метр                         | Н/м                 |
| Напряжение, $\sigma$                                                      | $\sigma = F_n/S$                            | Паскаль (ньютон на метр<br>в квадрате) | Па                  |
| Модули упругости $E$ ,<br>модуль сдвига $G$ , объ-<br>емной упругости $K$ | $E = \sigma/\varepsilon$                    | Паскаль<br>(ньютон на метр в квадрате) | Па                  |
| Электростатика                                                            |                                             |                                        |                     |
| Заряд, $q$                                                                | $q = Idt$                                   | Кулон (ампер на секунду)               | Кл                  |
| Линейная плотность<br>заряда, $\tau$                                      | $\tau = dq/dl$                              | Кулон на метр                          | Кл/м                |
| Поверхностная плот-<br>ность заряда, $\sigma$                             | $\sigma = dq/dS$                            | Кулон на метр квадратный               | Кл/м <sup>2</sup>   |
| Объемная плотность<br>заряда, $\rho$                                      | $\rho = dq/dV$                              | Кулон на метр в кубе                   | Кл/м <sup>3</sup>   |
| Напряженность<br>электрического поля, $\vec{E}$                           | $E = F_K/q$                                 | Ньютон на кулон, Вольт на метр         | Н/Кл                |
| Потенциал электриче-<br>ского поля, $\varphi$                             | $\varphi = W_F/q$                           | Вольт (джоуль на кулон)                | Дж/Кл               |
| Электрический диполь-<br>ный момент, $\vec{p}$                            | $p = ql$                                    | Кулон-метр                             | Кл · м              |
| Поляризованность, $P$                                                     | $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V$            | Кулон на квадратный метр               | Кл · м <sup>2</sup> |
| Электрическое смеще-<br>ние, $D$                                          | $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ | Кулон на квадратный метр               | Кл · м <sup>2</sup> |
| Поток вектора $\vec{E}$ , $\Phi_E$                                        | $d\Phi_E = \vec{E}d\vec{s}$                 | Вольт-метр                             | В · м               |
| Поток вектора $\vec{D}$ , $\Phi_D$                                        | $d\Phi_D = \vec{D}d\vec{s}$                 | Кулон                                  | Кл                  |
| Емкость, $C$                                                              | $C = q/\varphi$                             | Фарад (кулон на вольт)                 | Ф                   |
| Объемная плотность<br>энергии электрического<br>поля, $w$                 | $w = dW/dV$                                 | Джоуль на метр в кубе                  | Дж/м <sup>3</sup>   |
| Постоянный ток                                                            |                                             |                                        |                     |
| Сила тока, $I$                                                            |                                             | Ампер                                  | А                   |
| Плотность тока, $\vec{j}$                                                 | $j = dI/ds$                                 | Ампер на метр в квадрате               | А/м <sup>2</sup>    |
| Электродвижущая<br>сила (ЭДС),<br>источника тока, $\varepsilon$           | $\varepsilon = A_{\text{стор}}/q$           | Джоуль на кулон                        | Дж/Кл               |

| Наименование<br>физической величины                      | Формулы-<br>определения                     | Единицы измерения                       |                       |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
|                                                          |                                             | наименование                            | обозначение           |
| Напряжение, $U$                                          | $U = A_{\text{стор}} + A_K)/q$              | Вольт (джоуль на кулон)                 | Дж/Кл                 |
| Сопротивление, $R$                                       | $R = U/I$                                   | Ом (вольт на ампер)                     | В/А                   |
| Удельное сопротивление, $\rho$                           | $\rho = RS/l$                               | Ом-метр                                 | Ом · м                |
| Удельная проводимость, $\sigma$                          | $\sigma = 1/\rho$                           | Сименс (ом-метр в минус первой степени) | См                    |
| Удельная тепловая мощность, $w$                          | $w = \frac{dW}{dVdt}$                       | Джоуль на метр в кубе и на секунду      | Дж                    |
| Электродинамика                                          |                                             |                                         |                       |
| Индукция магнитного поля, $B$                            | $B = \frac{F_A}{I \cdot \sin \alpha}$       | Тесла (ньютон на ампер на метр)         | Тл                    |
| Поток вектора $\vec{B}$ , $\Phi_B$                       | $d\Phi_B = \vec{B}d\vec{s}$                 | Вебер (тесла-метр квадратный)           | Тл/м <sup>2</sup>     |
| Магнитный момент контура с током, $p_m$                  | $p_m = IS$                                  | Ампер-метр в квадрате                   | А · м <sup>2</sup>    |
| Индуктивность контура, $L$                               | $L = \Phi_B/I$                              | Генри (вебер на ампер)                  | Гн                    |
| Вектор намагничивания, $\vec{J}$                         | $\vec{J} = \sum p_m/V$                      | Ампер на метр                           | А/м                   |
| Напряженность магнитного поля, $\vec{H}$                 | $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ | Ампер на метр                           | А/м                   |
| Постоянная Холла, $R_X$                                  | $R_X = 1/(q_0 n)$                           | Метр в кубе на кулон                    | м <sup>3</sup> /Кл    |
| Колебания и волны. Волновая оптика. Квантовая механика   |                                             |                                         |                       |
| Период колебания, $T$                                    |                                             | Секунда                                 | с                     |
| Линейная частота колебаний, $\nu$                        | $\nu = 1/T$                                 | Герц (секунда в минус первой)           | с <sup>-1</sup>       |
| Циклическая частота колебаний, $\omega$                  | $\omega = 2\pi/T$                           | Радан в секунду                         | рад/с                 |
| Фаза колебаний, $\varphi$                                | $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$          | Радан                                   | рад                   |
| Коэффициент затухания, $\beta$                           | $\beta = R/(2L)$                            | Секунда в минус первой (Ом на генри)    | с <sup>-1</sup>       |
| Длина волны, $\lambda$                                   | $\lambda = \nu T$                           | Метр                                    | м                     |
| Волновой вектор, $\vec{k}$                               | $k = 2\pi/\lambda$                          | Метр в минус первой                     | м <sup>-1</sup>       |
| Мощность излучения, $P_n$ , поток энергии, $\Phi_S$      | $P_n = dW/dt$<br>$\Phi_S = dW_S/dt$         | Ватт (джоуль на секунду)                | Вт                    |
| Вектор плотности потока энергии, $S_n$                   | $S_n = \frac{dW}{dt dS}$                    | Ватт на метр в квадрате                 | Вт/м <sup>2</sup>     |
| Интенсивность волны, $I$                                 | $I = \langle S_n \rangle$                   | Ватт на метр в квадрате                 | Вт/м <sup>2</sup>     |
| Энергетическая светимость, $R_T$                         | $R_T = \frac{dW}{dS dt}$                    | Ватт на метр в квадрате                 | Вт/м <sup>2</sup>     |
| Испускательная способность $r_{\lambda,T}$ , $r_{\nu,T}$ | $r_{\lambda,T} = \frac{dR}{d\lambda}$       | Ватт на метр в кубе                     | Вт/м <sup>3</sup>     |
|                                                          | $r_{\nu,T} = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T}$ | Ватт-секунда на метр в квадрате         | Вт · с/м <sup>2</sup> |

| Наименование<br>физической величины                                          | Формулы-<br>определения                      | Единицы измерения                   |                                                |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------|
|                                                                              |                                              | наименование                        | обозначение                                    |
| Ядерная физика. Молекулярная физика и термодинамика.<br>Физика твердого тела |                                              |                                     |                                                |
| Постоянная распада, $\lambda$                                                | $\lambda = \ln 2/T$                          | Секунда в минус первой              | $\text{с}^{-1}$                                |
| Активность, $A$                                                              | $A = -dN/dt$                                 | Распад в секунду                    | $\text{с}^{-1}$                                |
| Поглощенная доза, $D$                                                        | $D = W/m$                                    | Грей (джоуль на килограмм)          | Гр                                             |
| Эквивалентная доза, $H$                                                      | $H = W/m$                                    | Зиверт (джоуль на килограмм)        | Зв                                             |
| Количество вещества, $\nu$                                                   |                                              | Моль                                | Моль                                           |
| Концентрация молекул, $n$                                                    | $n = dN/dV$                                  | Метр в минус третьей степени        | $\text{м}^{-3}$                                |
| Количество теплоты, $Q$                                                      |                                              | Джоуль                              | Дж                                             |
| Внутренняя энергия, $U$                                                      |                                              |                                     |                                                |
| Теплоемкость, $C$                                                            | $C = dQ/dT$                                  | Джоуль на кельвин                   | Дж/К                                           |
| Удельная теплоемкость                                                        | $C = dQ/(mdT)$                               | Джоуль на кельвин на килограмм      | Дж/(кг · К)                                    |
| Молярная теплоемкость                                                        | $C = dQ/(\nu dT)$                            | Джоуль на моль на кельвин           | $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ |
| Энтропия                                                                     | $dS = dQ/T$                                  | Джоуль на кельвин                   | Дж/К                                           |
| Химический потенциал, $\mu$                                                  | $\mu = (\partial U/\partial \nu)_{S,\nu}$    | Джоуль на моль                      | Дж/моль                                        |
| Коэффициент диффузии                                                         | $D = \frac{dM}{\frac{dp}{dr} dS_{\perp} dt}$ | Метр в квадрате на секунду          | $\text{м}^2 \cdot \text{с}$                    |
| Коэффициент вязкости, $\eta$                                                 | $\eta = \frac{dF}{\frac{dv}{dr} dS_{\perp}}$ | Паскаль-секунда                     | Па · с                                         |
| Коэффициент теплопроводности, $K$                                            | $K = \frac{dQ}{\frac{dT}{dr} dS_{\perp} dt}$ | Ватт на кельвин на метр             | Вт/(К · м)                                     |
| Коэффициент поверхностного натяжения, $\sigma$                               | $\sigma = F_{\#}/l$                          | Ньютон на метр                      | Н/м                                            |
| Подвижность свободно-носителя заряда, $b$                                    | $b = v/E$                                    | Метр в квадрате на секунду на вольт | $\text{м}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$         |

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| От авторов . . . . .                                                                                                                                                                  | 3  |
| Предисловие . . . . .                                                                                                                                                                 | 4  |
| <br><i>Часть 1</i>                                                                                                                                                                    |    |
| Механика . . . . .                                                                                                                                                                    | 7  |
| 1.1. Кинематика движения материальной точки<br>и абсолютно твердого тела . . . . .                                                                                                    | 9  |
| 1.1.1. Путь, перемещение, мгновенная скорость<br>движения материальной точки . . . . .                                                                                                | 9  |
| 1.1.2. Мгновенное, касательное и нормальное<br>ускорения материальной точки . . . . .                                                                                                 | 10 |
| 1.1.3. Схема решения основной задачи кинематики.<br>Формулы для радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора скорости $\vec{v}$ . . . . .                                                       | 11 |
| 1.1.4. Кинематические характеристики вращательного<br>движения материальной точки и абсолютно твердого тела . . . . .                                                                 | 13 |
| 1.1.5. Формулы взаимосвязи линейных ( $\vec{v}$ , $\vec{a}_\tau$ , $\vec{a}_n$ ) и угловых ( $\vec{\omega}$ , $\vec{\epsilon}$ )<br>характеристик при вращательном движении . . . . . | 14 |
| 1.2. Динамика движения материальной<br>точки и поступательного движения абсолютно твердого тела . . . . .                                                                             | 15 |
| 1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела . . . . .                                                                                                                                    | 15 |
| 1.2.2. Законы Ньютона . . . . .                                                                                                                                                       | 16 |
| 1.2.3. Закон сохранения импульса . . . . .                                                                                                                                            | 18 |
| 1.2.4. Центр масс системы. Центр масс и центр тяжести<br>абсолютно твердого тела . . . . .                                                                                            | 20 |
| 1.3. Динамика вращательного движения . . . . .                                                                                                                                        | 22 |
| 1.3.1. Момент импульса материальной точки<br>и абсолютно твердого тела относительно оси вращения . . . . .                                                                            | 22 |
| 1.3.2. Момент силы относительно оси вращения.<br>Основной закон динамики вращательного движения . . . . .                                                                             | 23 |
| 1.3.3. Момент инерции абсолютно твердого тела<br>относительно оси вращения . . . . .                                                                                                  | 24 |
| 1.3.4. Закон сохранения момента импульса . . . . .                                                                                                                                    | 26 |
| *1.3.5. Гироскопы . . . . .                                                                                                                                                           | 28 |
| 1.3.6. Условия равновесия абсолютно твердого тела.<br>Аналогии между линейными и угловыми характеристиками<br>при поступательном и вращательном движениях . . . . .                   | 30 |
| 1.4. Механическая энергия и работа . . . . .                                                                                                                                          | 31 |
| 1.4.1. Работа силы. Кинетическая энергия тела.<br>Теорема о кинетической энергии . . . . .                                                                                            | 31 |
| 1.4.2. Кинетическая энергия вращающегося<br>абсолютно твердого тела . . . . .                                                                                                         | 33 |



|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.4.3. Работа внешних сил по вращению абсолютно твердого тела . . . .                                                                       | 34 |
| 1.4.4. Потенциальная энергия взаимодействующих тел.<br>Теорема о потенциальной энергии . . . . .                                            | 34 |
| 1.4.5. Формула связи потенциальной энергии $W_p$<br>и консервативной силы $\vec{F}_K$ . . . . .                                             | 37 |
| 1.4.6. Механическая энергия системы тел.<br>Закон сохранения механической энергии . . . . .                                                 | 38 |
| 1.4.7. Потенциальные кривые . . . . .                                                                                                       | 39 |
| 1.4.8. Применение законов сохранения импульса<br>и механической энергии к анализу абсолютно упругого<br>и неупругого столкновений . . . . . | 41 |
| 1.5. Специальная теория относительности . . . . .                                                                                           | 43 |
| 1.5.1. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея . .                                                                          | 44 |
| 1.5.2. Постулаты специальной теории относительности.<br>Опытное обоснование постулатов . . . . .                                            | 45 |
| 1.5.3. Преобразования Лоренца.<br>Дополнительные свойства пространства<br>и времени в специальной теории относительности . . . . .          | 47 |
| 1.5.4. Кинематика специальной теории относительности . . . . .                                                                              | 48 |
| 1.5.4.1. Понятие одновременности двух событий . . . . .                                                                                     | 48 |
| 1.5.4.2. Понятие длины предмета . . . . .                                                                                                   | 48 |
| 1.5.4.3. Понятие промежутка времени<br>между двумя событиями . . . . .                                                                      | 49 |
| 1.5.4.4. Релятивистский закон сложения скоростей . . . . .                                                                                  | 50 |
| 1.5.5. Динамика С. Т. О. . . . .                                                                                                            | 51 |
| 1.5.5.1. Релятивистский импульс и масса тела . . . . .                                                                                      | 51 |
| 1.5.5.2. Кинетическая энергия тела в специальной<br>теории относительности . . . . .                                                        | 52 |
| 1.5.5.3. Закон взаимосвязи массы и энергии тела . . . . .                                                                                   | 53 |
| 1.5.6. Роль специальной теории относительности<br>в современной естественнонаучной картине мира . . . . .                                   | 54 |
| *1.6. Описание движения тел в неинерциальных системах отсчета . . . . .                                                                     | 55 |
| 1.7. Гидромеханика . . . . .                                                                                                                | 59 |
| 1.7.1. Условие неразрывности потока жидкости . . . . .                                                                                      | 59 |
| 1.7.2. Уравнение Бернулли . . . . .                                                                                                         | 59 |
| 1.7.3. Примеры применения уравнения Бернулли . . . . .                                                                                      | 61 |
| 1.7.4. Течение реальной жидкости . . . . .                                                                                                  | 62 |

## Часть 2

|                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Электростатика</b> . . . . .                                                                                                                                       | 63 |
| 2.1. Электрический заряд. Закон Кулона . . . . .                                                                                                                      | 64 |
| 2.2. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов.<br>Потенциальный характер электростатического поля . . . . .                                              | 65 |
| 2.3. Вектор напряженности $\vec{E}$ и потенциал $\phi$ электростатического поля.<br>Расчет $\vec{E}$ и $\phi$ для электростатического поля точечного заряда . . . . . | 66 |
| 2.4. Принцип суперпозиции электростатических полей.<br>Примеры расчета $\vec{E}$ и $\phi$ для некоторых<br>частных случаев распределения зарядов . . . . .            | 67 |
| 2.5. Работа сил электрического поля. Разность потенциалов.<br>Формула связи вектора $\vec{E}$ и потенциала $\phi$ . . . . .                                           | 71 |
| 2.6. Графическое изображение электростатических полей . . . . .                                                                                                       | 72 |
| 2.7. Поток и циркуляция вектора $\vec{E}$ электростатического поля.<br>Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ . . . . .                                                 | 73 |
| 2.8. Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей . .                                                                                               | 77 |
| 2.9. Проводники в электрическом поле . . . . .                                                                                                                        | 81 |
| 2.9.1. Распределение избыточного заряда на проводниках<br>в состоянии равновесия . . . . .                                                                            | 81 |
| 2.9.2. Незаряженный проводник во внешнем электрическом поле . . . .                                                                                                   | 84 |
| 2.10. Емкость уединенного проводника.<br>Емкость конденсатора . . . . .                                                                                               | 85 |

|                                                                                                                                                            |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.11. Энергия заряженного проводника и конденсатора.<br>Энергия электростатического поля.<br>Объемная плотность энергии электростатического поля . . . . . | 88         |
| 2.12. Диэлектрики . . . . .                                                                                                                                | 89         |
| 2.12.1. Полярные и неполярные молекулы . . . . .                                                                                                           | 89         |
| 2.12.2. Поведение диполя в электрическом поле . . . . .                                                                                                    | 90         |
| 2.12.3. Характеристики, вводимые для описания<br>электрического поля в присутствии диэлектриков . . . . .                                                  | 91         |
| 2.12.4. Неполярный диэлектрик во внешнем электрическом поле . . . .                                                                                        | 93         |
| 2.12.5. Полярный диэлектрик во внешнем электрическом поле . . . . .                                                                                        | 94         |
| 2.12.6. Физический смысл теоремы Гаусса для векторов $\vec{D}$ и $\vec{P}$ . . . .                                                                         | 95         |
| *2.12.7. Поведение линий векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела<br>двух диэлектриков . . . . .                                                  | 97         |
| 2.12.8. Пьезоэлектрики. Сегнетоэлектрики . . . . .                                                                                                         | 98         |
| <br><b>Часть 3</b>                                                                                                                                         |            |
| <b>Постоянный электрический ток . . . . .</b>                                                                                                              | <b>101</b> |
| 3.1. Сила тока, плотность тока . . . . .                                                                                                                   | 101        |
| 3.2. Закон Ома для однородного участка цепи. Закон Джоуля–Ленца . . .                                                                                      | 103        |
| 3.3. Электродвижущая сила источника тока. Напряжение.<br>Вектор напряженности поля сторонних сил.<br>Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . . .    | 106        |
| 3.4. Правила Кирхгофа . . . . .                                                                                                                            | 108        |
| 3.5. Закон Ома и Джоуля–Ленца в дифференциальной форме . . . . .                                                                                           | 111        |
| <br><b>Часть 4</b>                                                                                                                                         |            |
| <b>Электромагнетизм . . . . .</b>                                                                                                                          | <b>112</b> |
| 4.1. Магнитостатика . . . . .                                                                                                                              | 112        |
| 4.1.1. Магнитные взаимодействия. Силы магнитного<br>взаимодействия движущихся зарядов в вакууме . . . . .                                                  | 113        |
| 4.1.2. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лоренца . . . . .                                                                                           | 114        |
| 4.1.3. Элемент тока. Закон Био–Савара–Лапласа. Закон Ампера . . . .                                                                                        | 115        |
| 4.1.4. Применение закона Био–Савара–Лапласа к расчету<br>магнитных полей различных проводников с током . . . . .                                           | 116        |
| 4.1.5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$ . . . . .                                                                                 | 119        |
| 4.1.6. Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$<br>к расчету магнитных полей проводников с током . . . . .                                        | 120        |
| 4.1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$ .<br>Работа по перемещению проводника и контура<br>с током в магнитном поле . . . . .         | 123        |
| 4.1.8. Поведение контура с током в магнитном поле . . . . .                                                                                                | 125        |
| 4.1.9. Движение заряженных частиц в электрическом<br>и магнитном полях . . . . .                                                                           | 126        |
| 4.1.10. Применение на практике законов движения<br>заряженных частиц в электрическом и магнитных полях . . . .                                             | 127        |
| 4.2. Электромагнитные явления . . . . .                                                                                                                    | 130        |
| 4.2.1. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции . . . . .                                                                                          | 131        |
| 4.2.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея.<br>Природа сторонних сил.<br>Первое уравнение Максвелла в интегральной форме . . . . .                     | 132        |
| 4.2.3. Правило Ленца.<br>Вывод закона ЭМИ из закона сохранения энергии . . . . .                                                                           | 135        |
| 4.2.4. Применение явления<br>электромагнитной индукции в технике . . . . .                                                                                 | 136        |
| 4.2.5. Явление самоиндукции . . . . .                                                                                                                      | 140        |
| 4.2.5.1. Индуктивность контура.<br>Индуктивность соленоида . . . . .                                                                                       | 140        |
| 4.2.5.2. ЭДС самоиндукции. Правило Ленца . . . . .                                                                                                         | 141        |
| 4.2.5.3. Зависимость силы тока от времени<br>при размыкании цепи . . . . .                                                                                 | 141        |

|          |                                                                                                                       |     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.5.4. | Энергия магнитного поля контура с током.<br>Объемная плотность энергии магнитного поля . . . . .                      | 143 |
| 4.2.5.5. | Зависимость силы тока от времени<br>при замыкании цепи . . . . .                                                      | 143 |
| 4.2.6.   | Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность<br>двух coaxиальных соленоидов . . . . .                            | 144 |
| 4.2.7.   | Второе уравнение Максвелла в интегральной форме.<br>Ток смещения . . . . .                                            | 145 |
| 4.2.8.   | Вся система уравнений Максвелла . . . . .                                                                             | 147 |
| 4.2.9.   | Относительность электрических<br>и магнитных взаимодействий . . . . .                                                 | 149 |
| 4.3.     | Магнитное поле в веществе . . . . .                                                                                   | 150 |
| 4.3.1.   | Характеристики, вводимые для описания магнитного<br>поля в присутствии вещества . . . . .                             | 150 |
| 4.3.2.   | Теорема о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$ и вектора<br>напряженности $\vec{H}$ магнитного поля . . . . . | 152 |
| *4.3.3.  | Поведение линий векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе<br>раздела двух магнетиков . . . . .                        | 153 |
| 4.3.4.   | Виды магнетиков . . . . .                                                                                             | 156 |
| 4.3.4.1. | Диамагнетики . . . . .                                                                                                | 156 |
| 4.3.4.2. | Парамагнетики . . . . .                                                                                               | 157 |
| 4.3.4.3. | Ферромагнетики . . . . .                                                                                              | 158 |
| 4.3.4.4. | Антиферромагнетики и ферримагнетики . . . . .                                                                         | 160 |

## Часть 5

|                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Теория колебаний</b> . . . . .                                                                                                                                     | 162 |
| 5.1. Введение . . . . .                                                                                                                                               | 163 |
| 5.2. Условия возникновения колебаний в системе.<br>Таблица аналогий между механическими<br>и электромагнитными колебаниями . . . . .                                  | 164 |
| 5.3. Общие дифференциальные уравнения,<br>описывающие колебания в произвольной системе . . . . .                                                                      | 166 |
| 5.4. Механические незатухающие<br>гармонические колебания в замкнутой системе . . . . .                                                                               | 167 |
| 5.5. Квазиупругая сила. Математический и физический маятники.<br>Гармонический осциллятор . . . . .                                                                   | 169 |
| 5.6. Гармонические электромагнитные колебания в закрытом<br>идеальном колебательном контуре . . . . .                                                                 | 171 |
| 5.7. Сложение гармонических колебаний . . . . .                                                                                                                       | 172 |
| 5.7.1. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний<br>одного направления и одинаковой частоты . . . . .                                                     | 172 |
| 5.7.2. Сложение гармонических колебаний одного направления,<br>одинаковой амплитуды и частоты, начальные фазы которых<br>образуют арифметическую прогрессию . . . . . | 174 |
| 5.7.3. Биения . . . . .                                                                                                                                               | 175 |
| 5.7.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.<br>Фигуры Лиссажу . . . . .                                                                                       | 176 |
| *5.7.5. Модулированные колебания . . . . .                                                                                                                            | 179 |
| *5.8. Спектральное представление различных сигналов . . . . .                                                                                                         | 180 |
| 5.9. Затухающие колебания . . . . .                                                                                                                                   | 183 |
| 5.9.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний,<br>его решение . . . . .                                                                                      | 183 |
| 5.9.2. Характеристики, вводимые<br>для описания затухающих колебаний . . . . .                                                                                        | 184 |
| 5.10. Вынужденные колебания . . . . .                                                                                                                                 | 186 |
| 5.10.1. Уравнения вынужденных колебаний, их решения . . . . .                                                                                                         | 186 |
| 5.10.2. Резонансные кривые для амплитуды напряжения<br>на конденсаторе, для амплитуды смещения<br>в механической системе. Явление резонанса . . . . .                 | 188 |

|                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.10.3. Резонансные кривые для амплитуды силы тока в контуре, для амплитуды скорости материальной точки в механической системе . . . . .                                             | 190 |
| 5.10.4. Разность фаз колебаний между силой тока и напряжениями на конденсаторе, индуктивностью и активном сопротивлении колебательного контура. Фазовые резонансные кривые . . . . . | 191 |
| 5.10.5. Переменный электрический ток . . . . .                                                                                                                                       | 194 |
| 5.10.6. Энергетика резонанса. Некоторые примеры проявления и применения резонанса в природе и технике . . . . .                                                                      | 196 |
| 5.11. Нелинейные системы. Автоколебания . . . . .                                                                                                                                    | 197 |
| *5.12. Параметрические колебания. Параметрический резонанс . . . . .                                                                                                                 | 200 |
| *5.13. Нормальные колебания (моды). Связанные колебательные системы . . . . .                                                                                                        | 202 |

## Часть 6

|                                                                                                                                                                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Теория волновых процессов . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                    | <b>204</b> |
| 6.1. Волны в упругой среде . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 204        |
| 6.1.1. Характеристики волновых процессов . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 204        |
| 6.1.2. Уравнение упругой волны. Уравнение плоской гармонической волны. Волновое уравнение. Уравнение сферической волны . . . . .                                                                                                                              | 207        |
| 6.1.3. Энергия упругой волны. Объемная плотность энергии. Вектор Умова . . . . .                                                                                                                                                                              | 210        |
| 6.1.4. Стоячие волны. Колебания струны . . . . .                                                                                                                                                                                                              | 213        |
| 6.1.5. Интерференция волн . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 216        |
| 6.1.6. Волновой пакет. Групповая скорость. Дисперсия волн . . . . .                                                                                                                                                                                           | 217        |
| 6.1.7. Звуковые волны. Скорость упругих волн в различных средах . . . . .                                                                                                                                                                                     | 220        |
| 6.2. Электромагнитные волны . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 222        |
| 6.2.1. Волновые уравнения для электромагнитной волны. Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны . . . . .                                                                                                                                    | 223        |
| 6.2.2. Свойства ЭМВ. . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 225        |
| 6.2.2.1. Скорость электромагнитной волны в вакууме. Фазы колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ . Поперечность и поляризация электромагнитной волны . . . . .                                                                                               | 225        |
| 6.2.2.2. Объемные плотности энергии электрического и магнитного полей электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга $\vec{S}_П$ . . . . .                                                                                                                          | 225        |
| 6.2.2.3. Отражение, преломление и поглощение электромагнитной волны. Изменение фаз колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при отражении. Интенсивности падающей, отраженной и преломленной электромагнитной волны. Законы отражения и преломления . . . . . | 226        |
| 6.2.3. Давление электромагнитной волны. Опыты П. Н. Лебедева, подтверждающие электромагнитную природу света . . . . .                                                                                                                                         | 230        |
| 6.2.4. Излучение электромагнитной волны . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 231        |
| 6.2.4.1. Шкала электромагнитной волны. Способы возбуждения электромагнитной волны . . . . .                                                                                                                                                                   | 231        |
| 6.2.4.2. Излучение электромагнитных волн диполем . . . . .                                                                                                                                                                                                    | 232        |
| 6.2.5. Опыты с электромагнитными волнами, подтверждающие их свойства . . . . .                                                                                                                                                                                | 235        |
| *6.2.6. Эффект Доплера для упругих и электромагнитных волн . . . . .                                                                                                                                                                                          | 239        |
| *6.3. Ударные волны. Уединенные волны . . . . .                                                                                                                                                                                                               | 243        |

## Часть 7

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Волновая оптика</b> . . . . .                                                                                                                   | 245 |
| 7.1. Поляризация света . . . . .                                                                                                                   | 246 |
| 7.1.1. Естественные источники света . . . . .                                                                                                      | 246 |
| 7.1.2. Виды поляризации света . . . . .                                                                                                            | 247 |
| 7.1.3. Поляризация света при отражении<br>от границы раздела двух диэлектриков. Закон Брюстера . . . . .                                           | 248 |
| 7.1.4. Поляроиды. Закон Малюса . . . . .                                                                                                           | 249 |
| 7.1.5. Явление двойного лучепреломления.<br>Получение циркулярно поляризованного<br>и эллиптически поляризованного света . . . . .                 | 250 |
| 7.1.6. Некоторые примеры практического<br>применения поляризованного света . . . . .                                                               | 254 |
| 7.2. Интерференция света . . . . .                                                                                                                 | 255 |
| 7.2.1. Условия максимального усиления и ослабления света<br>при интерференции . . . . .                                                            | 255 |
| 7.2.2. Способы получения когерентных волн . . . . .                                                                                                | 256 |
| 7.2.3. Опыт Юнга . . . . .                                                                                                                         | 258 |
| 7.2.4. Когерентность. Пространственная и временная когерентность . . . . .                                                                         | 259 |
| 7.2.5. Особенности излучения лазеров . . . . .                                                                                                     | 262 |
| 7.2.6. Интерференция в тонких пленках.<br>Полосы равного наклона и равной толщины . . . . .                                                        | 263 |
| 7.2.7. Практическое применение интерференции света.<br>Интерферометр Майкельсона . . . . .                                                         | 267 |
| 7.3. Дифракция света . . . . .                                                                                                                     | 270 |
| 7.3.1. Принцип Гюйгенса–Френеля. Метод зон Френеля.<br>Амплитудная и фазовая зонные пластинки . . . . .                                            | 270 |
| 7.3.2. Дифракция Френеля на круглом диске и круглом отверстии . . . . .                                                                            | 273 |
| 7.3.3. Дифракция Фраунгофера на одной щели<br>(дифракция в параллельных лучах). Изменение картины<br>дифракции при изменении ширины щели . . . . . | 275 |
| 7.3.4. Одномерная дифракционная решетка.<br>Условия наблюдения главных максимумов . . . . .                                                        | 277 |
| 7.3.5. Характеристики дифракционной решетки<br>(угловая дисперсия, разрешающая способность) . . . . .                                              | 280 |
| 7.3.6. Дифракция рентгеновских лучей. Условие Брэгга–Вульфа . . . . .                                                                              | 282 |
| 7.3.7. Голография . . . . .                                                                                                                        | 284 |
| *7.3.8. Основные характеристики спектральных приборов.<br>Дифракционные решетки.<br>Интерферометр Фабри–Перо. Фурье-оптика . . . . .               | 285 |
| 7.4. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом . . . . .                                                                              | 289 |
| 7.4.1. Поглощение света . . . . .                                                                                                                  | 289 |
| 7.4.2. Дисперсия света . . . . .                                                                                                                   | 291 |
| 7.4.3. Рассеяние света . . . . .                                                                                                                   | 293 |
| 7.4.4. Излучение Вавилова–Черенкова . . . . .                                                                                                      | 296 |
| *7.4.5. Нелинейные эффекты при распространении света в среде . . . . .                                                                             | 297 |

## Часть 8

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Квантовая оптика</b> . . . . .                                                                                      | 302 |
| 8.1. Тепловое излучение . . . . .                                                                                      | 303 |
| 8.1.1. Характеристики, вводимые для описания параметров<br>теплового излучения. Закон Кирхгофа . . . . .               | 303 |
| 8.1.2. Модель абсолютно черного тела. Экспериментальные<br>законы теплового излучения абсолютно черного тела . . . . . | 305 |
| 8.1.3. Формула Рэлея–Джинса. Ультрафиолетовая катастрофа.<br>Формула Планка . . . . .                                  | 307 |
| 8.1.4. Оптическая пирометрия . . . . .                                                                                 | 312 |
| 8.2. Внешний фотоэффект. Законы фотоэффекта и их объяснение . . . . .                                                  | 313 |
| 8.3. Тормозное рентгеновское излучение. Эффект Комптона. Опыт Боте . . . . .                                           | 318 |
| 8.4. Природа электромагнитного излучения . . . . .                                                                     | 321 |

## Часть 9

|                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Квантовая механика</b> . . . . .                                                                                                  | 323 |
| 9.1. Идея де Бройля. Опыты, подтверждающие волновые свойства микрочастиц . . . . .                                                   | 324 |
| 9.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга . . . . .                                                                             | 327 |
| 9.2.1. Сопряженные величины . . . . .                                                                                                | 327 |
| 9.2.2. Условия применимости классической механики для описания движения микрочастиц . . . . .                                        | 330 |
| 9.2.3. Трактовка соотношений неопределенностей Гейзенберга с точки зрения процесса измерения . . . . .                               | 331 |
| 9.3. Волновая функция. Стандартные условия. Уравнение Шредингера. Схема решения задач механики . . . . .                             | 332 |
| 9.4. Задача 1. Свободная микрочастица . . . . .                                                                                      | 335 |
| 9.5. Задача 2. Микрочастица в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками . . . . .                               | 337 |
| 9.6. Задача 3. Микрочастица в потенциальном поле в виде бесконечно протяженной прямоугольной ступеньки (низкая ступенька) . . . . .  | 340 |
| 9.7. Задача 4. Микрочастица в потенциальном поле в виде бесконечно протяженной прямоугольной ступеньки (высокая ступенька) . . . . . | 341 |
| 9.8. Задача 5. Туннельный эффект . . . . .                                                                                           | 344 |
| 9.9. Задача 6. Гармонический осциллятор . . . . .                                                                                    | 347 |

## Часть 10

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Атом водорода. Многоэлектронные атомы</b> . . . . .                                                                       | 350 |
| 10.1. Атом водорода . . . . .                                                                                                | 350 |
| 10.1.1. Постановка задачи . . . . .                                                                                          | 350 |
| 10.1.2. Теория атома водорода, по Бору . . . . .                                                                             | 350 |
| 10.1.3. Опыт Франка и Герца . . . . .                                                                                        | 354 |
| 10.1.4. Уравнение Шредингера для атома водорода, его решение. Главное квантовое число. Орбитальное квантовое число . . . . . | 355 |
| 10.1.5. Магнитное орбитальное квантовое число. Пространственное квантование проекций магнитных моментов электрона . . . . .  | 358 |
| 10.1.6. Спиновые механический и магнитный моменты электрона. Кратность вырождения уровней энергии. Правила отбора . . . . .  | 359 |
| 10.2. Многоэлектронные атомы . . . . .                                                                                       | 361 |
| 10.2.1. Электронные состояния . . . . .                                                                                      | 361 |
| 10.2.2. Характеристические рентгеновские спектры . . . . .                                                                   | 364 |
| 10.2.3. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева . . . . .                                                           | 366 |
| 10.2.4. Опыт Штерна и Герлаха. Эффект Зеемана . . . . .                                                                      | 368 |
| 10.2.5. Лазеры . . . . .                                                                                                     | 371 |

## Часть 11

|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Физика ядра и элементарных частиц</b> . . . . .                                                                        | 374 |
| 11.1. Физика элементарных частиц . . . . .                                                                                | 375 |
| 11.1.1. Типы взаимодействий . . . . .                                                                                     | 376 |
| 11.1.2. Основные методы экспериментального исследования в физике элементарных частиц . . . . .                            | 378 |
| 11.1.3. Основные экспериментальные достижения в физике элементарных частиц . . . . .                                      | 379 |
| 11.1.4. Частицы и античастицы . . . . .                                                                                   | 380 |
| 11.1.5. Классификация элементарных частиц . . . . .                                                                       | 381 |
| 11.1.6. Изотопические мультиплеты. Супермультиплеты . . . . .                                                             | 383 |
| 11.1.7. Кварковая модель строения адронов . . . . .                                                                       | 385 |
| 11.1.8. Примеры построения адронов из кварков . . . . .                                                                   | 387 |
| 11.1.9. Законы сохранения при процессах взаимодействия элементарных частиц . . . . .                                      | 389 |
| 11.1.10. Примеры выполнения и нарушения законов сохранения при протекании реакций между элементарными частицами . . . . . | 390 |

|           |                                                                                                                                                                              |     |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1.11.  | Закон сохранения четности. Зарядовое сопряжение ( $C$ ), $CP$ -преобразование (комбинированная инверсия), обращение времени ( $T$ -преобразование), $CPT$ -теорема . . . . . | 391 |
| 11.1.12.  | Видоизменение физической картины мира с уменьшением расстояний между частицами . . . . .                                                                                     | 394 |
| 11.2.     | Физика атомного ядра . . . . .                                                                                                                                               | 396 |
| 11.2.1.   | Характеристики атомного ядра . . . . .                                                                                                                                       | 396 |
| 11.2.2.   | Ядерные силы. Свойства ядерных сил . . . . .                                                                                                                                 | 398 |
| 11.2.3.   | Модели атомного ядра . . . . .                                                                                                                                               | 400 |
| 11.2.4.   | Ядерные реакции . . . . .                                                                                                                                                    | 401 |
| 11.2.5.   | Явление радиоактивности . . . . .                                                                                                                                            | 402 |
| 11.2.5.1. | Основной закон радиоактивного распада. Активность радиоактивного вещества . . . . .                                                                                          | 403 |
| 11.2.5.2. | Бета-распад ядер . . . . .                                                                                                                                                   | 404 |
| 11.2.5.3. | Альфа-распад ядер . . . . .                                                                                                                                                  | 406 |
| 11.2.5.4. | Гамма-излучение ядер . . . . .                                                                                                                                               | 407 |
| 11.2.5.5. | Влияние радиоактивного излучения на человека . . . . .                                                                                                                       | 408 |
| 11.2.6.   | Ядерная энергетика . . . . .                                                                                                                                                 | 409 |
| 11.2.6.1. | Цепные реакции деления тяжелых ядер . . . . .                                                                                                                                | 409 |
| 11.2.6.2. | Термоядерные реакции . . . . .                                                                                                                                               | 412 |

## Часть 12

|                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Молекулярная физика и термодинамика . . . . .                                                                                                                                           | 415 |
| 12.1. Молекулярная физика. Идеальный газ . . . . .                                                                                                                                      | 415 |
| 12.1.1. Статистический и термодинамический методы описания свойств макроскопических систем . . . . .                                                                                    | 416 |
| 12.1.2. Функции распределения . . . . .                                                                                                                                                 | 418 |
| 12.1.3. Функция распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул. График функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости для двух температур . . . . . | 419 |
| 12.1.4. Функция распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям поступательного движения молекул . . . . .                                                               | 422 |
| 12.1.5. Средние характеристики молекул . . . . .                                                                                                                                        | 423 |
| 12.1.6. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа для давления . . . . .                                                                                       | 423 |
| 12.1.7. Молекулярно-кинетический смысл температуры . . . . .                                                                                                                            | 425 |
| 12.1.8. Распределение Больцмана. Барометрическая формула . . . . .                                                                                                                      | 426 |
| 12.1.9. Распределение Максвелла–Больцмана . . . . .                                                                                                                                     | 428 |
| 12.1.10. Экспериментальная проверка распределения молекул по модулю скорости. Опыты Перрена по определению постоянной Авогадро . . . . .                                                | 429 |
| 12.2. Равновесная термодинамика . . . . .                                                                                                                                               | 431 |
| 12.2.1. Нулевое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Работа, теплообмен . . . . .                                                                                                  | 431 |
| 12.2.2. Первый закон (начало) термодинамики . . . . .                                                                                                                                   | 435 |
| 12.2.3. Второй закон (начало) термодинамики. Термодинамические формулировки . . . . .                                                                                                   | 436 |
| 12.2.4. Энтропия в термодинамике. Качественный пример изменения энтропии при неравновесном процессе. Применение второго начала термодинамики к развитию Вселенной . . . . .             | 438 |
| 12.2.5. Метод термодинамических потенциалов . . . . .                                                                                                                                   | 440 |
| 12.2.6. Число степеней свободы молекулы. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Теплоемкость идеального газа . . . . .                                          | 442 |
| 12.2.7. Применение первого и второго закона термодинамики к изопроцессам в идеальном газе. Политропический процесс . . . . .                                                            | 446 |

|            |                                                                                                                                                                       |     |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.2.8.    | КПД идеального теплового двигателя. Примеры расчета изменения энтропии для неравновесных процессов . . . . .                                                          | 448 |
| 12.2.9.    | Термодинамическая вероятность.<br>Статистический смысл понятия энтропии.<br>Оценка термодинамической вероятности<br>неравновесного и равновесного состояний . . . . . | 451 |
| 12.2.10.   | Флуктуации. Третий закон (начало) термодинамики . . . . .                                                                                                             | 453 |
| 12.2.11.   | Явления переноса . . . . .                                                                                                                                            | 457 |
| 12.2.11.1. | Уравнения для явлений переноса.<br>Линейная неравновесная термодинамика . . . . .                                                                                     | 457 |
| 12.2.11.2. | Формулы для коэффициентов переноса<br>в случае идеального газа . . . . .                                                                                              | 460 |
| 12.2.11.3. | Зависимость коэффициентов переноса<br>от параметров состояния идеального газа<br>при протекании различных изопроцессов<br>в идеальном газе . . . . .                  | 462 |
| 12.2.12.   | Уравнение Ван-дер-Ваальса. Вывод формулы . . . . .                                                                                                                    | 464 |
| 12.2.13.   | Экспериментальные и теоретические изотермы<br>для реальных газов. Критическая точка . . . . .                                                                         | 466 |
| 12.2.14.   | Внутренняя энергия реального газа . . . . .                                                                                                                           | 470 |
| 12.2.15.   | Эффект Джоуля–Томсона . . . . .                                                                                                                                       | 471 |
| 12.2.16.   | Фаза. Равновесие фаз и фазовые переходы. Уравнение<br>Клапейрона–Клаузиуса. Диаграмма состояния . . . . .                                                             | 473 |
| 12.2.16.1. | Фаза. Химический потенциал.<br>Равновесие фаз и фазовые переходы . . . . .                                                                                            | 473 |
| 12.2.16.2. | Фазовые переходы первого рода.<br>Уравнение Клапейрона–Клаузиуса . . . . .                                                                                            | 475 |
| 12.2.16.3. | Фазовые переходы второго рода . . . . .                                                                                                                               | 477 |
| 12.2.16.4. | Диаграммы состояния . . . . .                                                                                                                                         | 477 |
| 12.2.17.   | Жидкое состояние. Поверхностное натяжение.<br>Смачиваемость. Капиллярные явления . . . . .                                                                            | 479 |
| 12.2.17.1. | Строение жидкости . . . . .                                                                                                                                           | 479 |
| 12.2.17.2. | Поверхностное натяжение . . . . .                                                                                                                                     | 481 |
| 12.2.17.3. | Смачивание и несмачивание . . . . .                                                                                                                                   | 482 |
| 12.1.17.4. | Капиллярные явления. Формула Лапласа.<br>Высота поднятия жидкости в капилляре . . . . .                                                                               | 485 |

## Часть 13

### Физика твердого тела

|         |                                                                                                                          |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 13.1.   | Строение кристаллов . . . . .                                                                                            | 488 |
| 13.1.1. | Кристаллическая решетка . . . . .                                                                                        | 488 |
| 13.1.2. | Жидкие кристаллы, аморфные металлы, квазикристаллы . . . . .                                                             | 489 |
| 13.1.3. | Дефекты кристаллической решетки. Точечные дефекты.<br>Одномерные, двумерные и трехмерные дефекты . . . . .               | 490 |
| 13.2.   | Типы связей в кристаллах . . . . .                                                                                       | 493 |
| 13.3.   | Описание статистических свойств<br>идеальных газов различных частиц . . . . .                                            | 496 |
| 13.3.1. | Фазовое пространство. Схема описания свойств<br>идеального газа частиц в квантовой физике . . . . .                      | 496 |
| 13.3.2. | Функция плотности состояний<br>для идеального газа частиц . . . . .                                                      | 498 |
| 13.3.3. | Квантовые распределения<br>Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна . . . . .                                                       | 499 |
| 13.3.4. | Вывод формулы для функции распределения<br>Ферми–Дирака $F_{\text{ФД}}(W)$ . . . . .                                     | 500 |
| 13.3.5. | Пример расчета числа способов<br>размещения частиц по ячейкам фазового<br>пространства для различных статистик . . . . . | 502 |
| 13.3.6. | Распределение Максвелла–Больцмана.                                                                                       |     |



|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Условие снятия вырождения . . . . .                                                                                                                    | 503 |
| 13.3.7. Фотонный газ. Вывод формулы для испускательной способности абсолютно черного тела . . . . .                                                    | 504 |
| 13.3.8. Распределения Гиббса. $6N$ -мерное фазовое пространство . . . . .                                                                              | 505 |
| 13.4. Электроны в металле. Модель свободных электронов . . . . .                                                                                       | 507 |
| 13.4.1. Решение квантово-механической задачи на электроны в металле. Энергия Ферми. Температура Ферми . . . . .                                        | 507 |
| 13.4.2. Электронный вклад в теплоемкость металлов . . . . .                                                                                            | 510 |
| 13.5. Тепловые свойства твердых тел . . . . .                                                                                                          | 511 |
| 13.5.1. Методы решения задачи о тепловых колебаниях кристаллической решетки. Фононный газ. Гармонические осцилляторы . . . . .                         | 511 |
| 13.5.2. Квантовая теория теплоемкости кристаллической решетки (теория Дебая) . . . . .                                                                 | 515 |
| 13.5.3. Теплопроводность твердых тел . . . . .                                                                                                         | 517 |
| 13.5.4. Тепловое расширение твердых тел . . . . .                                                                                                      | 519 |
| 13.6. Зонная теория твердых тел. Приближение сильной связи. Классификация твердых тел. Приближение слабой связи. Эффективная масса электрона . . . . . | 520 |
| 13.7. Электропроводность металлов и полупроводников . . . . .                                                                                          | 524 |
| 13.7.1. Классическая теория электропроводности металлов . . . . .                                                                                      | 524 |
| 13.7.2. Квантовая теория электропроводности металлов . . . . .                                                                                         | 526 |
| 13.7.3. Электропроводность собственных полупроводников . . . . .                                                                                       | 528 |
| 13.7.4. Электропроводность примесных полупроводников . . . . .                                                                                         | 530 |
| 13.7.5. Фотопроводимость полупроводников . . . . .                                                                                                     | 534 |
| 13.8. Контактные явления. Контакт двух металлов. $p$ - $n$ -переход. Транзистор . . . . .                                                              | 535 |
| 13.9. Термоэлектрические явления . . . . .                                                                                                             | 539 |
| 13.10. Парамагнетизм свободных электронов (щелочные и щелочноземельные металлы) . . . . .                                                              | 542 |
| 13.11. Явление сверхпроводимости. Явление сверхтекучести . . . . .                                                                                     | 544 |

## Приложения

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Приложение 1. Некоторые дополнительные сведения и формулы, используемые при изложении курса физики . . . . . | 552 |
| Приложение 2. Международная система единиц (СИ) . . . . .                                                    | 559 |

Марс Гильманович *ВАЛИШЕВ*,  
Александр Александрович *ПОВЗНЕР*

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**  
*Учебное пособие*

Издание второе,  
стереотипное

Художественный редактор *С. Ю. Малахов*  
Технический редактор *Н. В. Лозовская*  
Редактор *Е. А. Монахова*  
Корректоры *Н. Д. Севастьянова, Т. А. Кошелева*  
Подготовка иллюстраций *Н. Ю. Горшкова*  
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07  
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 21.01.10.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 46,80. Тираж 2000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»  
610033, г. Киров, ул. Московская, 122